

Abschlußbericht

Abschlußbericht über das, im Rahmen des BMBF–
Programms “Anwendungsorientierte Verbundpro–
jekte auf dem Gebiet der Mathematik”, geförderte
Projekt:

**Entwurf von dynamischen Beobachtern
für Torsionsschwingungen in Turbosätzen**

Förderungskennzeichen: 03–PR7FHM–3

Förderungszeitraum : 01.01.1994 – 31.07.1997

Prof. Dr. D. Prätzel–Wolters

ITWM

Erwin–Schrödinger–Straße

D–67663 Kaiserslautern

9.2.1 Aufgabenstellung

Turbosätze zur elektrischen Stromerzeugung werden in folge zeitweise auftretender Störfälle im elektrischen Netz zu starken Torsionsschwingungen angeregt, die zur Materialermüdung und somit langfristig zur Zerstörung des Turbosatzes beitragen. Um diese Effekte besser im Griff zu haben, soll ein Online-Monitoring der auftretenden Torsionsmomente für kritische Stellen des Turbosatzes erfolgen. Die Aufgabenstellung des Projektes bestand nun in der Entwicklung eines modellgestützten Torsionserfassungsgerätes, welchem als Eingangsgrößen das elektrische Moment sowie die Meßinformation an einer optimal zu bestimmenden Sensorposition zur Verfügung stehen und welches online für beliebige Stellen des Turbosatzes die zugehörigen Torsionsmomentverläufe schätzt. Die Performance dieses Gerätes sollte aufgrund von Parameterunsicherheiten des zugrundeliegenden FE-Modells möglichst robust gegenüber Modellunsicherheiten, sowie Meß- und Prozeßstörungen sein.

9.2.2 Vorhabensvoraussetzungen

Das Vorhaben wurde in Kooperation mit Siemens KWU in Mülheim durchgeführt. Von dieser Seite wurden Finite Element Modelle verschiedener Turbosatztypen, sowie Last- und Torsionsmomentverläufe für verschiedene Störfallsituationen zur Verfügung gestellt.

9.2.3 Planung und Ablauf des Vorhabens

Die Bearbeitung des Projektes untergliederte sich in die Teilbereiche Modellbildung einschließlich Unsicherheitsmodellierung, Modellreduktion, Sensorplatzierung, sowie letztlich dem Beobachterentwurf für das reduzierte Modell. Diese Teilprobleme wurden in der genannten Reihenfolge abgearbeitet, wobei am Ende des jeweiligen Arbeitsabschnittes die Evaluation der jeweils entwickelten Algorithmen anhand geeigneter KWU-Daten vorgenommen wurde. Seitens der Mitarbeiter wurde das Projekt zunächst im Zeitraum von 01.01.94 bis 30.06.94 von Herrn Uffe Thygesen bearbeitet. Dieser wurde abgelöst von Herrn Patrick Lang der vom 01.07.94 bis zum Ende der Projektlaufzeit die Projektarbeiten durchführte. Neben den Herren Thygesen und Lang, stellte im Zeitraum von 01.01.94 bis 30.11.95 auch Herr Dr. Jörg Hoffmann einen erheblichen Teil seiner Arbeitszeit für das Projekt zur Verfügung. Die Implementierung der entwickelten Verfahren wurde größtenteils von Frau Jing Xu durchgeführt.

9.2.4 Wissenschaftlicher und technischer Stand

Bekannte Konstruktionen, Verfahren und Schutzrechte

Aus mathematischer Sicht basieren die Ansätze zur Problemlösung auf neuen Konzepten der frequenzgewichteten balanzierten Modellreduktion, bzw. des robusten H_∞ -Filterentwurfs unter expliziter Parameterunsicherheit.

Aus technischer Sicht wurde aus Praktikabilitätsgründen entschieden, die Messung am Turbosatz mittels eines bereits von Siemens KWU entwickelten Torsionsmeßkopfes vorzunehmen. Dieser Sensor mißt berührunglos und ist daher relativ problemlos zu installieren und ist außerdem nicht schmutzempfindlich. Hinsichtlich der optimalen Positionierungs-

strategie dieses Sensors wurde auf bekannte Verfahren zurückgegriffen, die dann allerdings hinsichtlich Gewichtungparametern optimiert wurden.

Verwendete Fachliteratur

- K. Bathe & E. Wilson; *Numerical Methods in Finite Element Analysis*; Prentice Hall, 1976
- J. Bellos & D. Inmann; *A Survey of Nonproportional Damping*; Shock and Vibration Digest, 21:7–12, 1989
- K. Glover; *All optimal Hankel–norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ error bounds*; Int. J. Control, 39(6):1115–1193, 1984
- S.M. Joshi; *Control of Large Flexible Space Structures*; Springer Verlag, 1988
- P. Lancaster & L. Rodman; *Algebraic Riccati Equations*; Oxford Science Publications, 1995
- C. Kenney & G. Hewer; *The sensitivity of the Algebraic and Differential Riccati Equations*; SIAM J. Control and Optimization, 28(1):50–69, 1990
- K.M. Nagpal & P.P. Khargonekar; *Filtering and Smoothing in an H_∞ Setting*; IEEE Trans. Automatic Control, 36:152–166, 1991
- H.G. Natke; *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen– und Modalanalyse*; Vieweg, 1988
- M. Safonov & R. Chiang; *A Schur Method for Balanced Model Reduction*; Proceedings of Am. Ctrl. Conf., 1036–1040, 1988
- P. Schwibinger; *Torsionsschwingungen von Turbogruppen und ihre Kopplung mit den Biegeschwingungen bei Getriebemaschinen*; VDI–Verlag, 1987
- C.E. de Souza & Lihua Xie & Youyi Wang; *H_∞ filtering for a class of uncertain nonlinear systems*; System & Control Letters, 20:419–426, 1993
- A. Stoorvogel; *The H_∞ –Control Problem*; Prentice Hall, 1992
- R. Wildenberg; *Modellreduktion von linearen, dynamischen Systemen*; Diplomarbeit, 1987
- H. Wilharm; *Ein praktisch orientiertes Verfahren der Beobachterausslegung bei schwachgedämpften Mehrmassensystemen mit deterministischen Meßstörungen*; VDI–Verlag, 1983
- K. Zhou with J.C. Doyle & K. Glover; *Robust and Optimal Control*; Prentice Hall, 1996
- K. Zhou & P. Khargonekar & J. Stoustrup & H. Niemann; *Robust Performance of Systems with Structured Uncertainties in State Space*; Automatica, 31:249–256, 1995
- K. Zhou; *Frequency weighted model reduction with \mathcal{L}_∞ error bounds*; System & Control Letters, 21(2):115–125, 1993

9.2.5 Zusammenarbeit mit anderen Stellen

Neben der Kooperation mit Siemens KWU in Mülheim wurde, nachdem Herr Prof. Dr. Kulig den Lehrstuhl für elektrische Maschinen, Antriebe und Leistungselektronik an der Universität Dortmund übernommen hatte, mit seiner Arbeitsgruppe dort zusammen gearbeitet.

9.2.6 Ergebnisdarstellung

Siehe Anlage.

9.2.7 Voraussichtlicher Nutzen und Verwertbarkeit des Ergebnisses

Die während des Projektes erzielten Resultate und entwickelten numerischen Verfahren dienen zum einen als Grundlage zur Konstruktion eines Torsionserfassungsgerätes für Turbosätze. Entgegen ursprünglicher Planungen wurde solch ein Gerät während der Projektlaufzeit noch nicht realisiert, wofür allerdings lediglich eine andere betriebsinterne Prioritätensetzung bei Siemens KWU verantwortlich ist. Zum jetzigen Zeitpunkt sieht es so aus, daß der Bau des Gerätes in 1998 durchgeführt wird.

Zum zweiten stellte sich in der Projektlaufzeit heraus, daß die erzielten Resultate zumindest von gleichrangiger Bedeutung für die Konstruktion und Analyse von Turbosätzen, bzw. allgemeiner bei der Konstruktion und Analyse von rotierenden Maschinen von Interesse sind. Daher wurden die entwickelten Algorithmen in einem Software-Tool mit grafischer Benutzeroberfläche unter MATLAB zusammengefaßt. Dieses Programmpaket steht nun interessierten Anwendern zur Verfügung, wird aber gerade noch hinsichtlich seiner Oberflächenfunktionalität verbessert, als auch um geeignete Verfahren zur Berücksichtigung von Robustheits- und Sensitivitätsaspekten ergänzt.

