

Untersuchungen zu MIRUP für Vektorpackprobleme

Von der Fakultät für Mathematik und Informatik

der Technischen Universität Bergakademie Freiberg

genehmigte

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

Dr. rer. nat.

vorgelegt

von Dipl.-Math. Jürgen Rietz

geboren am 13.10.1971

in Dohna

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Stephan Dempe, Freiberg
Prof. Dr. rer. nat. habil. Ingo Althöfer, Jena
Prof. Dr. rer. nat. habil. Andreas Fischer, Dresden

Tag der Verleihung: 18. 12. 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
1.1	Modellbildung und Aufgabenstellung	3
1.2	Beispiele aus der Praxis	8
1.3	Gap, IRUP, MIRUP; aus der Geschichte der MIRUP-Theorie	11
1.4	Äquivalente Instanzen im Vektorpackproblem	13
1.5	Eine andere Formulierung von Instanzen im Vektorpackproblem	14
1.6	Die revidierte Simplexmethode mit Spaltengenerierung	15
1.7	Abspaltung des ganzzahligen Teils der Optimallösung der stetigen Relaxation	18
1.8	Schnittebenenverfahren	20
2	Das eindimensionale Problem	22
2.1	Dominanz von Varianten	22
2.2	Der Teilbarkeitsfall	24
2.3	Materialschranke und Gap	32
2.4	Wert einer Variante zur Abschätzung des Gaps	34
3	MIRUP-Untersuchungen bei $(k, k + 1)$-Instanzen	38
3.1	Einführung	38
3.2	Der Nenner des optimalen Zielfunktionswertes der stetigen Relaxation	39
3.3	Rückführung auf einfachere Instanzen	41
3.4	A priori-Nachweis der Zulässigkeit einer Variante	47
3.5	Aufstellung ganzzahliger Zuschnittpläne	56
3.6	Folgerungen für das allgemeine eindimensionale Zuschnittproblem	60
4	Nicht-IRUP-Instanzen	63
4.1	Der Teilbarkeitsfall	63
4.2	$(k, k + 1)$ -Instanzen	66

4.2.1	Instanzen mit $z_C = z_M = 3$	66
4.2.2	Komplementäre Varianten — komplementäre Instanzen	67
4.2.3	Instanzen mit $z_C = 2$	68
4.2.4	Allgemeinere Instanzen als Folgerung	70
4.3	$(1, k)$ -Instanzen	71
4.4	Ein Ansatz für den allgemeinen Fall	72
4.5	Konstruktionsprinzipien für große Gaps	74
4.5.1	Der erste Konstruktionssatz für große Gaps	74
4.5.2	Zusammengesetzte Instanzen	76
4.5.3	$(2, 3)$ -Instanzen mit $\Delta > 1$	77
4.5.4	Gap 1,1 ohne Teile des Typs 1	78
4.5.5	Der zweite Konstruktionssatz für große Gaps	79
4.5.6	Konstruktion eines Gaps $7/6$	82
4.5.7	Konstruktion eines Gaps 1,2	83
4.5.8	Eine Modifikation des zweiten Konstruktionssatzes	84
4.6	Früher bekannte Beispiele mit großen Gaps	86
4.7	Beispiele mit ganzzahligen Daten und besonders kurzer Ausgangslänge	86
5	d-dimensionales Vektorpackproblem	88
5.1	Unbeschränktheit des Wertes einer Variante für $d \rightarrow \infty$	88
5.2	Unbeschränktes Gap im Fall $d = 2$	90
5.3	Instanzen ohne unvergleichbare Teile	92
5.4	Offene Fragen	96
	Literaturverzeichnis	97

Kapitel 1

Einführung

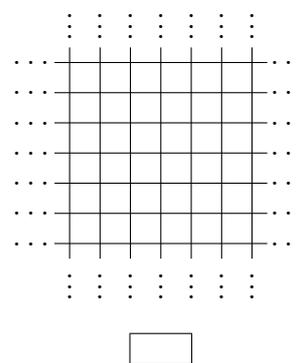
1.1 Modellbildung und Aufgabenstellung

Die Vielfalt von verschiedenen in der Praxis auftretenden Pack- und Zuschnittproblemen soll zuerst an ausgewählten Beispielen dargestellt werden:

- Wieviele identische zylindrische Dosen können auf eine gegebene rechteckige Palette gepackt werden?
- Wie sind zehn gleiche Kreise überlappungsfrei in ein möglichst kleines Quadrat zu plazieren?
- Wie können unter Einhaltung bestimmter Mindestabstände möglichst viele vorgegebene, nichtkonvexe Gegenstände aus Ton zum Brennen auf eine vorgegebene Platte gepackt werden?
- Um Schränke herzustellen, sind für die Seiten, die Türen, den Boden usw. Holzbretter unter Beachtung der Faserrichtung aus größeren Platten zuzuschneiden. Mit der Sägeanlage können nur durchgängige Schnitte, sogenannte Guillotine-Schnitte, realisiert werden. Wie kann maximale Materialausnutzung erreicht werden? Hierbei sind mitunter Muster, Fehlerstellen und ähnliche zusätzliche Bedingungen zu berücksichtigen.
- Wie groß müssen die zu zerschneidenden Platten sein, damit der Verschnitt möglichst gering wird? Die Abmessungen der Platten können nur innerhalb bestimmter Intervalle variiert werden. Es ist auch damit zu rechnen, daß der Plattenpreis progressiv mit der Größe steigt.
- Beim Zuschneiden eines Großauftrages sollen erst alle Teile einer Sorte geschnitten worden sein, bevor sie abtransportiert werden. Für die notwendige Zwischenlagerung neben der Schnittanlage gibt es nur Platz für $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ Teilesorten. Gesucht werden Schnittpläne und Reihenfolgen mit minimalem Materialverbrauch, die diese Einschränkung berücksichtigen. Ein Zugang für derartige Probleme ist in [13] angegeben.

- Puzzles als Testbeispiele: Man packe alle vorgegebenen Teile in einen vorgegebenen Container, so daß dieser vollständig ausgefüllt ist. Beispiel: Fünf Einheitswürfel und je sechs beliebig drehbare Quader der Abmessungen $1 \times 2 \times 4$ und $2 \times 2 \times 3$ sind in einen Würfel der Kantenlänge 5 zu packen.
- Bestimmung der optimalen Anzahl vorgegebener Container, um alle Teile einpacken zu können. Nicht immer ist genau bekannt, wieviele Teile welcher Größe zu packen sind. Dazu gehören das fünfte und sechste Beispiel aus Abschnitt 1.2.
- Parkettierungsprobleme, Mosaiken und unregelmäßige Flächenaufteilungen: Mit vorgegebenen Figuren ist die komplette Ebene auszulegen. Eine derartige Aufgabe ist diese [22]:

„Eine Ebene E sei durch vertikale und horizontale Geraden in Quadrate der Seitenlänge 1 cm zerlegt. Diese Ebene soll mit Rechtecken der Seitenlängen 1 cm, 2 cm so ausgefüllt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: Kein Punkt der Ebene soll frei bleiben, aber die Rechtecke dürfen sich auch nicht gegenseitig überlappen. Jede der obengenannten vertikalen und horizontalen ... Geraden zerlegt nur endlich viele der Rechtecke in kleinere Flächenstücke. Man untersuche, ob es möglich ist, diese Bedingungen zu erfüllen.“



Sehr schöne Parkettierungen wurden auch von M. C. ESCHER (1898–1972) angegeben. Umfangreiche weiterführende Informationen bietet [11].

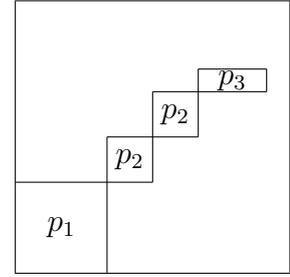
- Es gilt $1^2 + 2^2 + \dots + 24^2 = 70^2$. Wie können Quadrate mit Seitenlängen $1, 2, \dots, 24$ so in ein Quadrat Q der Seitenlänge 70 gelegt werden, daß jedes Teil höchstens einmal verwendet wurde, kein Teil ein anderes überlappt oder aus Q herausragt, die Seiten der kleinen Quadrate parallel zu denen von Q sind und die größtmögliche Fläche von Q bedeckt wird [39]?

