H^∞-Kalkül und Dilatationen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik
der Universität Karlsruhe genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Andreas M. Fröhlich
aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Juli 2003
Referent: Prof. Dr. Lutz Weis
Korreferent: HDoz. Dr. Peer Kunstmann

Karlsruhe 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Für gewisse Operatoren und geeignete Funktionenklassen kann man einen *Funktionalkalkül* definieren, also Ausdrücke der Form $f(A)$ erklären. Ein Beispiel hierfür ist der Dunford-Kalkül für beschränkte Operatoren und holomorphe Funktionen [8, Definition VII.3.9], bei dem man

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) R(z, A) \, dz$$

mit einem geeigneten Weg γ setzt, in Analogie zur Cauchyschen Integralformel. Diese Vorgehensweise kann man übernehmen [4, 19], wenn f für $z \to 0$ und für $z \to \infty$ hinreichend stark fällt und A ein (im allgemeinen unbeschränkter) sektorieller Operator ist, wenn also das Spektrum von A im Abschluss eines Sektors

$$\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \mu \}$$

enthalten ist, und die Norm $\|R(z, A)\|$ außerhalb größerer Sektoren geeignet abgeschätzt werden kann. Dieser Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren lässt sich auf eine größere Klasse von Funktionen ausweiten, wobei $f(A)$ dann im Allgemeinen kein beschränkter Operator mehr ist.

Bei der Behandlung vieler Fragen, insbesondere im Zusammenhang mit Differentialgleichungen [7, 14], ist es von Interesse, ob die betrachteten sektoriellen Operatoren einen *beschränkten* H^∞*-Funktionalkalkül* besitzen, d. h. ob $f(A)$ für alle auf einem gewissen Sektor beschränkten und holomorphen Funktionen ein stetiger Operator ist und zudem die Abschätzung $\|f(A)\| \leqslant C\|f\|_\infty$ erfüllt.

Wir werden uns zunächst auf den Fall konzentrieren, dass $-A$ der Erzeuger einer beschränkten analytischen Halbgruppe (T_t) ist und A dichtes Bild besitzt. In einem Hilbertraum H weiß man [18], dass in diesem Falle A genau dann einen beschränkten H^∞-Funktionalkalkül hat, wenn die C_0-Halbgruppe

$(T_t)_{t\geqslant 0}$ ähnlich zu einer Kontraktionshalbgruppe ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $(T_t)_{t\geqslant 0}$ bezüglich einer äquivalenten Hilbertraumnorm eine Kontraktionshalbgruppe ist.

Kontraktionshalbgruppen im Hilbertraum lassen sich durch die Existenz einer *Dilatation* charakterisieren [29]; man sagt, dass $(T_t)_{t\geqslant 0}$ die Dilatation $(U_t)_{t\geqslant 0}$ hat, wenn

- es einen Hilbertraum Y gibt, der H als Unterraum enthält,
- $(U_t)_{t\geqslant 0}$ eine C_0-Halbgruppe von unitären Operatoren $U_t : Y \to Y$ ist
- und die Dilatationsgleichung $PU_t|_H = T_t$ erfüllt ist, wobei P die Orthogonalprojektion auf H bezeichnet.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{U_t} & Y \\ \cup & & \downarrow P \\ H & \xrightarrow{T_t} & H \end{array}$$

Der Grundgedanke dabei ist: In einem größeren (und möglicherweise »komplizierteren«) Raum Y findet man eine C_0-Halbgruppe (U_t), die »bessere« Eigenschaften hat als (T_t), aber nach einer geeigneten Projektion wieder die ursprüngliche Halbgruppe liefert.

Im Hilbertraum kann also die Existenz eines beschränkten H^∞-Funktionalkalküls mittels Dilatationen charakterisiert werden. In der vorliegenden Arbeit werden wir diese Charakterisierung zunächst auf reflexive L^p-Räume und dann auf beliebige Banachräume mit endlichem Kotyp übertragen.

Definiert man den Dilatationsbegriff in Banachräumen analog (Y ist dann ein Banachraum, (U_t) eine C_0-Halbgruppe bijektiver Isometrien und P eine kontrahierende Projektion), so zeigt sich [27, 28], dass jede kontraktive C_0-Halbgruppe eine Dilatation besitzt.

Zu jeder beschränkten C_0-Halbgruppe lässt sich eine äquivalente Norm angeben, bezüglich derer die C_0-Halbgruppe kontraktiv wird. Man kann daher nicht erwarten, dass im Banachraum allein die Existenz einer Dilatation die Existenz eines beschränkten H^∞-Funktionalkalküls garantiert.