9.2.8 Fortschritte bei anderen Stellen

Während der Projektlaufzeit sind dem ZE keine Fortschritte anderer Stellen mit direktem Bezug zum bearbeiteten Projekt bekannt geworden.

9.2.9 Veröffentlichung des Ergebnisses nach Nr.11

Im Rahmen des Projektes sind die folgenden Veröffentlichungen, Vorträge und Magister- bzw. Diplomarbeiten entstanden.

Veröffentlichungen:

- U. Thygesen, J. Hoffmann, D. Prätzel-Wolters, S. Kulig
Observers for a Generator Shaft
Progress in Industrial Mathematics, H. Neunzert (Hrsg.), Wiley-Teubner, 1996,
S.543-555

- D. Prätzel–Wolters, J. Hoffmann, S. Kulig
Observers for a Generator Shaft
Proc. 3. Int. Congress on Industrial and Applied Mathematics, Hamburg, 1996
- P. Lang, D. Prätzel–Wolters, S. Kulig
Modellreduktion und dynamische Beobachter für Torsionsschwingungen in Turbosätzen
Mathematik–Schlüsseltechnologie für die Zukunft, K.–H. Hoffmann, W. Jäger, T. Lohmann, H. Schunk (Hrsg.), Springer–Verlag, 1997, S.491–501
- P. Lang
Iterative Robust Filter Design for Flexible Structures
Proc. of ECC 1997
- P. Lang, D. Prätzel–Wolters, J. Xu, S. Kulig
Model Reduction and Robust Observer Design for Turbine–Generator Shafts
eingereicht für IFToMM–Conference on Rotor Dynamics, 7.–10. September 1998, Darmstadt
- P.Lang
Model Reduction and Observer Design for Flexibles Structures in a H_∞ –Setting
Dissertation, Abschluß April 1998

Fachvorträge

- J. Hoffmann
Observers for a Generator Shaft
ECMI–Konferenz in Kaiserslautern (1994)
- D. Prätzel–Wolters
Modelling and Observer Design for Generator Shafts
University of Exeter (Februar 95)
- D. Prätzel–Wolters
Model Reduction, Sensor Placement and Observer Design for Generator Shafts
Workshop on Industrial Mathematics in Budapest (April 95)
- J. Hoffmann
Observers for a Generator Shaft
ICIAM 95, Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics (Juli 95)
- P. Lang, D. Prätzel–Wolters
Beobachter für Torsionsschwingungen von Turbosätzen
Posterstand bei BMBF–Tagung in München (Oktober 95)
- P. Lang
Modellierung, Modellreduktion & Beobachterentwurf für einen Turbosatz
Graduiertenkolleg–Workshop in Lambrecht (Januar 96)

- P. Lang
Uncertain Models and Robust Observers for Generator Shafts
ECMI-Konferenz, 25.–29.06.96 in Kopenhagen
- D. Prätzel-Wolters
Modelling, Model Reduction and Observer Design for Turbo Shafts
Bremen (07.12.96)
- P. Lang
Modellgestütztes Monitoring von Torsionsschwingungen bei Turbosätzen
VDI-Fachtagung: Monitoring und Diagnose in energietechnischen Anlagen, Braunschweig (08.–09.10.97)
- P. Lang, D. Prätzel-Wolters
Beobachter für Torsionsschwingungen von Turbosätzen
Posterstand bei BMBF-Tagung in Heidelberg (Oktober 97)

Diplomarbeiten, Magisterarbeiten

- Uffe Thygesen
Observers for a generator shaft
Magisterarbeit, 1995
- Leonidas Mulindabyuma
Efficient Algorithms for the Structured Generalized Eigenvalue Problem
Magisterarbeit, 1996
- Doris Maus
Parameter Adaptation in Rotating Shaft Models with Prescribed Eigenmotions
Diplomarbeit, 1997
- Florian Lösch
Modellierung und H_∞ -Reglerentwurf für eine Kesselspeisepumpe mit magnetischer Lagerung
Diplomarbeit, 1997

Eine zusammenfassende abschließende Darstellung für eine Zeitschrift ist im Moment noch in Bearbeitung.

9.3 Vertraulichkeit

Weder seitens des ZE, noch seitens Dritter besteht ein Interesse an der vertraulichen Behandlung bestimmter Einzelheiten aus dem Bericht.

Anlage: Ergebnisdarstellung

1 Turbosatzmodell

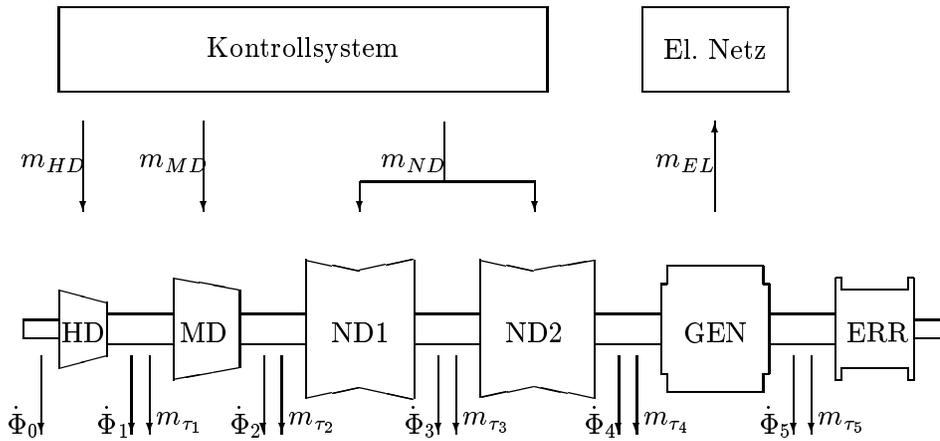


Abbildung 1: Turbosatz mit Kontrollsystem

Der Wellenstrang eines typischen Turbosatzes mittlerer und großer Leistung besteht aus einer Hochdruck **HD**-, einer Mitteldruck **MD**-, einer oder mehreren Niederdruckturbinen **ND1**, **ND2**, sowie aus einem Generator **GEN** und einem Erregersatz **ERR**. Der Aufbau eines solchen Wellenstrangs ist in Abbildung 1 dargestellt. Den antreibenden Dampfmomenten m_{HD} , m_{MD} und m_{ND} wirken das Generatormoment m_{EL} und die Torsionsmomente m_{τ_i} , die proportional zu den Verdrehwinkeln Φ_i sind, entgegen.

1.1 Partielle Differentialgleichung

Da nur reine Torsionsschwingungen des Turbosatzes betrachtet werden sollen, reicht für die Modellierung ein eindimensionales Wellenmodell aus. Unter der zunächst vorgenommenen Vernachlässigung der Dämpfung ergibt sich folgende partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
 J(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \tau(x, t) + M(x, t) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t) \right) + M(x, t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

mit den freien Randbedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} \phi(L, t) = 0$$

und geeigneten Anfangsbedingungen:

$$\phi(x, 0) = f_1(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, 0) = f_2(x).$$

Hierbei sind $\phi(x, t)$ die Winkelverdrehung und $\tau(x, t) = K(x) \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t)$ das Torsionsmoment der Welle. Weiter bezeichnen $J(x)$ das Trägheitsmoment je Einheitslänge, $K(x)$ die Steifigkeit und $M(x, t)$ das äußere auf die Welle wirkende Moment je Einheitslänge. Da das Erregermoment vernachlässigbar klein ist, resultiert das externe Drehmoment $M(x, t)$ aus den Dampfmomenten der Turbinen und aus dem elektrischen Moment des Generators. Die Annahme, daß die externen Momente jeweils gleichförmig verteilt über die Länge der entsprechenden Maschine auf die Welle wirken, führt auf folgenden Ansatz für $M(x, t)$:

$$M(x, t) = [b_1(x), b_2(x), \dots, b_5(x)] \begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ \vdots \\ m_5(t) \end{pmatrix} =: B(x)m(t)$$