Eine Einführung in die Pack- und Zuschnittprobleme sowie typische Lösungsmethoden sind in [39] gegeben. Viele weiterführende Literaturquellen sind in [7] zu finden. Allen obengenannten Problemstellungen ist gemeinsam, daß eine vorgegebene Grundmenge nach bestimmten Regeln in gewisse Teilmengen zerlegt werden soll, so daß eine vorgegebene Zielfunktion ein Maximum oder Minimum annimmt. Das gilt auch für das (mehrdimensionale) Vektorpackproblem, das aus Planungsaufgaben entstehen kann.

Im folgenden werden Modelle aufgestellt und miteinander verglichen, danach die eigentliche Aufgabe formuliert. In der gesamten Arbeit bezeichnet \mathbb{N} jeweils die natürlichen Zahlen einschließlich 0. Seien $d, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei

$$D := \{1, 2, \dots, d\}, \quad I := \{1, 2, \dots, m\}. \quad (1.1)$$

Das d -dimensionale Vektorpackproblem (d -VPP) ist dies: Gegeben sind identische d -dimensionale quaderförmige Container vom Format $w_1 \times w_2 \times \dots \times w_d$, in welche m quaderförmige (nicht drehbare) Teile der Abmessungen $\ell_{i1} \times \ell_{i2} \times \dots \times \ell_{id}$ mit den Bedarfszahlen $b_i \in \mathbb{N}$ so hineingepackt werden sollen, daß für jede Richtung $r \in D$ die Summe der Längen ℓ_{ir} der gepackten Teile w_r nicht überschreitet. Für $d = 2$ sieht eine graphische Veranschaulichung wie nebenstehend aus.



Der von einer Packvariante jeweils nicht genutzte Teil des Containers kann nicht mit Resten der anderen Container kombiniert werden; er verfällt wertlos („Verschnitt“). Mit den so erlaubten Packvarianten können verschiedene Optimierungsaufgaben aufgestellt werden:

1. Jedes Teil $i \in I$ soll unter Benutzung möglichst weniger Container *genau* b_i -mal gepackt werden.
2. Jedes Teil $i \in I$ soll unter Benutzung möglichst weniger Container *mindestens* b_i -mal gepackt werden.
3. Jedes Teil $i \in I$ soll mindestens b_i -mal gepackt werden, wobei Überproduktion Abfall ist und der über alle Richtungen $r \in D$ und alle benutzten Container summierte Verschnitt insgesamt minimal sein soll.

Die Containergröße ist im Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ gegeben (d. h. $w_r > 0 \forall r \in D$); die Größen der Teile werden in der Matrix $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $\mathbf{L} > \mathbf{0}$ (also $\ell_{ir} > 0 \forall i \in I, r \in D$) und die Bedarfszahlen in $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^m$ zusammengefaßt. Für alle $i \in I$ und alle $r \in D$ wird $\ell_{ir} \leq w_r$ gefordert. Da das Packen nur eines Teils in je einen Container eine zulässige Lösung liefert und die untere Schranke 0 für den Zielfunktionswert existiert, ist das gegebene ganzzahlige lineare Optimierungsproblem (für alle drei Modelle) stets lösbar.

Eine Packvariante (kurz *Variante*) ist ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^m$, der angibt, wie oft jedes Teil gepackt wurde, z. B. wurden in der obenstehenden graphischen Veranschaulichung zwei Teile je einmal, ein Teil genau zweimal und andere Teile je nullmal gepackt. Die Reihenfolge, in der die Teile gepackt wurden, ist — im Gegensatz zum gewöhnlichen Packungsproblem — einerlei. Damit die Variante zulässig wird, muß

$$\sum_{i=1}^m a_i * \ell_{ir} \leq w_r \quad \forall r \in D \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{L}^T \mathbf{a} \leq \mathbf{w} \quad (1.2)$$

gelten. Sei J die Indexmenge aller zulässigen Varianten, $|J| =: n$. Das d -VPP verlangt nun die Bestimmung, wie oft jede der n Varianten \mathbf{a}^j ($j \in J$) zu packen ist. Die drei obigen Modelle ergeben folgende ganzzahligen linearen Optimierungsprobleme:

$$z_1 = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min! \quad \text{bei} \quad \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}^j = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n; \quad (1.3)$$

$$z_2 = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min! \quad \text{bei} \quad \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}^j \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n; \quad (1.4)$$

$$z_3 = \sum_{r \in D} \sum_{j \in J} x_j * (w_r - \sum_{i \in I} a_{ij} * \ell_{ir}) \rightarrow \min! \quad \text{bei} \quad \sum_{j \in J} x_j \mathbf{a}^j = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n, \quad (1.5)$$

denn zu oft gepackte Teile zählen (im dritten Modell) als Abfall und können weggelassen werden. Die Nebenbedingungen in (1.3) und (1.5) sind die gleichen. Für den Zielfunktionswert ergibt sich

$$z_3 = \sum_{j \in J} x_j * \sum_{r \in D} w_r - \sum_{r \in D} \sum_{i \in I} \ell_{ir} * \sum_{j \in J} x_j * a_{ij} = z_1 * \sum_{r \in D} w_r - \sum_{r \in D} \sum_{i \in I} \ell_{ir} * b_i,$$

so daß jede Optimallösung von (1.3) auch eine von (1.5) ist und umgekehrt. Jede Optimallösung von (1.3) ist für (1.4) zulässig. Ist eine Optimallösung von (1.4) gegeben, so können ggf. einzelne Teile aus Varianten weggelassen werden, um Überproduktionen abzubauen. Damit kann immer eine zulässige Lösung von (1.3) mit dem gleichen Zielfunktionswert erreicht werden. Die Modelle (1.3)–(1.5) sind also gleichwertig, so daß nur (1.3) untersucht werden braucht.

Beispiel: $d = 1$, $m = 2$, $w = 9$, $\mathbf{1} = (5, 1)^T$, $\mathbf{b} = (5, 7)^T$, d. h. aus eindimensionalem Material der Länge 9 sind zwei Teile (Längen 5 und 1) in den Anzahlen 5 und 7 zuzuschneiden. Eine verschnittfreie Optimallösung von (1.4) enthält fünfmal die Variante $(1, 4)^T$, so daß das kleine Teil 20-mal statt 7-mal gepackt wird. Eine Optimallösung von (1.3) ist diese: Einmal die Variante $(1, 4)^T$, einmal $(1, 3)^T$, dreimal $(1, 0)^T$ packen. Eine andere Optimallösung ist: Viermal $(1, 1)^T$ und einmal $(1, 3)^T$ packen. \triangleleft

Für $d = 1$ geht das d -VPP in das eindimensionale Zuschnittproblem (1CSP) über. Dieses enthält als Spezialfall wiederum das eindimensionale Bin-Pack-Problem, wo jedes Teil genau einmal gefordert wird. Im Abschnitt 1.5 wird dargelegt, daß dies jedoch keine Beschränkung der Allgemeinheit ergibt.

Sowohl das 1CSP als auch das d -VPP sind \mathcal{NP} -schwer, z. B. kann gefragt werden, ob einige vorgegebene Teile in zwei Containern untergebracht werden können. Um diese Frage (bei $d = 1$) zu beantworten, ist ein Rucksackproblem zu lösen. Dieses und auch die Problemstellung, ob eine gegebene Menge ganzer Zahlen in zwei Teilmengen G und H mit $\sum_{i \in G} i = \sum_{i \in H} i$ zerlegbar ist, ist \mathcal{NP} -vollständig, vgl. [33], S. 724.

Ohne Ganzzahligkeitsforderung an \mathbf{x} erhält man die wesentlich leichter zu lösende stetige Relaxation

$$z = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min! \quad \text{bei} \quad \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}^j = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n, \quad (1.6)$$

vgl. Abschnitt 1.6. Die optimalen Zielfunktionswerte von (1.3) und (1.6) werden in der gesamten Arbeit mit z_D bzw. z_C bezeichnet. Welche Auswirkungen hat die Ersetzung der Nebenbedingung $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$ durch $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$? Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die (teilweise) Klärung dieser Frage. Die dafür notwendigen Grundlagen einschließlich effizienter Verfahren zur exakten Lösung von (1.3) für nicht zu große m werden im ersten Kapitel bereitgestellt, aber auch vorhandene Fallstricke gezeigt. Einfache Abschätzungen der Differenz $\Delta := z_D - z_C$ enthält das zweite Kapitel für das 1CSP. Ein wichtiger Spezialfall des 1CSPs wird in Kapitel 3 ausführlich untersucht und eine Folgerung für das allgemeine 1CSP zur Abschätzung von Δ abgeleitet. In Kapitel 4 werden systematisch Beispiele des 1CSPs mit besonders großer Differenz Δ aufgebaut, aber auch Ansätze angedeutet, die zwar nicht zum Erfolg führten, dennoch Ideen für weitere Überlegungen liefern. Im fünften Kapitel werden wesentliche

Unterschiede und Gemeinsamkeiten des d -VPPs mit dem 1CSP angegeben. Für weitere Forschungen bleibt genügend Raum — einige der ungeklärten Fragen bilden den Abschluß.