Wir werden aber zeigen, dass die Existenz ganz bestimmter Dilatationen charakteristisch für den beschränkten H^∞-Funktionalkalkül ist. Die dabei betrachteten Operatoren (U_t) sind *Verschiebungs-Operatoren* auf geeignet gewählten Räumen Y, und die Einbettung des Banachraums X in Y gelingt mit Hilfe von *Quadratfunktionen*.

Im letzten Kapitel verzichten wir auf die Voraussetzung, dass $-A$ eine Halbgruppe erzeugt. Es zeigt sich, dass für dicht definierte sektorielle Operatoren mit dichtem Bild die Existenz eines beschränkten H^∞-Funktionalkalküls dadurch gekennzeichnet ist, dass A einen *Multiplikationsoperator* als Dilatation hat. Dieses Ergebnis ist selbst für den Hilbertraumfall neu.

Im Einzelnen ist die Arbeit folgendermaßen aufgebaut:

In **Kapitel 1** werden zunächst grundlegende Bezeichnungen und Schreibweisen eingeführt. Dann definieren wir den Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren und geben einige seiner Eigenschaften an. Schließlich präzisieren wir noch den hier verwendeten Dilatationsbegriff.

In **Kapitel 2** widmen wir uns den Hilberträumen. Wir zeigen das schon bekannte Resultat und geben dabei die Dilatation konkret an: In $Y = L^2(\mathbb{R}, H)$ ist U_t durch $U_t f := f(\cdot + t)$ gegeben. Die Einbettung von H in Y gelingt, weil im Hilbertraum die Existenz eines beschränkten H^∞-Funktionalkalküls äquivalent dazu ist [19], dass A und A^* quadratischen Abschätzungen der Form

$$\left(\int_0^\infty \|\psi(tA)x\|^2 \,\frac{dt}{t}\right)^{1/2} \leqslant Q\|x\| \qquad \text{für alle } x \in H$$

genügen. Wir betrachten speziell $\psi(z) = z^{1/2}e^{-z}$ und orientieren uns bei den weiteren Verallgemeinerungen an dieser Vorgehensweise.

Nach den Hilberträumen betrachten wir in **Kapitel 3** reflexive L^p-Räume und erhalten auch hier eine Dilatationscharakterisierung des beschränkten H^∞-Funktionalkalküls. Entscheidend ist dabei, dass sich dieser durch Abschätzungen der Form

$$\left\|\left(\int_0^\infty |\psi(tA)x(\cdot)|^2 \,\frac{dt}{t}\right)^{1/2}\right\|_{L^p} \leqslant Q\|x\|_{L^p} \qquad \text{für alle } x \in L^p\,,$$

so genannte Quadrat-Funktionen-Abschätzungen, charakterisieren lässt. Zu $X = L^p(\Omega)$ wählen wir $Y = L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}))$ und $(U_t f)(\omega) := f(\cdot + t, \omega)$.

Im Gegensatz zum Hilbertraumfall erhalten wir für die L^p-Räume keine Äquivalenz als Charakterisierung des beschränkten H^∞-Funktionalkalküls; dies hängt damit zusammen, dass in L^p der betrachtete Sektor von Bedeutung ist. In **Kapitel 4** begegnen wir diesem Problem mit der zusätzlichen Voraussetzung der R-Sektorialität, welche die Abhängigkeit vom Sektor beseitigt. Eine allgemeinere Aussage dieser Art findet man in [14].

Um beliebige Banachräume betrachten zu können, brauchen wir eine Verallgemeinerung der im Hilbertraum und in L^p verwendeten Quadratfunktionen; diese Verallgemeinerung wurde von Kalton und Weis [15] gefunden. In **Kapitel 5** werden Definitionen und wichtige Ergebnisse aus dieser Arbeit zusammengefasst. Man betrachtet lineare Operatoren $u : H \to X$, für die

$$\|u\|_\ell := \sup\left\{ \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{n=1}^{m} g_n u(e_n)\right\|^2\right)^{1/2} \;\middle|\; m \in \mathbb{N},\ (e_n)_{n=1}^m \text{ ist ONS in } H \right\}$$

endlich bleibt, wobei (g_n) eine Folge von unabhängigen, $N(0,1)$-verteilten Zufallsvariablen ist. Im Falle $H = L^2(\Omega)$ können manche dieser Operatoren durch Funktionen $f : \Omega \to X$ dargestellt werden.