Hierbei bezeichnen die $m_i(t)$ die zeitlichen Verläufe der entsprechenden Momente, während die Verteilungsfunktionen $b_i(x)$ gegeben sind durch:

$$b_i(x) = \begin{cases} (x_i^+ - x_i^-)^{-1} & \text{falls } x \in [x_i^-, x_i^+] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1.2 Finite-Element-Modell

Die partielle Dgl. (1) wird mittels eines Finite-Element-Ansatzes in eine N -dimensionale gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung transformiert. Die FEM-Unterteilung der Welle ist hierbei konstruktionsbedingt vorgegeben und kann leider nicht nach numerisch günstigen Gesichtspunkten vorgenommen werden. Hinzufügen einer Meßgleichung führt auf folgendes System:

$$J\ddot{\phi} + K\phi = Bu; \quad y = C\phi \quad (2)$$

Hierbei ist nun $B \in \mathbb{R}^{N \times m}$ die Eingangsmatrix der äußeren Momente und $C \in \mathbb{R}^{p \times N}$ die Meßmatrix zur Berechnung der Torsionsmomente. Die Massenmatrix $J \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ist tridiagonal, symmetrisch und positiv definit, die Steifigkeitsmatrix $K \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ist tridiagonal, symmetrisch und positiv semidefinit. Aufgrund der Symmetrie und der Definitheitseigenschaften können die Matrizen K und J simultan diagonalisiert werden, siehe [1]:

$$V^T K V = \Lambda; \quad V^T J V = I_N$$

Hierbei enthält die Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$ die positiven verallgemeinerten Eigenwerte $\omega_1^2, \dots, \omega_N^2$ und I_N bezeichnet die N -dimensionale Einheitsmatrix. Die Substitution $\phi = Vx$ in Gleichung (2), führt nun auf folgendes strukturell vereinfachte System:

$$\ddot{x} + \Lambda x = V^T B u; \quad y = C V x \quad (3)$$

Die in der partiellen Dgl. (1) vernachlässigte Dämpfung wird nun durch die Einführung modaler Dämpfungen approximiert. Mit positiv definiter diagonalen Dämpfungsmatrix $\Delta = \text{diag}(d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ergibt sich somit aus (3):

$$\ddot{x} + \Delta \dot{x} + \Lambda x = V^T B u; \quad y = C V x \quad (4)$$

Durch die Substitution $z = (x \dot{x})^T$ wird die Gleichung (4) in ein Standardkontrollsystem erster Ordnung überführt:

$$\dot{z} = A z + B u; \quad y = C z + D u, \quad (5)$$

wobei:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -\Lambda & -\Delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N} & B &= \begin{pmatrix} 0 \\ V^T B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times m} \\ C &= (C V \quad 0) \in \mathbb{R}^{p \times 2N} & D &= (0) \in \mathbb{R}^{p \times m} \end{aligned}$$

Im Verlauf des Projektes hat sich gezeigt, daß die Frage der Performance–Robustheit aufgrund unsicherer Modelldaten, verursacht durch fehlende Dämpfungsinformation, nicht modellierte Aspekte, sowie FE–Diskretisierungsfehler eine große Rolle beim Beobachterentwurf spielt. Die Behandlung entsprechender Robustheitsanforderungen bietet sich besonders im H_∞ –Kontext an, daher betrachten wir folgende Funktionenräume:

$$\begin{aligned} L_\infty &= \{ F : i\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{p \times m}, \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|F(i\omega)\|_2 < \infty \} \\ H_\infty &= \{ F : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^{p \times m}, F \text{ analytical}, \sup_{s \in \mathbb{C}^+} \|F(s)\|_2 < \infty \} \end{aligned}$$

Der uns speziell interessierende Teilraum aller echt rationalen Funktionen aus H_∞ wird mit RH_∞ bezeichnet. Insbesondere gilt für alle $F \in RH_\infty$:

$$\|F\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(i\omega)),$$

wobei $\bar{\sigma}$ der maximale Singulärwert einer Matrix ist.

Die Eigenwerte der Systemmatrix A aus (5) sind gegeben durch:

$$\lambda_{1,2}^i(A) = 0.5(-d_i \pm (d_i^2 - 4\omega_i^2)^{\frac{1}{2}}), \quad \forall i \in \underline{N}$$

Somit ist A stabil, da nach Voraussetzung $d_i > 0, \forall i \in \underline{N}$ und es gilt somit insbesondere für die Übertragungsfunktion des Turbosatzmodells (5), daß :

$$G(s) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = C(sI_{2n} - A)^{-1} B \in RH_\infty.$$

Basierend auf dieser modalen Sstemdarstellung konnte unter der Voraussetzung, daß $2\omega_i \geq d_i, \forall i \in \underline{N}$, die folgende Abschätzung gefunden werden:

$$\|G(s)\|_\infty \leq \sum_{i=1}^N \|C_i\|_2 \|B_{N+i}\|_2 \left(d_i \sqrt{\omega_i^2 - 0.25d_i^2} \right)^{-1} \quad (6)$$

Hierbei bezeichnen $C^i \in \mathbb{R}^p$ die i -te Spalte und $B_i \in \mathbb{R}^m$ die i -te Zeile der Matrizen C beziehungsweise B .

1.3 Modellfehler

Das Erstellen des reduzierten Turbosatzmodells wird im wesentlichen von drei Fehlerquellen beeinflusst. Dies ist erstens der Diskretisierungsfehler der durch den FE–Ansatz verursacht wird. Zweitens stellt die Annahme einer modalen Dämpfungsstruktur, das heißt die Vernachlässigung der direkten Kopplung zwischen den verschiedenen Eigenformen eine wesentliche Vereinfachung der Realität dar. Da die Eigenvektormatrix V für das ungedämpfte System bestimmt wird, ist demnach mit Parameterfehlern in allen drei transformierten Systemmatrizen A , B und C zu rechnen, siehe [2]. Der letzte Modellierungsfehler schließlich wird durch die, aufgrund der geforderten Online–Simulationsfähigkeit des zu entwerfenden Filters notwendigen, Modellreduktion selbst verursacht.

Um die Auswirkungen dieser Fehler auf das Systemverhalten systematisch untersuchen zu können wurde die nachfolgend beschriebene Fehlermodellierung durchgeführt. Insbesondere sollte nach Vorgabe gewisser Störungsklassen eine einheitliche Charakterisierung aller in bezug auf das Nominalmodell G gestörten Systeme erhalten werden. Da basierend auf dem reduzierten Modell ein robuster H_∞ –Beobachter entworfen werden soll, wurde die Fehlermodellierung im Frequenzbereich durchgeführt.

1.3.1 Modellierung von Parameterfehlern

Die Darstellung der Parameterfehler wird hier aus Platzgründen auf die Störung der Diagonaleinträge von Λ und Δ in der Systemmatrix A beschränkt. In ähnlicher Weise können aber auch Störungen der Matrizen B und C , beziehungsweise nichtproportionale Dämpfungseinträge dargestellt werden. Wir betrachten also die folgende Störungsklasse und die damit verknüpfte Menge der gestörten Systemmatrizen:

$$\begin{aligned}\Delta A &:= \{ \Delta A(\sigma, \nu) : (\sigma, \nu) \in I_1 \times I_2 \} \\ \mathcal{A} &:= \{ A + \Delta A(\sigma, \nu) : (\sigma, \nu) \in I_1 \times I_2 \}\end{aligned}$$

mit:

$$I_j := [a_1^j, b_1^j] \times \cdots \times [a_N^j, b_N^j]; \quad j = 1, 2$$

und:

$$\Delta A(\sigma, \nu) := \begin{pmatrix} 0_{N \times N} & 0_{N \times N} \\ \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_N) & \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$$

Die Forderung der Stabilität aller Matrizen $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ legt in einfacher Weise Schranken für die linken Intervallgrenzen der Parameterbereiche $I_{1,2}$ fest.