Wird ein konkreter Vertreter der *Problemklasse* d -VPP betrachtet, dann ist von einer *Instanz* die Rede, während mit „Problem“ immer die Problemklasse gemeint ist. Ebenso wie in der Programmiersprache C++ zwischen Klassen und den Instanzen einer Klasse streng unterschieden wird, soll es auch hier mit den Begriffen „Problem“ und „Instanz“ sein. Die Parameter m , \mathbf{w} , \mathbf{L} und \mathbf{b} werden für konkrete Instanzen immer als Quadrupel $(m; \mathbf{w}; \mathbf{L}; \mathbf{b})$ angegeben.

Beispiel: Sei $d = 1$. Dann bedeutet $E = (4; 18; (10, 9, 6, 4)^T; (1, 1, 2, 1)^T)$, daß genau vier verschiedene (eindimensionale) Teile, nämlich mit den Längen 10, 9, 6 und 4, in möglichst wenig Container der Länge 18 gepackt werden sollen, wobei das Teil der Länge 6 zweimal, die übrigen Teile je einmal unterzubringen sind. Gleichbedeutend damit wäre die Forderung, diese Teile aus möglichst wenig Ausgangsmaterial der Länge 18 zu schneiden, wobei Restlängen nicht miteinander verbunden werden können; sie sind Abfall.

$w = 18$

$\ell_1 = 10, b_1 = 1$

$\ell_3 = 6, b_3 = 2$

$\ell_2 = 9, b_2 = 1$

$\ell_4 = 4, b_4 = 1$

Eine Optimallösung der Relaxation (1.6) mit Zielfunktionswert $z_C = 2$ für diese Instanz ist folgende: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/2$, $x_j = 0$ für $j > 4$ mit den Varianten $\mathbf{a}^1 = (1, 0, 1, 0)^T$, $\mathbf{a}^2 = (1, 0, 0, 2)^T$, $\mathbf{a}^3 = (0, 2, 0, 0)^T$, $\mathbf{a}^4 = (0, 0, 3, 0)^T$. Nur die erste Variante nutzt den Container nicht vollständig aus.

1	3		$x_1 = 0,5$
---	---	--	-------------

1	4	4	$x_2 = 0,5$
---	---	---	-------------

2	2	$x_3 = 0,5$
---	---	-------------

3	3	3	$x_4 = 0,5$
---	---	---	-------------

Für dieses Beispiel gilt jedoch $z_D = 3$, d. h. es werden drei Container benötigt, und nicht zwei, wie es gemäß z_C möglich sein könnte. ◁

Falls beim Zuschneiden eine bestimmte Schnittbreite $s > 0$, z. B. wegen eines Trennschleifers, zu berücksichtigen ist, kann das 1CSP (und auch das d -VPP) auf den zuvor geschilderten Fall ohne Schnittbreite zurückgeführt werden, nämlich mit $w_r := w_r + s$ und $\ell_{ir} := \ell_{ir} + s$ für alle $r \in D$ und $i \in I$.

Eine zulässige Variante \mathbf{a} heißt *maximal*, wenn kein weiteres Teil in den Container gepackt werden kann, also die Menge $\{\mathbf{c} \in \mathbb{N}^m : \mathbf{L}^T(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \leq \mathbf{w}\}$ nur aus dem Nullvektor besteht, vgl. die Zulässigkeitsbedingung (1.2). Bei $d = 1$ heißt das, daß das kleinste Teil größer ist als $w - \mathbf{1}^T \mathbf{a}$. Die Annahme, bei der Lösung der stetigen Relaxation (1.6) bräuchte man nur maximale Varianten betrachten, erweist sich als falsch.

Beispiel: $d = 1$, $E = (2; 5; (3, 1)^T; (1, 1)^T)$ besitzt nur $\mathbf{a}^1 = (1, 2)^T$ und $\mathbf{a}^2 = (0, 5)^T$ als maximale Varianten. Damit ist der zulässige Bereich von (1.6) leer, denn um Teil 1 nur mit maximalen Varianten zu packen, ist (verbotene) Überproduktion des zweiten Teils unvermeidbar. Ebenso wären (1.3) und (1.5) unlösbar. \triangleleft

Eine zulässige Variante \mathbf{a} heißt *eigentlich*, wenn $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ gilt. Da Überproduktion in (1.3) verboten ist, reichen zur Lösung der ganzzahligen Aufgabe eigentliche Varianten aus. Werden in der stetigen Relaxation (1.6) nur eigentliche Varianten erlaubt, dann ist das eine Einschränkung, und für den optimalen Zielfunktionswert z_E von

$$z = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \min! \quad \text{bei} \quad \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}^j = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n; \quad x_j = 0, \text{ falls } \mathbf{a}^j \not\leq \mathbf{b} \quad (1.7)$$

gilt $z_C \leq z_E \leq z_D$. Darauf wird im Abschnitt 1.5 nochmals eingegangen.

Eine zulässige Variante \mathbf{a} heißt *elementar*, wenn sie in der Form $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^i$ mit $a_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ darstellbar ist, wobei \mathbf{e}^i den i -ten Basis-Einheitsvektor des \mathbb{R}^m bezeichnet. Mit elementaren Varianten wird also genau ein Teiletyp gepackt.

Eine zulässige Variante \mathbf{a} heißt *p-Teile-Variante*, wenn $\sum_{i \in I} a_i = p$ gilt, d. h. mit der Variante \mathbf{a} werden genau p (nicht notwendig paarweise voneinander verschiedene) Teile gepackt.

1.2 Beispiele aus der Praxis

Beispiel 1: Eine Firma für Gas-, Wasser-, Abwasser- und Heizungsinstallation soll in einem Haus eine neue Fernheizung einbauen. Dafür sind teure Kupferrohre nach DIN (Deutsche Industrienorm) zu verwenden. Zerschnittene Reste können zwar elektrisch gelötet werden, jedoch kostet das anderes Material (Lötpaste, Lötzinn, Verbindungsstücke, Kohlestifte am Schweiß-Transformator wegen des starken Abbrandes) und viel Zeit, denn die Lötstellen müssen zuletzt auch auf Dichtigkeit geprüft werden. Da Arbeitszeit besonders teuer ist, sollen folglich möglichst wenig Lötstellen angebracht werden. Verbliebene Materialreste kann der Meister nur zum Schrottpreis verkaufen, der deutlich unter dem Einkaufspreis für die Rohre liegt. Das Unternehmen muß also versuchen, möglichst wenig Verschnitt zu produzieren, wobei Überproduktion Abfall wäre. Damit liegt ein gewöhnliches 1CSP vor. \triangleleft

Das zweite und dritte Beispiel mögen etwas altmodisch aussehen, jedoch ändert sich am Sachverhalt nicht viel, wenn Musik auf CDs oder Filme auf Videobändern oder DVDs aufgenommen werden.