Nach diesen Vorbereitungen können wir in **Kapitel 6** die Dilatationscharakterisierung auf Banachräume endlichen Kotyps übertragen, denn in solchen Räumen impliziert der beschränkte H^∞-Funktionalkalkül gemäß [15] die Abschätzung

$$\|t \mapsto A^{1/2}T_t x\|_\ell \leqslant D\|x\|\,.$$

Wir führen in diesem Kapitel auch den so genannten *Mond-Dualoperator* $A^\#$ im *Mond-Dualraum* $X^\#$ ein. Es handelt sich dabei (ähnlich wie beim bekannten Sonnen-Dual) um eine geeignete Einschränkung von A', die dicht definiert ist und dichtes Bild hat.

In **Kapitel 7** geben wir eine andere mögliche Dilatation (N_t) an, deren Erzeuger ein Multiplikationsoperator ist. Indem wir den Dilatationsbegriff auf die Erzeuger ausdehnen, lösen wir uns auch von der Voraussetzung, dass $-A$ eine beschränkte analytische Halbgruppe erzeugt, und betrachten statt dessen beliebige dicht definierte, sektorielle Operatoren mit dichtem Bild. Der beschränkte H^∞-Funktionalkalkül kann dadurch charakterisiert werden, dass A einen bestimmten Multiplikationsoperator als Dilatation hat. Im Hilbertraum ist dies $(Mf)(t) := (it)^\alpha f(t)$, definiert in $L^2(\mathbb{R}, H)$.

1 Beschränkter H^∞-Funktionalkalkül

1.1 Vereinbarungen und Bezeichnungen

Wir werden im Folgenden ausnahmslos *komplexe* Banach- und Hilberträume betrachten, also solche mit Skalarkörper $\mathbb{C}$, und wir nehmen stets an, dass diese Räume nicht nur aus dem Nullvektor bestehen.

Sind X und Y Banachräume, so bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(X, Y)$ die Menge der linearen Operatoren aus X nach Y. Für den Definitionsraum eines Operators $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ schreiben wir $\mathcal{D}(A)$ und für seinen Bildraum $\mathcal{R}(A)$. Abkürzend setzen wir schließlich noch $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$.

Die Menge der abgeschlossenen linearen Operatoren aus X nach Y, also diejenigen Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, deren Graph $G_A := \{ (x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A) \}$ abgeschlossen ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(X, Y)$, und für den Banachraum der stetigen linearen Operatoren von X nach Y, versehen mit der Operatornorm $\|A\| := \sup\{ \|Ax\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1 \}$, verwenden wir die Bezeichnung $\mathcal{B}(X, Y)$. Im Fall $X = Y$ setzen wir wiederum $\mathcal{A}(X) := \mathcal{A}(X, X)$ und $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$.

Der Dualraum von X wird mit X' bezeichnet, d.h. $X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{C})$.

Für das Spektrum eines Operators $A \in \mathcal{L}(X)$ schreiben wir $\sigma(A)$, für die Resolventenmenge $\rho(A)$, und für $\lambda \in \rho(A)$ ist $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$.

Für $\theta \in (0, \pi)$ definieren wir den Sektor $S_\theta := \{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \theta \}$ in der komplexen Zahlenebene. Die Argumentfunktion $z \mapsto \arg z$ soll dabei den Wertebereich $(-\pi, \pi]$ haben.

Es sei $H(S_\theta)$ die Menge aller auf S_θ definierten, komplexwertigen und holomorphen Funktionen und $H^\infty(S_\theta)$ die Menge der beschränkten Funktionen in $H(S_\theta)$. Die Funktionenklasse $\Psi(S_\theta)$ enthalte diejenigen Funktionen aus

$H^\infty(S_\theta)$, bei denen $|f(z)|$ nahe $z = 0$ durch $c|z|^s$ und für z mit hinreichend großem Betrag durch $c/|z|^s$ (mit $s > 0$) abgeschätzt werden kann; es ist also

$$\Psi(S_\theta) := \left\{ \psi \in H(S_\theta) \;\middle|\; \exists\, c, s > 0 \; \forall z \in S_\theta : |\psi(z)| \leqslant c \cdot \min\{|z|^s, |z|^{-s}\} \right\}.$$

1.2 Sektorielle Operatoren

Es sei X ein Banachraum. Wir werden nun eine ganz spezielle Klasse von Operatoren betrachten, die *sektoriellen* Operatoren.