Die Fehlerbeschreibung muß nun in den Frequenzbereich übertragen werden. Seien hierzu:

$$\hat{B} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_N & I_N \end{pmatrix}, \quad \hat{C} := I_{2N \times 2N}, \quad \Delta(\sigma, \nu) := \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_N, \nu_1, \dots, \nu_N)$$

Dann besitzt jede Übertragungsfunktion $G_{\tilde{A}}$ aus der Menge $\mathcal{G} := \{G_{\tilde{A}}(s) : \tilde{A} \in \mathcal{A}\}$ eine Darstellung als additiv gestörtes Nominalsystem, nämlich:

$$\begin{aligned} G_{\tilde{A}} &= G + H_{21} \Delta(\sigma, \nu) (I - H_{11} \Delta(\sigma, \nu))^{-1} H_{12} \\ &= \mathcal{F}_U\left(\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & G \end{pmatrix}, \Delta(\sigma, \nu)\right) \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{F}_U(\cdot, \cdot)$ die aus dem H_∞ -Kontext bekannte *Upper Linear Fractional Transformation* und die Übertragungsfunktionen H_{11} , H_{12} und H_{21} sind gegeben durch:

$$H_{11}(s) = \hat{C}(sI - A)^{-1} \hat{B} \quad ; \quad H_{12}(s) = \hat{C}(sI - A)^{-1} B \quad ; \quad H_{21}(s) = C(sI - A)^{-1} \hat{B}$$

Wie bereits erwähnt, läßt sich dieser Ansatz zur Modellierung von Parameterfehlern im Frequenzbereich auf beliebige Störungen der Systemmatrizen A , B und C ausdehnen, siehe [11].

1.3.2 Additives Störungsmodell

Die hochfrequenten Diskretisierungsfehler $u(s) \in \Delta_D$ und die Modellreduktionsfehler $r(s) \in \Delta_R$ werden als additive Störungen des Nominalmodells G bzw. des reduzierten Nominalmodells G_R modelliert. Hierbei sind mit geeignet gewählten Konstanten $\Theta_1, \dots, \Theta_4 \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \Delta_D &:= \{u \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} : u \in RH_\infty; \bar{\sigma}(u)(i\omega) \leq \Theta_1 \text{ für } |\omega| \leq \Theta_2; \|u\|_\infty \leq \Theta_3\} \\ \Delta_R &:= \{r \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} : r \in RH_\infty; \|r\|_\infty \leq \Theta_4\} \end{aligned}$$

Ausgehend vom reduzierten Nominalmodell G_R ergibt sich demnach für die gestörten Modelle die folgende Darstellung:

$$G(u, r, \Delta(\sigma, \omega)) = G_R + u + r + H_{21} \Delta(\sigma, \omega) (I - H_{11} \Delta(\sigma, \omega))^{-1} H_{12}$$

Mit der generalisierten Systemmatrix:

$$G_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & H_{11} & 0 & H_{12} \\ 0 & 0 & 0 & I_m \\ I_p & H_{21} & I_p & G_R \end{pmatrix}$$

ist dies äquivalent zur Darstellung:

$$G(u, r, \Delta(\sigma, \omega)) = \mathcal{F}_U(G_F, \text{diag}(u, \Delta(\sigma, \omega), r))$$

Die Gesamtheit aller Übertragungsfunktionen, die durch die beschriebenen Störungen aus dem reduzierten Nominalmodell G_R hervorgehen, ist somit gegeben durch:

$$\mathcal{U} = \{ \mathcal{F}_U(G_F, \text{diag}(u, \Delta(\sigma, \omega), r)) : u \in \Delta_D; (\sigma, \omega) \in I_1 \times I_2; r \in \Delta_R \}$$

2 Modellreduktion

Das Zustandsraummodell (5) ist im allgemeinen zu groß (typische Dimension: $N = 250$), um damit Online-Rechnungen durchzuführen. Im Hinblick auf die notwendige Modellreduktion wurden verschiedene Verfahren untersucht.

2.1 Modales Abschneiden

Hier wird das System zunächst als Oszillator betrachtet und man entfernt alle Eigenschwingungen über einer vorgegebenen Grenzfrequenz, bzw. ersetzt diese Schwingungen durch solche mit unendlich großer Frequenz. Zur Illustration dieses Vorgehens betrachten wir folgende stabile Übertragungsfunktion mit spezieller Realisierung:

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right] = D + C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + C_2(sI - A_2)^{-1}B_2$$

Dabei sei angenommen, daß alle Eigenwerte der Matrix A_2 sehr groß im Vergleich zur Bandbreite der zu erwartenden Eingangssignale u sind, so daß im relevanten Frequenzbereich gilt: $sI - A_2 \approx -A_2$. Wir betrachten nun folgende Approximation für G :

$$G(s) \approx \hat{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D - C_2A_2^{-1}B_2 \end{array} \right]$$

Die Übertragungsfunktion \hat{G} ist offensichtlich stabil und für die Übertragungsfunktion \tilde{G} des Fehlersystem ergibt sich:

$$\tilde{G} := G - \hat{G} = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & C_2A_2^{-1}B_2 \end{array} \right]$$

Im allgemeinen besteht hier der Nachteil, daß keine obere Schranke für die H_∞ -Norm des Fehlersystems in Abhängigkeit vom Mc Millan-Grad der approximierenden Übertragungsfunktion existiert. Außerdem fließen bei der Reduktion lediglich Frequenzinformationen ein, die eigentlichen Input-Output-Eigenschaften des Systems bleiben unberücksichtigt.

Für das Turbosatzmodell läßt sich die modale Modellreduktion einfach durch das Ordnen der Diagonaleinträge von Λ und entsprechendes Partitionieren der Matrizen in (5) realisieren. Eine Fehlerabschätzung in der H_∞ -Norm ist hier gegeben durch (6).

2.2 Frequenzgewichtete balanzierte Modellreduktion

Die Methode der balanzierten Modellreduktion reduziert das Ausgangsmodell um solche Eigenformen die nur schwach beobachtbar und steuerbar sind, also für das Verhalten der Übertragungsfunktion nur eine geringe Rolle spielen. Ein großer Vorteil der balanzierten gegenüber der modalen Modellreduktion besteht darin, daß eine a priori-Abschätzung des Approximationsfehlers in Abhängigkeit der Hankelsingulärwerte der Übertragungsfunktion existiert [3]. Die balanzierte Modellreduktion läßt sich überdies numerisch stabil durchführen [8].

Die frequenzgewichtete Version dieser Methode erlaubt eine zusätzliche Gewichtung im Frequenzspektrum der Eingangs- und Ausgangssignale und bietet dem Anwender damit die Möglichkeit, Informationen über den Arbeitsbereich des Systems mit in die Modellreduktion einzubringen.

Sei $W(s)$ eine strikt echtrationale Ausgangsgewichtsfunktion und M_r die Klasse der reell-rationalen Übertragungsfunktionen vom Mc Millan-Grad r . Wir betrachten das folgende frequenzgewichtete Modellreduktionsproblem:

$$\min_{G_r} \|W(G - G_r)\|_\infty \quad , \quad G_r \in M_r \quad (7)$$

Dieses frequenzgewichtete Problem wird nun in ein entsprechendes ungewichtetes Modellreduktionsproblem transformiert und letzteres durch balanzierte Modellreduktion gelöst. Rücktransformation dieser Lösung und der zugehörigen Fehlerabschätzung liefert dann eine Lösung für (7) einschließlich einer entsprechender L_∞ -Fehlerschranke.

Wir betrachten hierzu:

$$W(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_\omega & B_\omega \\ \hline C_\omega & 0 \end{array} \right] \quad \text{und} \quad G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

Die Spektren von A und A_ω seien disjunkt, B_ω sei regulär, C_ω besitze vollen Zeilenrang und die Matrix P sei die Lösung der Lyapunov-Gleichung:

$$A_\omega P - P A + B_\omega C = 0$$

Die Matrix P induziert eine Übertragungsfunktion $G_1(s)$, zu der eine balanzierte Approximation r -ter Ordnung $\hat{G}_1(s)$ berechnet wird.

$$G_1(s) := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C_\omega P & 0 \end{array} \right] \quad , \quad \hat{G}_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_1 \end{array} \right]$$

Für das System:

$$G_r := \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hline B_\omega^{-1}(X\hat{A}_1 - A_\omega X) & B_\omega^{-1}(-PB + X\hat{B}_1) + D \end{array} \right]$$

wobei $X := C_\omega^* (C_\omega C_\omega^*)^{-1} \hat{C}_1$ gilt dann die Fehlerabschätzung [13]:

$$\|W(G - G_r)\|_\infty \leq 2 \|G_1 - \hat{G}_1\|_\infty$$

Für das Turbosatzmodell werden keine Ausgangs- sondern Eingangsgewichte verwendet, was aber durch Betrachten des adjungierten Systems auf die oben beschriebene Vorgehensweise zurückgeführt werden kann. Zu weiteren Einzelheiten bezüglich der Modellbildung und Modellreduktion siehe auch [6] und [10].