Beispiel 2: Jemand hat viele GIF-Bilder (GIF: graphic interchange format) auf der Festplatte seines Rechners und möchte diese schon stark komprimierten Bilder auf

möglichst wenig Disketten sichern. Eine weitere Komprimierung lohnt sich nicht, und die Bilder sollen auch nicht geteilt werden. Die Disketten wurden auf 720 KByte Bruttokapazität formatiert. Die Größe jeder Zuordnungseinheit (Cluster) beträgt 1 KByte (=1024 Byte). Für das Hauptverzeichnis sind nur 16 Einträge vorgesehen, damit für Startsektor, zwei Dateizuordnungstabellen á 3 Sektoren und Hauptverzeichnis insgesamt nur 8 Sektoren zu je 512 Byte benötigt werden und 716 KByte Nettokapazität für die Bilder verbleiben. Da jede angefangene Zuordnungseinheit als (voll) belegt gilt, ist die Größe jedes Bildes auf volle KByte aufzurunden. Angenommen, jedes Bild hat eine Größe im Bereich 150–220 KByte. Dann liegt ein 1CSP vor, in dem jedes Teil 3–4mal in den Container paßt. ◁

Beispiel 3: Ein Liebhaber alter Hardware hat seine 5,25"-DD-Disketten (DD: double density, doppelte Schreibdichte) auf 820 KByte Bruttokapazität (2 Seiten mit je 82 Spuren zu je 10 Sektoren á 512 Byte) formatiert und als Clustergröße 1 KByte und für das Hauptverzeichnis maximal 16 Einträge festgelegt, so daß 816 KByte netto zur Verfügung stehen. Auf möglichst wenigen dieser Disketten sollen viele kleine Dateien abgespeichert werden, und zwar unkomprimiert und ungeteilt. Anders als im zweiten Beispiel muß ein Unterverzeichnis angelegt werden, welches ebenfalls Platz belegt, nämlich für je 32 Einträge 1 KByte. Zwei Einträge, nämlich für das aktuelle und für das übergeordnete Verzeichnis, sind standardmäßig schon enthalten. Im Hauptverzeichnis sind noch 15 Einträge frei. Um die Verteilung der Dateien auf die Disketten zu planen, ist das Anwachsen der Unterverzeichnis-Datei zu berücksichtigen. Sei ℓ_i die Größe der i -ten Datei in Byte. Anstelle mit ℓ_i ist folglich mit $1024 * \lceil \ell_i / 1024 \rceil + 32$ zu rechnen, wobei die Netto-Diskettenkapazität (in Byte) mit

- $815 * 1024 + 30 * 32$ anzusetzen ist, wenn keine weiteren Dateien ins Hauptverzeichnis sollen;
- $815 * 1024 + 45 * 32$ gesetzt werden darf, wenn in jedem Fall 15 weitere Dateien im Hauptverzeichnis abgelegt werden. Sollten auf einer Diskette weniger als 15 Dateien sein, dann ist der Ansatz auch in Ordnung, wenn auf das Unterverzeichnis verzichtet wird. ◁

Beispiel 4: Im Rechenzentrum eines Instituts ist regelmäßig der Inhalt der Festplatten aller angeschlossenen Rechner automatisch auf Magnetbänder zu sichern. Leider kann nicht völlig ausgeschlossen werden, daß Viren, Würmer, trojanische Pferde, logische Bomben oder andere schadenstiftende Programme die Daten oder Software manipulieren und erst spät entdeckt werden. Deshalb dürfen für jeden Sicherungsgang die zuletzt benutzten Bänder nicht sogleich wieder verwendet werden, sondern nur in sehr langen Intervallen. Die Festplatten sind im allgemeinen unterschiedlich stark gefüllt. Niemals soll der Inhalt einer Festplatte auf mehrere Bänder verteilt werden. Zuerst sind hier die abzuspeichernden Datenmengen zu ermitteln, dann kann die Berechnung einer optimalen Zuordnung zu den Bändern erfolgen. Im Rahmen einer Modernisierung wurden einige neue Bänder mit noch größerer Kapazität gekauft. Der Preis der neuen und alten Bänder ist unterschiedlich. Die Ermittlung, wie mit minimalem Kostenaufwand die Daten auf die Bänder kopiert werden können, bedeutet die Lösung eines 1CSPs mit mehreren unterschiedlichen Containern. Eine derartige Erweiterung des 1CSPs wird im Abschnitt 1.6 besprochen. ◁

Beispiel 5: Ein Institut führt jeden Freitag eine Komplett-Sicherung seiner Daten in komprimierter Form auf Magnetbänder einheitlicher Kapazität durch. Auf der Festplatte des für die Sicherung vorgesehenen Rechners ist nur Platz für jeweils ein Band. Sobald die Daten geschrieben wurden, wird der Platz für die Komprimierung des nächsten Datenblocks gebraucht. Die Datenblöcke dürfen nicht zerteilt werden. Soweit ist die Planung der Datensicherung noch ein gewöhnliches 1CSP. Da aber die Kompressionsrate für jeden Datenblock nur nach den Erfahrungen der letzten Sicherung geschätzt werden kann und ein teilweise bereits bespieltes Band nicht noch einmal benutzt werden darf, weil die Gefahr besteht, daß ein Teil der Daten überschrieben wird, handelt es sich um eine Online-Optimierungsaufgabe, bei der die Größen der Teile nicht von vornherein bekannt sind. Ein eventueller Sicherheitszuschlag für die Größe der komprimierten Datensätze kann zu klein sein, so daß die gemachte Planung fehlschlägt. Andererseits soll der Sicherheitszuschlag nicht zu groß sein, um nicht zu viel zu „verschenken“. ◁

Beispiel 6: „Im Überseehafen Rostock wird eine Stückgutsendung erwartet. Über sie ist nur bekannt, daß die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) eingehalten sind:

(1) Die Gesamtmasse aller Stücke der Sendung beträgt 10 t.

(2) Die Masse jedes einzelnen Stücks ist nicht größer als 1 t.

Zum Transport stehen Lastkraftwagen (LKW) mit einer Tragfähigkeit von je 3 t zur Verfügung. Man untersuche, ob für jede Stückgutsendung, die die Bedingungen (1), (2) einhält, eine einmalige Fahrt von

a) 5 LKW, b) 4 LKW, c) 3 LKW

zum Abtransport der Sendung ausreicht. Dabei sei angenommen, daß sich Stückgüter von insgesamt 3 t jeweils auch auf einem LKW unterbringen lassen.“ ◁

Wenn die Größen aller Teile in dieser Aufgabe [22] bekannt wären, handelte es sich um eine Instanz des 1CSPs. Derartige Problemstellungen mit unbekanntem Parametern sind nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Beispiel 7: In Zeithain bei Riesa wurden nahtlose Stahlrohre hergestellt. Dabei wurde jeweils ein etwa 1 m langer, orangefarbener Block aus dem Ofen genommen. In den Block wurde in Längsrichtung mit einem Stempel ein fast durchgängiges Loch gepreßt, danach wurde der Block gewalzt. Wenn er dunkelrot auf der Ablage zum Abkühlen ankam, besaß er eine Länge von 92 Metern. Das eine Ende war verschlossen, weil der Stempel nicht vollständig durchkam, das andere Ende war in der Regel etwas eingerissen. Um Exportqualität zu sichern, mußten deshalb von beiden Enden je 1,5 m abgetrennt werden. Da 89 m lange Rohre schlecht transportiert werden können, wurden sie in die von Abnehmern benötigten kürzeren Teile zerschnitten. Angenommen, die Schnittbreite sei vernachlässigbar, und die Trennvorrichtung kann bis zu $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ Schnitte gleichzeitig führen. Wenn aus Gründen der Zeiteffektivität jedes der 92 m langen Stücke in höchstens t Trenngängen zerschnitten werden sollte, dann durften folglich nicht mehr als $s * t - 1$ Teile in der Nutzlänge von 89 m untergebracht werden. Damit liegt kein 1CSP mehr, sondern ein 2-VPP vor. ◁

Mehrdimensionale Vektorpackprobleme entstehen auch, wenn mehrere unabhängige Kapazitäts-Bedingungen einzuhalten sind, wie geometrische Länge, Gewicht, Zeit.

1.3 Gap, IRUP, MIRUP; aus der Geschichte der MIRUP-Theorie

Zulässige Lösungen von (1.3) erhält man leicht; eine besonders einfache ist die, daß in jeden Container genau ein Teil gepackt wird. Wenn eine zulässige Lösung von (1.3) mit dem Zielfunktionswert z gegeben ist, interessiert die Frage, ob die Lösung optimal, also $z = z_D$ ist. Das ist gewiß der Fall, wenn eine untere Schranke $u \in \mathbb{R}$ mit $\lceil u \rceil = z$ bekannt ist. Eine besonders einfache untere Schranke für z_D ist die Materialschranke

$$z_M := \max_{r \in D} \left\{ \frac{1}{w_r} * \sum_{i=1}^m b_i * \ell_{ir} \right\}, \quad (1.8)$$

speziell $z_M = \mathbf{1}^T \mathbf{b} / w$ im 1CSP.

Aussage 1: Stets gilt $z_M \leq z_C \leq z_D$.