1.2.1 Definition Ein Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ heißt *sektoriell*, wenn ein $\mu \in (0, \pi)$ existiert, für das die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Es gilt $\sigma(A) \subset \overline{S_\mu}$.

(b) Zu jedem $\theta \in (\mu, \pi)$ existiert eine Konstante C_θ mit

$$\|zR(z, A)\| \leqslant C_\theta \qquad \text{für alle } z \notin \overline{S_\theta}\,.$$

Man sagt in diesem Falle, dass A *vom Typ* μ ist. Ist A vom Typ μ für alle $\mu \in (0, \pi)$, so heißt A *vom Typ* 0.

Jeder sektorielle Operator hat definitionsgemäß nichtleere Resolventenmenge. Ist nun $z \in \rho(A)$, so ist $R(z, A)$ als stetiger Operator insbesondere abgeschlossen, und damit muss auch die Inverse, also $z - A$, ein abgeschlossener Operator sein. Sektorielle Operatoren sind also stets abgeschlossen.

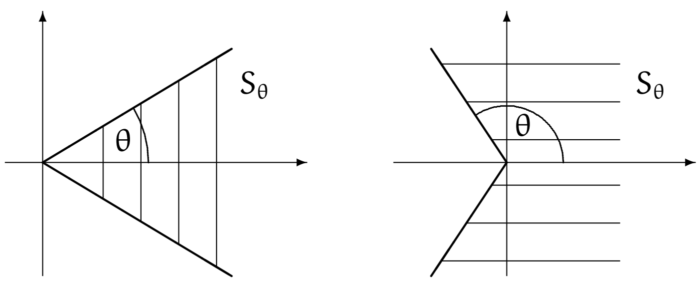

Abbildung 1.1: Der Sektor S_θ (mit $\theta < \pi/2$ bzw. $\theta > \pi/2$).

1.2.2 Bemerkung Ein Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ ist bereits dann sektoriell, wenn $(-\infty, 0) \subset \rho(A)$ gilt und eine Konstante C mit $\|tR(t, A)\| \leqslant C$ für alle $t < 0$ existiert. Um dies einzusehen, betrachtet man die Taylorentwicklung von $R(z, A)$ um $t_0 < 0$. Diese hat den Konvergenzradius $\|R(t_0, A)\|^{-1} \geqslant |t_0|/C$, und damit ist $\sigma(A)$ tatsächlich in einem gewissen Sektor enthalten. Die Normabschätzung für die Resolvente ergibt sich ebenfalls aus der Taylorentwicklung.

Man beachte, dass ein sektorieller Operator gemäß unserer Definition nicht dicht definiert sein muss; manchmal wird dies in der Definition ebenfalls gefordert. (Gleiches gilt für dichtes Bild und Injektivität.)

1.2.3 Satz [9, Theorem 4.6] Es besteht folgende Äquivalenz: Der Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ ist genau dann dicht definiert und vom Typ $\mu < \pi/2$, wenn $-A$ eine beschränkte analytische Halbgruppe erzeugt.

1.3 Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren

Cowling, Doust, McIntosh und Yagi haben für sektorielle Operatoren einen Funktionalkalkül definiert [4]; eine ausführliche Darstellung dieses Kalküls findet man in [10]. Wir wollen an dieser Stelle die wichtigsten Ergebnisse kurz wiederholen: Ist A vom Typ μ und $\psi \in \Psi(S_\theta)$ mit $\theta > \mu$, so ist $\psi(A) \in \mathcal{B}(X)$ gegeben durch

$$\psi(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\alpha} \psi(z) R(z, A)\, dz\,,$$

wobei $\mu < \alpha < \theta$ gilt und γ_α den positiv orientierten Rand des Sektors S_α bezeichnet. Das Integral existiert als uneigentliches Riemann-Integral (und auch als Bochner-Integral) wegen $\psi \in \Psi(S_\theta)$ und der Resolventenabschätzung für den Operator A.

Man vergleiche dies mit der Darstellung $\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\alpha} \psi(z)(z - \lambda)^{-1}\, dz$, die für $\lambda \in S_\alpha$ aus der Cauchyschen Integralformel folgt.

Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes kann man zeigen, dass die Definition unabhängig vom gewählten Winkel α ist. Durch $\psi \mapsto \psi(A)$ ist dann ein Algebrenhomomorphismus gegeben.