2.3 Simulationen

Für die Modellreduktion eines Turbosatzmodells bietet sich nun die Kombination der beiden beschriebenen Verfahren an. Zunächst wird das hochdimensionale Modell ($N =$

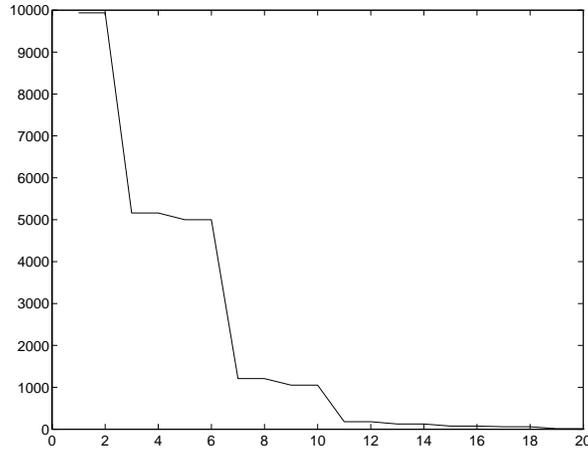


Abbildung 2: Hankelsingulärwerte

436) durch modales Abschneiden auf ca. 40 kleinste Eigenschwingungen reduziert. Als Frequenzgewichte zur Modellierung der Dampf- und Generator Momente in (7) werden dann antistabile Tiefpaßfilter 1. Ordnung verwendet.

Dem Verlauf der 20 größten Hankelsingulärwerte dieses reduzierten Modells in Abbildung 2 zufolge, sollten 14 Zustände ausreichen, um das ursprüngliche Turbosatzmodell im interessierenden Frequenzbereich ausreichend gut zu approximieren. Dies wird durch die Simulation in Abbildung 3 bestätigt. Konkret werden hier die aus einer typischen Störfallsimulation resultierenden Torsionsmomentverläufe einmal für das komplette Modell $G(-)$, sowie zwei reduzierte Modelle $G_{14}(-)$ und $G_6(\dots)$ berechnet und gegeneinander aufgetragen. Die beiden Plots auf der rechten Seite zeigen die entsprechenden Fehler $(G - G_{14})(-)$ und $(G - G_6)(\dots)$. Während das Modell G_{14} sehr gut mit dem Ursprungsmodell übereinstimmt, zeigt sich, daß das Modell G_6 eindeutig zu klein ist, um der Dynamik in allen Wellenkupplungen vernünftig folgen zu können.

2.4 Ein Identifikationsverfahren zur Modellreduktion

Modellreduktionsverfahren wie das oben beschriebene modale Abschneiden oder die frequenzgewichtete balanzierte Reduktion basieren beide auf geeigneten Zustandsraumtransformationen gefolgt von einem Abschneiden der transformierten Zustandsraumbeschreibung. Der Nachteil hierbei besteht darin, daß keine direkte physikalische Interpretation des reduzierten Modells in den ursprünglichen physikalischen Systemparameter mehr besteht.

Die nachfolgend beschriebene Methode garantiert diese Interpretierbarkeit, indem explizit eine reduzierte Trägheits- bzw. Steifigkeitsmatrix identifiziert wird, so daß man ein System der Form

$$\hat{J}\ddot{\Phi} + \hat{K}\Phi = \hat{B}u; \quad \hat{y} = \hat{C}\Phi \quad (8)$$

erhält. Das Kriterium zur Identifikation von $\hat{J}, \hat{K} \in R^{n \times n}$ ist hierbei die möglichst gute Approximation der n kleinsten Eigenfrequenzen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und der zugehörigen Eigenformen v_1, \dots, v_n aus (2) durch die entsprechenden Größen von (8). Da die Eigenformen der

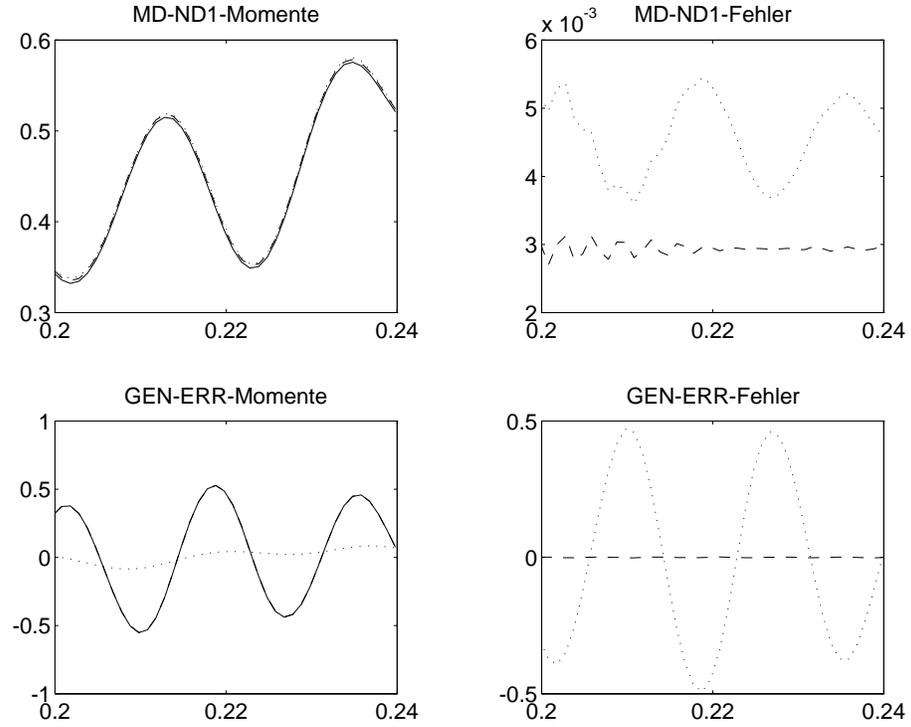


Abbildung 3: Modellreduktion

beiden Systeme verschiedene Dimensionen besitzen und daher nicht direkt vergleichbar sind, ist zunächst eine geeignete Projektionsabbildung $P : R^N \rightarrow R^n$ zu bestimmen.

Mit $I = \{ j : j = (j_1, \dots, j_n) ; 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq N \}$ beschränken wir die Suche auf Projektionen der Form:

$$\begin{aligned}
 P_j : R^N &\rightarrow R^n \\
 v &\rightarrow (v_{j_1}, \dots, v_{j_n})^T, \quad j = (j_1, \dots, j_n) \in I
 \end{aligned}$$

und benutzen zur Auswahl folgendes Optimierungskriterium:

$$\min_{j \in I} \sum_{i=1}^n \|I_j P_j v_i - v_i\|_2 \quad (9)$$

Hierbei sei $I_j : R^n \rightarrow R^N$ der zu P_j entsprechende lineare Interpolationsoperator ist. Im allgemeinen ist der Indexvektor j_0 , der aus den Extrema der n -ten Eigenform v_n besteht, ein guter Startwert für die Lösung des Optimierungsproblems.

Basierend auf dem optimalen Projektionsoperator \hat{P} und nach Vorgabe der gewünschten Struktur von \hat{J} und \hat{K} lässt sich dann mittels der n Gleichungssysteme

$$\hat{J} P_j v_i = \lambda_i \hat{K} P_j v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein lineares Ausgleichsproblem für die Einträge von \hat{J} und \hat{K} formulieren. Das numerische Lösen dieses Ausgleichsproblems durch Berechnen einer QR -Zerlegung oder durch ein iteratives Verfahren liefert dann das gesuchte reduzierte System (8).