Beweis: $z_C \leq z_D$ ist klar, da der zulässige Bereich für die Minimierungsaufgabe erweitert wurde. Um $z_M \leq z_C$ zu zeigen, werden alle zulässigen Varianten in der *Zuschnittmatrix* \mathbf{A} zusammengefaßt. Ist $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n$ eine Optimallösung der Relaxation (1.6), dann gilt wegen (1.6) zunächst $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$. Multiplikation von links mit \mathbf{L}^T liefert $\mathbf{L}^T \mathbf{b} = \mathbf{L}^T \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{w} * \sum_{j \in J} \bar{x}_j$ wegen der Zulässigkeitsbedingung (1.2). Da z_C der optimale Zielfunktionswert von (1.6) ist, gilt $\sum_{j \in J} \bar{x}_j = z_C$, also $\mathbf{L}^T \mathbf{b} \leq z_C * \mathbf{w}$ bzw. nach komponentenweiser Betrachtung $z_M \leq z_C$. \square

Leider ist i. allg. z_M als Schranke viel zu ungenau, z. B. bei $d = 1$, $E = (1; 99; 50; b)$ für große b , denn $z_M = b * 50/99$, aber da jedes Teil nur einmal in den Container paßt, ist $z_C = z_D = b$, also $z_D - z_M = b * 49/99$, was für $b \rightarrow \infty$ jede feste Schranke übersteigt. Andere, ebenfalls sehr einfache Schranken werden in [4] und [37] für das 2-VPP diskutiert, z. B. Schranken, die sich aus der Unverträglichkeit von Teilen ergeben, etwa weil zwei oder drei relativ große Teile nicht gemeinsam im Container Platz finden. Jedoch sind diese Schranken auch nur im Intervall $[0, z_C]$, so daß z_C als untere Schranke für z_D trotz deutlich komplizierterer Berechnung oft wesentlich besser geeignet ist.

Im 1CSP wurden Zehntausende „zufällig“ erzeugter Testbeispiele gerechnet, und die Differenz $\Delta = z_D - z_C$ war immer sehr klein. Das gab zu der Vermutung Anlaß, daß im 1CSP stets $\Delta < 1$ sein müsse.

Gegeben sei ein beliebiges Minimierungsproblem P der ganzzahligen linearen Optimierung. Dieses kann immer in der Form

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min! \quad \text{bei} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{o}, \mathbf{x} \text{ ganzzahlig} \quad (1.9)$$

dargestellt werden. Es wird vorausgesetzt, daß \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} immer ganzzahlig sind. Mit konkreten Daten \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} ist eine Instanz E von P festgelegt. Diese ergebe den optimalen Zielfunktionswert $z_D(E)$, und $z_C(E)$ sei der optimale Zielfunktionswert zur zugehörigen stetigen Relaxation, also der Aufgabe (1.9) ohne Ganzzahligkeitsbedingungen für \mathbf{x} . Die Differenz $\Delta(E) = z_D(E) - z_C(E)$ wird als *Gap* ((engl.) Riß, Spalte, Loch, Schlucht, Aussparung, Lücke — hier also Lücke) bezeichnet. E hat stets ganzzahlige $z_D(E)$, sofern $z_D(E)$ existiert, und P besitzt die

- *Ganzzahl-Eigenschaft (integer property, IP)*, falls $z_D(E) = z_C(E)$
- *Ganzzahl-Aufrundungseigenschaft (integer round-up property, IRUP)*, falls $z_D(E) = \lceil z_C(E) \rceil$ bzw. $\Delta(E) < 1$
- *modifizierte Ganzzahl-Aufrundungseigenschaft (modified integer round-up property, MIRUP)*, falls $z_D(E) \leq \lceil z_C(E) \rceil + 1$ bzw. $\Delta(E) < 2$

für alle $E \in P$ gilt. Die Eigenschaft IRUP wurde von BAUM und TROTTER [1] eingeführt. Die Verallgemeinerung MIRUP wurde in [29] definiert.

Trotz der Existenz von $z_C(E)$ und $z_D(E)$ für alle Instanzen E einer Problemklasse P kann $\Delta(E)$ größer sein als jede fest vorgegebene Zahl, d. h. $\forall \delta \in \mathbb{R}$ gibt es eine Instanz $E \in P$ mit $\Delta(E) > \delta$. Das allgemeine ganzzahlige lineare Optimierungsproblem (1.9) kann einen leeren zulässigen Bereich haben, während die zugehörige stetige Relaxation lösbar ist. Bei nicht ganzzahligen Daten könnte (1.9) eine Optimallösung besitzen, während z in der stetigen Relaxation nach unten unbeschränkt ist, was auch Unlösbarkeit bedeutet.

Beispiel: $-x_2 \rightarrow \min!$ bei $\pi x_1 - x_2 = 0$, $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ hat wegen der Irrationalität von π nur die Lösung $x_1 = x_2 = 0$. In der stetigen Relaxation dagegen kann $x_1 \geq 0$ beliebig groß werden und damit auch $x_2 = \pi x_1$. \triangleleft

Das Transportproblem hat IP, denn wenn man die ihm zugeordnete stetige Relaxation mit der Simplexmethode lösen wollte, wäre der Betrag der Pivotelemente immer 1, so daß wegen der vorausgesetzten Ganzzahligkeit aller Ausgangsdaten stets ganzzahlige Ergebnisse entstehen. Die Simplexmethode führte folglich, ohne daß es in den Nebenbedingungen der Relaxation gefordert worden wäre, auf eine ganzzahlige Optimallösung. Das Zuordnungsproblem kann als spezielles Transportproblem formuliert werden, also hat es auch IP.

Allgemein gilt gemäß [18]: Das Problem (1.9) hat (mit ganzzahligen \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c}) genau dann IP, wenn die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} total (bzw. vollständig) unimodular ist, d. h. jede Unterdeterminante von \mathbf{A} nimmt einen der Werte $+1$, 0 , -1 an.

Im 1CSP gilt das offensichtlich nicht, da die Zuschnittmatrix \mathbf{A} keine Einträge größer als 1 haben dürfte. Somit ist ein Gap nahe 1 sehr leicht zu konstruieren, nämlich mit $E = (1; w; 1; 1)$ und $w \rightarrow \infty$. Für $w \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wäre nämlich $z_D = 1$ und $z_C = 1/w$, also $\Delta \rightarrow 1$.

1985 fand Frau MARCOTTE [15], daß das Gap im 1CSP nicht immer unter 1 bleiben muß. 1986 konnte sie ein Beispiel mit $\Delta = 1$ angeben [16]. Da in ihrer Instanz (natürliche) Zahlen zwischen 10^6 und 10^7 verwendet wurden, hieß es, so etwas käme praktisch nicht vor [6]. 1990 fand FIELDHOUSE [8] die wesentlich überschaubarere Instanz $E_F = (3; 30; (15, 10, 6)^T; (1, 2, 4)^T)$ mit $z_C = 59/30$ und $z_D = 3$. So eine Instanz kann in der Praxis tatsächlich vorkommen, doch die bis dahin angegebenen Beispiele seien singuläre Einzelfälle, wurde noch immer diskutiert. 1994 konnte NICA [19] ein allgemeines Gegenbeispiel zur IRUP-Hypothese angeben. Mit der Angabe von Familien mit unendlich vielen paarweise nichtäquivalenten Nicht-IRUP-Instanzen [26] fiel die IRUP-Hypothese endgültig.

In allen bisher angegebenen Instanzen des 1CSPs war Δ deutlich kleiner als 2, und

Instanzen mit $\Delta \geq 1,2$ zu finden, ist außerordentlich schwierig. So entstand die Hypothese, das 1CSP besitze zwar nicht IRUP, aber MIRUP [29]. Bisher konnte sie nur für bestimmte Teilklassen des 1CSPs bewiesen werden [14, 21, 27, 28].

1.4 Äquivalente Instanzen im Vektorpackproblem

Zwei Instanzen $E = (m; \mathbf{w}; \mathbf{L}; \mathbf{b})$ und $\bar{E} = (m; \bar{\mathbf{w}}; \bar{\mathbf{L}}; \mathbf{b})$ des d -VPPs heißen *äquivalent*, wenn ihre zugehörigen Zuschnittmatrizen sich durch Spaltenpermutation ineinander überführen lassen. Das setzt voraus, daß die Anzahlen n bzw. \bar{n} der zulässigen Varianten übereinstimmen. Äquivalenz der Instanzen E und \bar{E} ist genau dann gegeben, wenn jede für E zulässige Variante \mathbf{a} auch für \bar{E} zulässig ist und jede für \bar{E} zulässige Variante ebenfalls die Bedingung (1.2) erfüllt. Offensichtlich sind E und \bar{E} dann und nur dann äquivalent, wenn jede für E maximale Variante auch für \bar{E} zulässig ist und jede für \bar{E} maximale Variante auch für E zulässig ist. Äquivalente Instanzen erhält man z. B. durch Multiplikation von w_r und der r -ten Spalte von \mathbf{L} mit der gleichen positiven Konstanten.

Beispiel: Für $d = 1$ gaben T. GAU und G. WÄSCHER [40] folgende Instanz des 1CSPs mit Gap 16/15 an:

$$E_G = (5; 10\,000; (5000, 3750, 3250, 3001, 2000)^T; (1, 1, 1, 1, 2)^T)$$

Alle Längen außer 3001 sind durch 250 teilbar. Wird 3001 durch 3125 ersetzt, dann können keine weiteren Varianten hinzukommen, es gehen aber auch keine verloren, denn erst wenn Teil 4 mindestens dreimal gepackt wird, überspringt die benötigte Länge eine durch 250 teilbare Zahl, doch $(0, 0, 0, 3, 0)^T$ ist maximale Variante. Folglich ist

$$(5; 10\,000; (5000, 3750, 3250, 3125, 2000)^T; (1, 1, 1, 1, 2)^T)$$

eine zu E_G äquivalente Instanz. Werden alle Längen durch 125 geteilt, entsteht offensichtlich eine weitere äquivalente Instanz

$$(5; 80; (40, 30, 26, 25, 16)^T; (1, 1, 1, 1, 2)^T).$$

Werden nun alle Längen mit $3/4$ multipliziert und geeignet gerundet, dann entsteht eine weitere äquivalente Instanz

$$E'_G = (5; 60; (30, 22, 20, 19, 12)^T; (1, 1, 1, 1, 2)^T), \quad (1.10)$$

wie leicht bestätigt werden kann. Daß es keine zu E'_G äquivalente Instanz mit noch kleinerer Containergröße und ausschließlich ganzen Zahlen für die Längen w und \mathbf{l} gibt, kann man mit mäßiger Mühe, Modulrechnung (Rechnen mit Kongruenzen) und einigen Ungleichungen zeigen, vgl. auch Abschnitt 2.1. \triangleleft

Gegeben sei eine beliebige Instanz E des d -VPPs mit positiven reellen Längen. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $r \in D$ und $i \in I$ gilt: Ersetzt man w_r durch eine Zahl aus dem halboffenen Intervall $[w_r, w_r + \varepsilon)$ und ℓ_{ir} durch eine Zahl aus $(\ell_{ir} - \varepsilon, \ell_{ir}]$, dann erhält man eine zu E äquivalente Instanz mit positiven reellen Längen. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ kommen also keine weiteren Varianten hinzu,

und $\mathbf{L} > \mathbf{O}$ bleibt gewährleistet. Folglich kann immer eine äquivalente Instanz mit ausschließlich rationalen Längen angegeben werden. Multiplikation aller Längen mit einer geeigneten positiven ganzen Zahl liefert dann ganzzahlige Längen. Es ist damit keine Einschränkung, wenn nur Instanzen mit $\mathbf{L} \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{m \times d}$ und $\mathbf{w} \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^d$ betrachtet werden.

1.5 Eine andere Formulierung von Instanzen im Vektorpackproblem

Sei $\mathbf{e} := (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{N}^m$ der nur aus Einsen bestehenden Vektor. Diese Bezeichnung wird in der gesamten Arbeit verwendet werden, während mit $\mathbf{e}^i, i \in I$ der i -te Basis-Einheitsvektor des \mathbb{R}^m gemeint ist.

In [20] wird gezeigt, daß jede Instanz $E = (m, w, \mathbf{l}, \mathbf{b})$ des 1CSPs als eine Instanz $\bar{E} = (\bar{m}, w, \mathbf{l}, \mathbf{e})$ formuliert werden kann, indem mehrfach zu packende Teile als mehrere verschiedene aufgefaßt werden. z_C und z_D ändern sich nicht. Ebenso kann die Instanz \bar{E} in eine Instanz E mit paarweise voneinander verschiedenen Teilen zurück überführt werden, ohne z_C oder z_D zu beeinflussen. Die in [20] gemachten Überlegungen gelten analog für das d -VPP. Darauf wird später nicht noch einmal eingegangen.

Wenn sehr kleine Bedarfszahlen b_i vorkommen, ist die Relaxation (1.7) oft stärker als die stetige Relaxation (1.6), d. h. $z_C < z_E$ (vgl. S. 8), nicht selten sogar $z_E > \lceil z_C \rceil$. Um auch für deutlich größere \mathbf{b} eine Verschärfung der unteren Schranke für z_D zu erhalten, kann in (1.6) die Bedingung aufgenommen werden, daß eine Variante \mathbf{a} höchstens $c \in \mathbb{N}$ mal gepackt werden darf, wenn $c\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, aber $(c+1)\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}$ wird. Sei z_O der optimale Zielfunktionswert der so mit zusätzlichen oberen Schranken für alle Varianten verschärften Relaxation. Das folgende Beispiel zeigt jedoch, wie aus Instanzen mit $\Delta = z_D - z_C \geq 1$ welche mit $z_D - z_O = \Delta$ konstruiert werden können.

Beispiel: Die Instanz $E = (5; 16; (10, 8, 7, 3, 2)^T; (1, 1, 1, 1, 2)^T)$ des 1CSPs ergibt $z_C = 2$ und $z_D = 3$, also Gap 1. Wegen $z_E = 13/6 > 2$ ist (bei Kenntnis von z_C , aber nicht von z_D) schnell zu erkennen, daß IRUP für E nicht zutrifft, denn $z_D > \lceil z_C \rceil$. In der Optimallösung der stetigen Relaxation (1.6) gilt $x_j \in \{0; 1/2\}$ für alle $j \in J$. Würde \mathbf{b} verdoppelt werden, dann wäre die Optimallösung von (1.6) ganzzahlig. Verdreifacht man jedoch \mathbf{b} , dann entsteht wieder eine Nicht-IRUP-Instanz mit $\lceil z_C \rceil = z_D$. Wird von ihr einmal die Variante $(1, 0, 0, 0, 3)^T$ abgetrennt, dann bleibt die Instanz $E' = (5; 16; (10, 8, 7, 3, 2)^T; (2, 3, 3, 3, 3)^T)$ mit $z_C(E') = z_E(E') = 5 < z_O(E')$; $z_D(E') = 6$ übrig. E' entspricht die Instanz $\bar{E}' = (14; 16; (10, 10, 8, 8, 8, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 2, 2, 2)^T; \mathbf{e})$. Verzehnfachung aller Längen ergibt eine äquivalente Instanz. Damit die Rücküberführung unmöglich gemacht wird, werden einige Teile noch etwas verkürzt, wobei wieder eine äquivalente Instanz aufgestellt wird, nämlich

$$\bar{E}'' = (14; 160; (100, 99, 80, 79, 78, 70, 69, 68, 30, 29, 28, 20, 19, 18)^T; \mathbf{e}).$$

Für diese Instanz gilt $z_C = z_E = z_O = 5$ und $z_D = 6$. ◁

Besitzt die Relaxation (1.6) einer Nicht-IRUP-Instanz $E = (m; \mathbf{w}; \mathbf{L}; \mathbf{b})$ des d -VPPs eine Optimallösung $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}_+^m$, dann sei N der Hauptnenner der Komponenten in \mathbf{x} . Ob

die Instanz $(m; \mathbf{w}; \mathbf{L}; (N + 1)\mathbf{b})$ immer das selbe Gap wie E aufweist, ist leider noch unklar. Deshalb kann auch nicht behauptet werden, daß obige Konstruktion immer Erfolg hat.