2.5 Simulationen

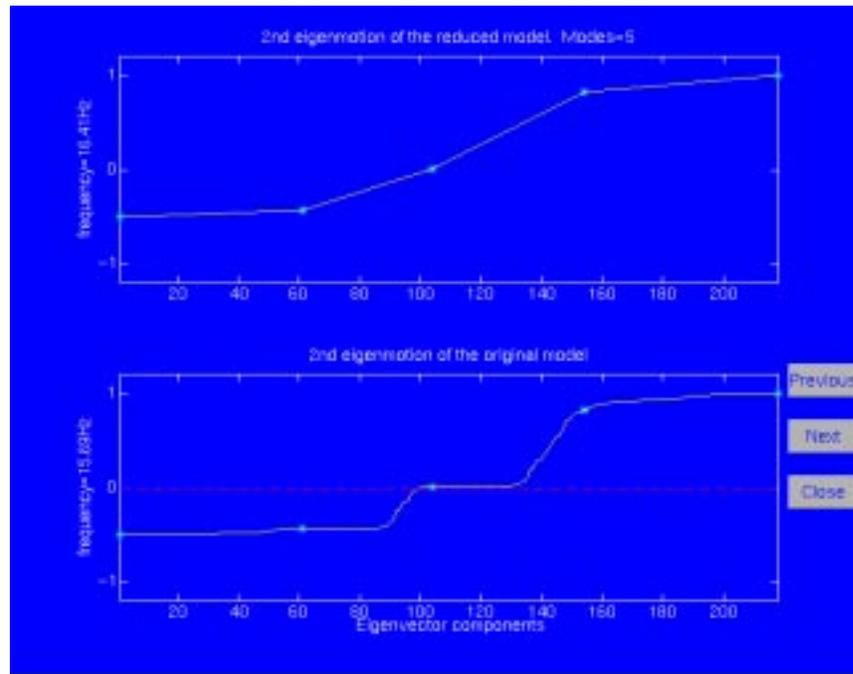


Abbildung 4: Vergleich der Eigenformen

Abbildung 4 zeigt den Vergleich sich entsprechender Eigenformen eines 218-dimensionalen und eines 5-dimensionalen Modells. Die Abbildung zeigt einen Screenshot des im Projekt entwickelten Software-Tools.

3 Sensorplazierung

Als Eingangsgrößen für den noch zu entwerfenden Beobachter stehen neben dem Verlauf des elektrischen Momentes, auch der Torsionsmomenteverlauf an einer optimal zu bestimmenden Stelle des Wellenstranges zur Verfügung. Aufgrund baulicher Gegebenheiten des Turbosatzes sind allerdings nur wenige Stellen des Wellenstranges frei zugänglich und die Auswahl der optimalen Sensorpositionierung reduziert sich daher auf die Wellenkuppelungen. Hier ist nun diejenige Kupplungsstelle auszuwählen, die im Sinne des Beobachterentwurfs den größten Informationsgehalt besitzt. Zur Lösung dieses Problems wurden verschiedene Strategien untersucht. Wir betrachten zunächst ein Verfahren das auf der Hautus-Beobachtbarkeitsbedingung beruht.

3.1 Beobachtbarkeitsansatz

Es seien im Folgenden $C^1, \dots, C^p \in R^{1 \times 2n}$ die Meßmatrizen die, bezogen auf die Systemdarstellung (2), durch Positionieren eines Torsionsmomentesensors an der 1. bis p -ten

Wellenkupplung gegeben sind. Für alle Eigenschwingungen v_1, \dots, v_N des Turbosatzes werden nun die modalen Meßbarkeiten bezüglich der Matrizen C^i bestimmt.

$$\mu_j^i = \frac{|C^i v_j|}{\|C^i\| \|v_j\|}, \quad \forall j \in \underline{N}, \quad i \in \underline{p}$$

Zusätzlich werden die Parameter $\alpha_1, \dots, \alpha_N > 0$ eingeführt, die eine Frequenzgewichtung hinsichtlich des Übertragungsverhaltens des Turbosatzmodelles reflektieren. Die gewichtete Meßbarkeit der i -ten Sensorposition berechnet sich dann zu:

$$\mu^i = \prod_{j=1}^N \mu_j^i, \quad \forall i \in \underline{p}$$

Ausgewählt wird nun der Sensor mit maximaler zugehöriger totaler Meßbarkeit μ^i . Der Nachteil dieses Ansatzes besteht darin, daß die Nullstellen der Übertragungsfunktion nicht bei der Sensorpositionierung mit berücksichtigt werden, d. h. unter Umständen besitzen solche Parameter μ_j^i ein großes Gewicht bei der Sensorplatzierung, bei denen die dazugehörige Eigenschwingung gar nicht angeregt wird. Diese Unzulänglichkeit ist bei dem folgenden, von uns hergeleiteten Ansatz, nicht mehr gegeben.

3.2 H_∞ -Ansatz

Ausgehend von der Abschätzung (6) betrachten wir die folgende Ungleichung:

$$\|G(s)\|_\infty \leq \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^N \underbrace{|C_{ji}| \|B_i\|_2}_{l_{ij}} \left(d_i \sqrt{\omega_i^2 - 0.25d_i^2} \right)^{-1} \quad (10)$$

Interpretiert man in dieser Abschätzung die Zeilen der Matrix C als Realisierung des Sensoroutputs an den verschiedenen Wellenkupplungen, so erklärt der j -te Sensor gerade den Anteil

$$\hat{l}_j = \sum_{i=1}^N l_{ij}$$

an der gesamten H_∞ -Norm des Systems. Die Sensorplatzierungsstrategie besteht nun darin, den Sensor mit maximalem Energiebeitrag \hat{l}_j auszuwählen. Für den optimalen Sensor sollte zudem garantiert werden, daß alle Systemeigenformen einen minimalen Energiebeitrag liefern, i.e. es sollte gelten:

$$|C_{opt i}| > \epsilon, \quad \forall i \in \underline{N}$$

Gegenüber der oben beschriebenen Methode besitzt dieser Ansatz den Vorteil, daß die Information bezüglich der Anregung der verschiedenen Eigenformen mit in die Sensorauswahl einfließt. Das Hinzufügen geeigneter Parameter $\alpha_1, \dots, \alpha_N > 0$ in die Summendarstellung (10), stellt auch bei diesem Ansatz eine einfache Möglichkeit zur Frequenzgewichtung dar.

4 Beobachterentwurf

Im Sinne des robusten Beobachterentwurfs wurden der Standard H_∞ -Ansatz, das Kalman-Filter Design und insbesondere die μ -Synthese, sowie ein Verfahren von Souza [9] untersucht. Aus Platzgründen wird hier nur auf die beiden letzten Verfahren eingegangen, wobei insbesondere das Verfahren von Souza letztlich zu einem guten robusten Beobachterdesign geführt hat.

4.1 μ -Synthese

Das in Abschnitt 1.2.3 hergeleitete additive Störungsmodell besitzt die folgende Frequenzbereichs-Darstellung:

$$G(u, r, \Delta(\sigma, \omega)) = G_R + u + r + H_{21} \Delta(\sigma, \omega) (I - H_{11} \Delta(\sigma, \omega))^{-1} H_{12} \quad (11)$$

Hierbei sind G_R das reduzierte Nominalmodell, $u \in \Delta_D$ der Diskretisierungsfehler des zugrundeliegenden FE-Modells, sowie $r \in \Delta_R$ der Modellreduktionsfehler mit geeignet gewählten Störungsklassen Δ_D und Δ_R . Die Modellierung der Parameterfehler wird durch den Term $(H_{21} \Delta(\sigma, \omega) (I - H_{11} \Delta(\sigma, \omega))^{-1} H_{12})$ geleistet, wobei die Übertragungsfunktionen H_{11}, H_{12} und H_{21} aus geeigneten Strukturmatrizen gebildet werden. Modelliert werden Dämpfungs- und Frequenzfehler, die wohl die relevantesten Systemunsicherheiten des Turbosatzmodells darstellen. Insbesondere enthält die Diagonalmatrix $\Delta(\sigma, \omega)$ die Dämpfungsstörungen ω_i und die Frequenzstörungen σ_i , die alle auf jeweils ein Intervall beschränkt sind.