1.6 Die revidierte Simplexmethode mit Spaltengenerierung

Um die stetige Relaxation (1.6) des d -VPPs zu lösen, könnte man theoretisch alle zulässigen Varianten aufschreiben und die Simplexmethode anwenden. GILMORE und GOMORY zeigten jedoch an einer nur mittelgroßen Instanz des 1CSPs mit $m = 20$, in welcher jedes Teil 20–40mal in den Container paßt, daß Milliarden von zulässigen Varianten existieren. Von diesen können selbstverständlich viele als unbrauchbar ausgesondert werden, aber selbst dann bleiben noch sehr viele Varianten übrig. In [39] wurde gezeigt, daß es falsch ist, im 1CSP nur Varianten mit mindestens 80% Materialausnutzungsgrad zu betrachten. Aus dieser Not machten GILMORE und GOMORY [9] eine Tugend, indem sie die revidierte Simplexmethode (siehe z. B. [34]) benutzen, dabei mit den einfachsten Varianten beginnen und die besseren je nach Bedarf konstruieren.

In der revidierten Simplexmethode wird nur mit der Inversen der Basismatrix \mathbf{B} , welche jeweils genau m linear unabhängige Varianten der Zuschnittmatrix \mathbf{A} enthält, gerechnet. Die übrigen Spalten von \mathbf{A} werden in der Matrix \mathbf{N} (Nichtbasis) zusammengefaßt. Entsprechend wird der Vektor \mathbf{c} im Problem (1.9) in Basis- und Nichtbasis-Anteil \mathbf{c}_B bzw. \mathbf{c}_N aufgeteilt. Damit geht die Aufgabe (1.9) in

$$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \rightarrow \min! \quad \text{bei} \quad \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$$

über. Auflösung nach \mathbf{x}_B ergibt $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N$ und damit $z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N$. Wegen $\mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$ ist eine Reduktion von z nur dann möglich, wenn der Zeilenvektor in der Klammer eine negative Komponente enthält. Der Vektor $\mathbf{g} := (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1})^T$ gibt an, wie wertvoll jedes Teil für eine eventuelle Verbesserung von z ist. Im Vektorpackproblem (1.3) gilt $\mathbf{c}_N = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{n-m}$ und $\mathbf{c}_B = \mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$. Es ist folglich zu prüfen, ob \mathbf{N} eine Spalte \mathbf{a} mit $\mathbf{g}^T \mathbf{a} > 1$ enthält. Wenn nicht, dann ist kein weiterer Abstieg möglich. Die Überprüfung dieser Bedingung bedeutet wegen $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^m$ und der Zulässigkeitsbedingung (1.2) die näherungsweise oder exakte Lösung eines ganzzahligen linearen Optimierungsproblems, im Fall $d = 1$ eines Rucksackproblems. Bei $d > 1$ wird aufgrund der Struktur, die sich wegen $\mathbf{L} > \mathbf{0}$ ergibt, auch vom *mehrdimensionalen Rucksackproblem* gesprochen. Die Konstruktion geeigneter Vektoren \mathbf{a} heißt Spaltengenerierung.

Für mehrdimensionale binäre Rucksackprobleme, in denen also jede Variable nur 0 oder 1 sein darf, gibt es sehr effiziente Algorithmen [23], die zuerst ermitteln, welche Variablen offensichtlich 0 oder 1 sein müssen, um optimal zu sein. Die verbleibende Restinstanz ist dann wesentlich kleiner und kann exakt gelöst werden. Nichtbeschränkte Variablen könnte man zwar durch viele binäre ersetzen, die Effizienz der Verfahren ginge aber verloren.

Obwohl ein- und mehrdimensionale Rucksackprobleme mittels dynamischer Optimierung (siehe z. B. [2, 12]) pseudopolynomial lösbar sind, ist der Aufwand bei $d > 1$

im allgemeinen zu hoch, und eine Überführung in den eindimensionalen Fall mittels Aggregation (vgl. [25]) verkomplizierte das Problem nur noch wesentlich. Von Näherungsverfahren ist abzuraten, weil dann oft wesentlich mehr Simplexschritte erforderlich werden. Es bleibt noch die direkte Behandlung als allgemeines ganzzahliges lineares Optimierungsproblem als Lösungsmöglichkeit.

Bei Anwendung der (revidierten oder auch der gewöhnlichen) Simplexmethode kann es vorkommen, daß Entartung eintritt, nach mehreren Austauschschritten wieder die selbe Variante generiert wird, nach ihrem Eintauschen die selbe Basis wie einige Schritte zuvor entsteht und zyklisch immer wieder die selben zu einer entarteten Ecke gehörenden Basislösungen durchlaufen werden. Entgegen [3] passiert dies im mehrdimensionalen Vektorpackproblem oft, wenn keine Gegenmaßnahme getroffen wird. In der primalen Simplexmethode gibt es prinzipiell diese Möglichkeiten der Zyklenvermeidung:

1. Es werden zusätzliche Spalten zum Simplexschema hinzugenommen, und im Entartungsfall werden die Auswahlregeln der Simplexmethode im Sinne der Lexikographie erweitert, siehe z. B. [3].
2. Unter den möglichen zu tauschenden Zeilen wird „zufällig“ gewählt. Damit werden Zyklen sehr unwahrscheinlich.
3. Man wählt gemäß R. G. BLAND eine Spalte mit minimalem Formkoeffizienten, in der revidierten Simplexmethode also eine zulässige Variante \mathbf{a} mit maximalem Wert $\mathbf{g}^T \mathbf{a}$, und unter den dann wählbaren Zeilen immer diejenige, die die Variable mit minimalem Index enthält [33]. Der Beweis, daß dann keine Basis wiederholt wird, ist z. B. in [24] zu finden.

Entsprechend wird in der dualen Simplexmethode verfahren. Die erste Methode wird in Schnittebenenverfahren nach GOMORY [10] bevorzugt eingesetzt, ist jedoch wegen der zusätzlichen Spalten und des lexikographischen Vergleichs von Vektoren ziemlich aufwendig. Soll gleichzeitig die Technik der oberen Schranken benutzt werden, dann kann wegen der Komplementbildung die Lexikographie nicht streng durchgehalten werden, so daß die Endlichkeit des Verfahrens nicht mehr gewährleistet ist. Die zweite Methode scheint sicher zu sein, aber ein zufälliges Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0 braucht trotzdem nicht unmöglich sein. Die Regel von BLAND ist einfach zu implementieren und erfordert höchstens einen zusätzlichen Vektor für die Indizes der Basis- und Nichtbasisvariablen. Da bei Verwendung dieser Methode niemals eine Basis wieder benutzt wird und der zulässige Bereich der linearen Optimierungsaufgabe nur endlich viele Ecken hat, ist die Simplexmethode mit Zyklenvermeidung nach BLAND endlich.

Um diese Regel in der revidierten Simplexmethode nutzen zu können, sind folglich alle generierten Spalten abzuspeichern und mit einem Index zu versehen, als wievielte Spalte diese Variante generiert wurde. Mit den abgespeicherten Varianten kann zuletzt auch die vollständige Lösung der Relaxation (1.6) angegeben werden. Bevor eine neue Spalte generiert wird, ist zunächst zu prüfen, ob eine der bereits abgespeicherten Spalten die Bedingung $\mathbf{g}^T \mathbf{a} > 1$ befriedigt. Nur wenn das nicht der Fall ist, ist eine neue Spalte zu generieren. Aufgrund der Regel von BLAND bedeutet das, daß

zuerst immer eine im Rahmen der zuvor ermittelten Varianten „optimale“ Lösung von (1.6) bestimmt worden ist. Die Spaltengenerierung ergibt dann eine neue Variante mit negativem transformierten Zielfunktionskoeffizienten, so daß im Rahmen der dann vorhandenen Spalten wieder genau die Forderungen von BLAND befolgt werden. Folglich ist das Gesamtverfahren garantiert endlich.

Beispiel: Von eindimensionalem Ausgangsmaterial der Länge 11 sind in besonders hoher Stückzahl Teile der Längen 6, 4 und 1 zu schneiden, und zwar im Verhältnis 2 : 2 : 1. Die Materialausnutzung ist zu maximieren. Das bedeutet, hier ist eine Optimallösung der stetigen Relaxation (1.6) von der Instanz $(3; 11; (6, 4, 1)^T; (2, 2, 1)^T)$ gesucht. Für die erste Basis werden maximale elementare Varianten gewählt, das sind $\mathbf{a}^1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{a}^2 = (0, 2, 0)^T$ und $\mathbf{a}^3 = (0, 0, 11)^T$, so daß \mathbf{B} anfangs eine Diagonalmatrix ist. Es ergeben sich die nachfolgenden revidierten Simplexschemata, unter denen die neue Variante angegeben ist. Die Pivotelemente sind jeweils eingerahmt. Aus Gründen der einfacheren Programmierung werden die „rechten Seiten“ und der Vektor $\mathbf{g} = \mathbf{B}^{-1T}\mathbf{e}$ in der ersten Spalte bzw. Zeile untergebracht. (Üblicherweise werden diese Größen in die vorletzte Spalte und letzte Zeile geschrieben.) Ganz rechts steht jeweils die transformierte neue Spalte.