Das übliche Vorgehen beim H_∞ -Entwurf bzw. der μ -Synthese [11] besteht in der Darstellung des Systems in LFT-Form, i.e. dem „Herausziehen“ des Unsicherheitsblocks. Für das Störungsmodell (11) ergibt sich hierbei:

$$G(u, r, \Delta(\sigma, \omega)) = \mathcal{F}_U(G_F, \Delta)$$

wobei:

$$G_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & I_m \\ 0 & H_{11} & 0 & \vdots & H_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & I_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_p & H_{21} & I_p & \vdots & G_R \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta = \begin{pmatrix} u & & \\ & \Delta(\sigma, \omega) & \\ & & r \end{pmatrix}$$

Seien jetzt weiter C_B und D_B diejenigen Teilmatrizen von C bzw. D , die bei der Sensorpositionierung ausgewählt wurden und den Beobachterinput generieren. Die Übertragungsfunktion des Beobachtereingangssignals ist somit gegeben durch:

$$G_R^B(s) := C_B (sI - A)^{-1} B + D_B$$

Das robuste Beobachterdesign wird anhand des Fehlersystems aus Systemoutput von $G(u, r, \Delta(\sigma, \omega))$ und dem Output eines Beobachters F durchgeführt. Das Fehlersystem ist hierbei gegeben durch:

$$E(u, r, \Delta(\sigma, \omega), F) = G(u, r, \Delta(\sigma, \omega)) - F G_R^B = \mathcal{F}_L(\mathcal{F}_U(G_E, \Delta), F)$$

wobei:

$$G_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & I_m & \vdots & 0 \\ 0 & H_{11} & 0 & \vdots & H_{12} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & I_m & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_p & H_{21} & I_p & \vdots & G_R & \vdots & -I_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & G_R^B & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der starken Strukturiertheit des Δ -Blocks folgt, daß ein unskaliertes H_∞ -Beobachterdesign sehr konservativ sein wird, da dabei der Unsicherheitsblock als unstrukturiert angenommen wird. Es bietet sich daher die sogenannte μ -Synthese an, bei der die Struktur der Modellunsicherheit durch geeignet gewählte Skalierungsmatrizen $D(s) \in RH_\infty$ approximiert wird. Letztlich ist die μ -Synthese die wechselseitige Abfolge der Lösung von Skalierungs- bzw. H_∞ -Problemen (D-K-Iteration), wobei folgendes Optimierungsproblem möglichst gut gelöst werden soll:

$$\min_F \inf_{D, D^{-1} \in RH_\infty} \| D\mathcal{F}_L(G_E, F)D^{-1} \|_\infty \quad (12)$$

Die praktische Durchführung dieses Beobachterdesigns wurde mittels einer entsprechenden Routine aus der Robust Control Toolbox von Matlab durchgeführt. Für kleine Testbeispiele wurden hierbei akzeptable Beobachter berechnet, jedoch stieß man mit wachsender Dimension von G_R und der damit verbundenen Zahl von Parameterstörungen jedoch schnell an Praktikabilitätsgrenzen. Ein zentrales Problem besteht darin, daß eine wachsende Ordnung der Skalierungsfunktionen $D(s)$ auch direkt zu einer wachsenden Ordnung des resultierenden Beobachters führt.

4.2 Approximation von Riccati-Lösungen

Ein zentrales Problem bei der Auslegung von H_∞ -Filtern besteht in der Berechnung der positiv semidefiniten, stabilisierenden Lösung von algebraischen Riccati-Gleichungen, die typischerweise von folgender Gestalt sind:

$$AY + YA^T - Y(\tilde{R} - \gamma^{-2}R)Y + Q = 0 \quad (13)$$

Im Falle des Turbosatzmodells ist hierbei die Systemmatrix A , wie in Abschnitt 1.1.2 beschrieben, in einfacher modaler Form darstellbar. Die Designmatrix Q , die Informationen über externe Systemstörungen repräsentiert, wird aufgrund mangelnder detaillierterer Kenntnisse meist diagonal gewählt. Da die Lösung von AREs insbesondere für höherdimensionale Systeme numerische Probleme bereitet, wurde untersucht inwieweit unter Berücksichtigung der speziellen Struktur von A und Q analytische Lösungen für (13) angebar sind. Es zeigte sich, daß unter der Annahme der Diagonalität von R bzw. \tilde{R} notwendige und hinreichende Existenzbedingungen für eine stabilisierende Lösung angebar sind. Außerdem ist diese Lösung explizit berechenbar. Insbesondere ist somit auch die minimale H_∞ -Fehlerschranke γ_{opt} für das zugehörige Filterproblem explizit angebar.

Im nichtdiagonalen Fall zeigen numerische Simulationen, daß die stabilisierende Lösung von

$$AY + YA^T + Y(\gamma^{-2}R_D - \tilde{R}_D)Y + Q_D = 0 \quad (14)$$

wobei:

$$R_D := \text{diag}(R) \qquad \tilde{R}_D := \text{diag}(\tilde{R})$$

der exakten Lösung von (13) sehr nahe kommt. Insbesondere liefert auch der aus (14) resultierende Wert $\tilde{\gamma}_{opt}$, für den gerade noch eine stabilisierende Riccati-Lösung existiert, einen guten Startwert für die γ -Iteration zur Bestimmung der optimalen, exakten Lösung des H_∞ -Filterproblems. Fehlerbetrachtungen zwischen exakter und approximierter Riccati-Lösung lassen sich wegen der Komplexität der Riccati-Gleichung nur in Form von Sensitivitätsabschätzungen für kleine Störungen durchführen [4].

Basierend auf der Ähnlichkeit der Lösungen von (13) bzw. (14) wurde ein Iterationsverfahren entwickelt, welches ausgehend von dem analytisch bestimmten, stabilen Eigenraum der zu (14) zugehörigen Hamilton-Matrix den stabilen Eigenraum der exakten Hamilton-Matrix von (13) mittels Inverser Wielandt-Iteration berechnet. Basierend auf einem Splitting der iterierten Vektoren und anschließender Inversion läßt sich damit die exakte Riccati-Lösung berechnen. Da diese Lösung jedoch unabhängig von der speziellen Wahl der Basis ist und außerdem die Invertierung für hochdimensionale Systeme Probleme bereitet, ist es günstiger, zunächst mittels QR-Zerlegung eine Orthonormalbasis des stabilen Teilraums zu bestimmen, so daß die anschließende Inversion durch eine simple Transposition ersetzt wird. Numerische Simulationen zeigen, daß dieser Algorithmus auch für hochdimensionale Systeme schon nach wenigen Iterationsschritten gute Resultate liefert.

4.3 Gekoppelte Riccati-Gleichungen

Wie bei der Modellierung von Parameterfehlern in Abschnitt 1.3.1 betrachten wir eine Klasse strukturierter Störungsmatrizen $\Delta A(t)$ für die Systemmatrix A , die Unsicherheiten in den modalen Systemparametern modelliert. Diese Störungen werden in dem hier betrachteten Ansatz von [9] sogar als zeitveränderliche Störungen zugelassen. Wir betrachten:

$$\Delta A(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{N \times N} & 0_{N \times N} \\ \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_N) & \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_N) \end{pmatrix}}_H N(t) \underbrace{\begin{pmatrix} I_{N \times N} & 0_{N \times N} \\ 0_{N \times N} & I_{N \times N} \end{pmatrix}}_E \quad (15)$$

Die Funktion $N(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ bestehe aus lebesgue-meßbaren Matrixelementen, so daß:

$$N^T(t)N(t) \leq I_{2N}, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Aufgrund der nicht notwendigerweise geforderten Diagonalität von $N(\cdot)$, wird bei der späteren Filterauslegung insbesondere auch der Einfluß nichtproportionaler Dämpfung mit berücksichtigt.

Ausgehend von (15) betrachten wir nun für die Systemklasse:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta \mathbf{A}(t))x(t) + Q\nu_1(t); & x(0) &= 0 \\ y(t) &= C_B x(t) + M\nu_2(t) \\ z(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{16}$$

wobei M eine reguläre Matrix und $\nu_1(\cdot), \nu_2(\cdot) \in L_2[0, \infty)$ seien, das nachfolgend beschriebene robuste H_∞ -Filter Problem.

Robustes H_∞ -Filter Problem:

Gegeben sei $\gamma > 0$, bestimme einen kausalen Filter $F(\cdot)$, so daß die Fehlerdynamik resultierend aus Systemausgang und Filterprognosen asymptotisch stabil ist und außerdem

$$\sup_{\nu_1, \nu_2 \in L_2[0, \infty)} \frac{\|z - \hat{z}\|_2}{\|\nu_1\|_2 + \|\nu_2\|_2} < \gamma,$$

für alle erlaubten Störungen $\Delta A(t)$ und $\hat{z} = Fy$ gilt.

Basierend auf einem Resultat aus [9] läßt sich zeigen, daß das robuste Filterproblem lösbar ist, falls zu gegebenem $\gamma > 0$ eine weitere Konstante $\epsilon > 0$ existiert, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1): Es existiert eine stabilisierende Lösung $X_\infty = X_\infty^T \geq 0$ der algebraischen Riccati-Gleichung:

$$A^T X + X A + X (\gamma^{-2} Q Q^T + \epsilon^{-2} H H^T) X + \epsilon^2 E^T E = 0$$

(2): Es existiert eine stabilisierende Lösung $Y_\infty = Y_\infty \geq 0$ der algebraischen Riccati-Gleichung:

$$A Y + Y A^T + Q Q^T + \frac{\gamma^2}{\epsilon^2} H H^T + Y [\gamma^{-2} (C^T C + \epsilon^2 E^T E) - C_B^T (M M^T)^{-1} C_B] Y = 0$$

(3): Das Produkt der beiden Riccati Lösungen erfüllt die folgende Spektralbedingung:

$$(I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty) > 0$$

Falls die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind, so ist ein zulässiger robuster H_∞ -Filter gegeben durch:

$$F(s) = \left(\begin{array}{c|c} A_B & K \\ \hline C & 0 \end{array} \right)$$

wobei:

$$\begin{aligned}K &= (I_{2n} - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty)^{-1} Y_\infty C_B^T (M M^T)^{-1} \\ A_B &= A + (\gamma^{-2} Q Q^T + \epsilon^{-2} H H^T) X_\infty - K C_B\end{aligned}$$

Zur Lösung der algebraischen Riccati Gleichungen in (1) und (2) können die in Abschnitt 1.4.2 beschriebenen Verfahren angewendet werden. Damit erhält man dann auch gleich eine Abschätzung für das Gebiet zulässiger (γ, ϵ) -Paare. Für nähere Einzelheiten, siehe [5].

4.4 Simulationen

Abbildung 5 demonstriert die Performance eines robusten H_∞ -Filters, der gemäß dem Verfahren des letzten Abschnitts berechnet wurde. Simuliert wird der Einfluß von Prozeß- und Meßstörungen, sowie konstanten Dämpfungsfehlern. Ausgangspunkt für das Filterdesign war das 14-dimensionale, mittels der frequenzgewichteten balanzierten Modellreduktion bestimmte, Turbosatzmodell. Die durchgezogene Kurve in Abbildung (5) entspricht dem Torsionsmomenteverlauf, der mittels des originalen 436-dimensionalen Turbosatzmodells berechnet wurde, die gestrichelte Kurve entspricht den Filterprognosen.

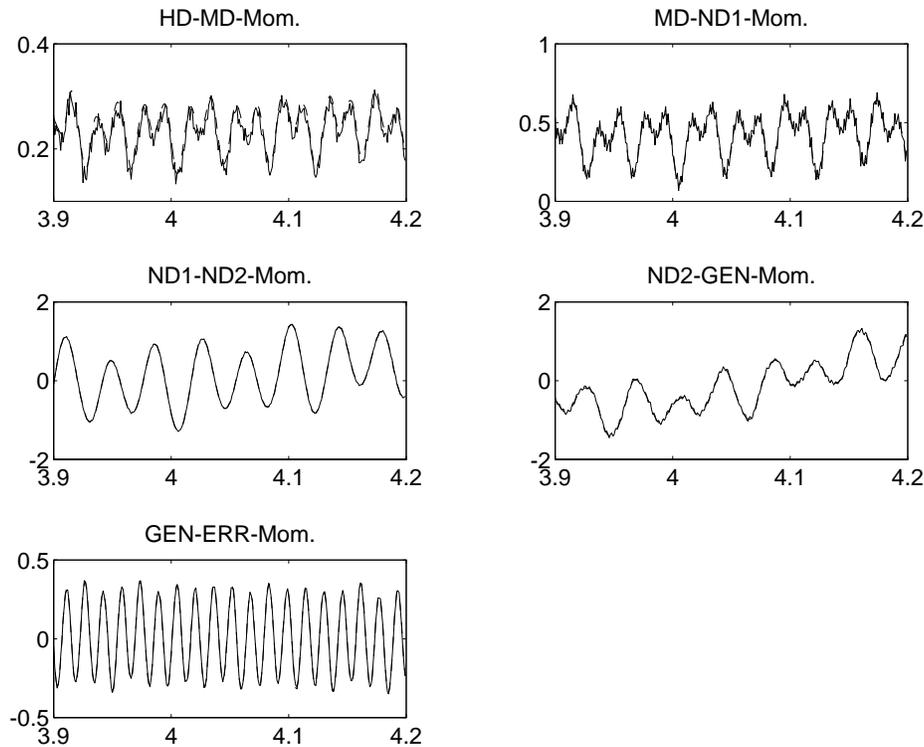


Abbildung 5: Filter Simulation

Offensichtlich besitzt der Filter trotz der vielen Störungseinflüsse eine sehr hohe Prognosegüte.

Literatur

- [1] K. Bathe & E. Wilson; *Numerical Methods in Finite Element Analysis*; Prentice Hall, 1976
- [2] J. Bellos & D. Inmann; *A Survey of Nonproportional Damping*; Shock and Vibration Digest, 21:7–12, 1989

- [3] K. Glover; *All optimal Hankel–norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ error bounds*; Int. J. Control, 39(6):1115–1193, 1984
- [4] C.Kenney & G. Hewer; *The sensitivity of the Algebraic and Differential Riccati Equations* ; SIAM J. Control and Optimization, 28(1):50–69, 1990
- [5] P. Lang; *Iterative Robust Filter Design for Flexible Structures*; Proceedings of ECC 1997
- [6] P. Lang & D. Prätzel–Wolters & S. Kulig; *Modellreduktion und dynamische Beobachter für Torsionsschwingungen in Turbosätzen*; Mathematik–Schlüsseltechnologie für die Zukunft, K.–H. Hoffmann, W. Jäger, T. Lohmann, H. Schunk (Hrsg.), Springer–Verlag, S.491–501, 1997
- [7] K.M. Nagpal & P.P. Khargonekar; *Filtering and Smoothing in an H_∞ Setting*; IEEE Trans. Automatic Control, 36:152–166, 1991
- [8] M. Safonov & R. Chiang; *A Schur Method for Balanced Model Reduction*; Proceedings of Am. Ctrl. Conf., 1036–1040, 1988
- [9] C.E. de Souza & Lihua Xie & Youyi Wang; *H_∞ filtering for a class of uncertain nonlinear systems*; System & Control Letters, 20:419–426, 1993
- [10] U. Thygesen & J. Hoffmann & D. Prätzel–Wolters & S. Kulig; *Observers for a Generator Shaft*; Progress in Industrial Mathematics, H. Neunzert (Hrsg.), Wiley–Teubner, S.543–555, 1996
- [11] K. Zhou with J.C. Doyle & K. Glover; *Robust and Optimal Control*; Prentice Hall, 1996
- [12] K. Zhou & P. Khargonekar & J. Stoustrup & H. Niemann; *Robust Performance of Systems with Structured Uncertainties in State Space*; Automatica, 31:249–256, 1995
- [13] K. Zhou; *Frequency weighted model reduction with \mathcal{L}_∞ error bounds*; System & Control Letters, 21(2):115–125, 1993