S_0	1					S_1	1					S_2	1			
z	$\frac{34}{11}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{13}{22}$	z	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	z	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_1	2	1			-1	x_1	1	1	-1		-1	x_5	1	1	-1	
x_2	1		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	x_2	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
x_3	$\frac{1}{11}$			$\frac{1}{11}$		x_4	1		1	0	0	x_4	1			1
$\mathbf{a}^4 = (1, 1, 1)^T$						$\mathbf{a}^5 = (1, 1, 0)^T$						optimal				

Die Varianten \mathbf{a}^4 und \mathbf{a}^5 sind folglich im Verhältnis 1 : 1 zu schneiden. Beim letzten Austausch war x_1 (und nicht x_2) aus der Basis zu tauschen, um der Regel von BLAND zu gehorchen. Obwohl dieses Beispiel akademisch aussehen mag, zeigt es, daß auch negative Werte g_i ($i \in I$) im Laufe der Rechnung auftreten können, wenn die Bedarfswerte geeignet vorgegeben waren. Soll die Relaxation (1.7) gelöst werden, dann kann dieser Effekt noch wesentlich stärker auftreten. Im Spaltengenerierungsproblem ist die Verwendung jener Teile dann verboten, so daß sich die Aufgabe vereinfacht. <

Wird die revidierte Simplexmethode im 1CSP benutzt, dann ist zu beobachten, daß die spezifischen Werte der Teile, also g_i/l_i , $i \in I$, sich jeweils einem Wert annähern, der um so größer ist, je schwieriger das Teil passend verwendet werden kann. Im d -VPP ist das analog, so daß die Methode „branch and bound“ (b & b) für die Spaltengenerierungsprobleme immer schwieriger werden kann.

Nach jedem Austauschschritt kann überprüft werden, ob die Basisinverse noch hinreichend genau ist. Gegebenenfalls muß völlig neu invertiert werden. Ein einfacherer Test ist die Prüfung von $z_C = \mathbf{e}^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{g}^T\mathbf{b}$, d. h. es werden nur die 1-Spalte und die Zeile \mathbf{g} der Teilebewertungen geprüft. Außerdem können infolge Rundungsfehlern in der 1-Spalte negative Einträge (nahe null) entstehen. Deren Beträge können nach mehreren Multiplikationen und anderen Umformungen des Simplexschemas sehr groß werden. Die Ergebnisse sind dann unbrauchbar, z. B. könnte $z_C < z_M$ im Widerspruch zu Aussage 1, S. 11, ermittelt werden, wenn eine verschnittbehaftete Variante -6000 -

mal gefertigt werden sollte. Um diesen Effekt zu verhindern, sind negative Einträge in der 1-Spalte spätestens vor dem nächsten Austauschschritt durch 0 zu ersetzen.

Ist ein Vektorpackproblem mit unterschiedlich großen Containern und unterschiedlichen Preisen für die Container zu bearbeiten, dann kann für die erste Basis angenommen werden, daß jedes Teil gesondert in einen fiktiven Container mit extrem hohem Preis gepackt wird. Die Spaltengenerierung muß dann für jeden vorhandenen Containertyp berechnen, ob eine Verbesserung möglich ist. Anstelle $\mathbf{g}^T \mathbf{a} > 1$ muß dann $\mathbf{g}^T \mathbf{a} > p$ gelten, wenn p der Preis des jeweiligen Containers ist. Wenn die Aufgabe trotz Vorratsbeschränkungen für die Container lösbar ist, werden alle fiktiven Container durch tatsächlich vorhandene ersetzt. Diese Idee kann auch auf Plattenzuschnittprobleme und andere angewandt werden, vgl. [39].

1.7 Abspaltung des ganzzahligen Teils der Optimallösung der stetigen Relaxation

Für theoretische Überlegungen ist es oft nützlich, eine vorgegebene Instanz zu vereinfachen, indem einzelne eigentliche Varianten abgetrennt werden. Die damit zusammenhängenden Effekte sind Thema dieses Abschnitts.

Eine Instanz heißt *irreduzibel*, wenn keine eigentliche Variante \mathbf{a} abgetrennt (bzw. \mathbf{b} durch $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ersetzt) werden kann, so daß $\lceil z_C \rceil$ abnimmt. Andernfalls heißt die Instanz *reduzierbar*.

Wenn $z_C \in \mathbb{N}$ ist und infolge der Reduktion z_D sinkt, dann ändert sich das Gap nicht, weil sowohl z_C als auch z_D um je 1 abnehmen. Jede IRUP-Instanz (mit $z_C > 0$) ist reduzierbar; viele Nicht-IRUP-Instanzen sind es auch, z. B. wenn es eine Optimallösung von (1.6) mit einer Häufigkeit $x_j \geq 1$ gibt.

Die revidierte Simplexmethode habe eine Lösung $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}_+^m$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{o}$ der stetigen Relaxation (1.6) ergeben. $\lfloor \mathbf{x}_B \rfloor$ bezeichne den ganzzahligen Teil des Vektors \mathbf{x}_B , d. h. in allen nicht ganzzahligen Komponenten wurde auf die nächste ganze Zahl abgerundet. Die Instanz

$$E^{(r)} := (m; \mathbf{w}; \mathbf{L}; \mathbf{b} - \mathbf{A} \lfloor \mathbf{x}_B \rfloor) \quad (1.11)$$

heißt *residuale Instanz*. Wenn eine ganzzahlige Lösung von $E^{(r)}$ bekannt ist, kann sofort eine ganzzahlige, nicht notwendig optimale, Lösung der Instanz E bestimmt werden. Es gilt $z_C(E) - z_C(E^{(r)}) = \sum_{j \in J} \lfloor x_j \rfloor \in \mathbb{N}$ und für das Gap $\Delta(E) \leq \Delta(E^{(r)})$.

Der für das 1CSP erbrachte Beweis [21] kann ohne Änderungen auf das d -VPP übertragen werden. Es gibt Instanzen E , bei denen $\Delta(E^{(r)})$ von der gewählten Basislösung abhängt und solche, wo keine Wahl besteht und $\Delta(E^{(r)}) = 1 + \Delta(E)$ gilt.

Beispiel 1: Sei $d = 1$. Für $E_1 := (4; 924; (308, 231, 132, 84)^T; (2, 3, 7, 6)^T)$ ist die Optimallösung von (1.6) eindeutig. Die Varianten $\mathbf{a}^1 = (3, 0, 0, 0)^T = 3\mathbf{e}^1$, $\mathbf{a}^2 = 4\mathbf{e}^2$, $\mathbf{a}^3 = 7\mathbf{e}^3$ und $\mathbf{a}^4 = 11\mathbf{e}^4$ werden $x_1 = 2/3$, $x_2 = 3/4$, $x_3 = 1$ und $x_4 = 6/11$ mal in (1.6) gefertigt. Es gilt $z_C(E_1) = z_M(E_1) = 3 - 5/132$. Eine Optimallösung von (1.3) ergibt sich mit $\mathbf{a}^5 = (2, 0, 1, 2)^T$ mit Verschnitt 8, $\mathbf{a}^6 = (0, 3, 1, 1)^T$ mit Verschnitt 15 und $\mathbf{a}^7 = (0, 0, 5, 3)^T$ mit Verschnitt 12, indem diese Varianten je einmal gepackt wer-

den. Damit gilt $z_D(E_1) = 3$ und $\Delta(E_1) = 5/132$. Wird jedoch einmal die Variante \mathbf{a}^3 abgetrennt, dann bleibt eine residuale Instanz $(4; 924; (308, 231, 132, 84)^T; (2, 3, 0, 6)^T)$ mit Gap $137/132$ übrig, die gleichwertig zu $E_{ST} = (3; 132; (44, 33, 12)^T; (2, 3, 6)^T)$ ist, vgl. [27, 28]. \triangleleft

Beispiel 2: Sei $d = 1$. Die Instanz $E_2 := (4; 396; (132, 99, 44, 36)^T; (2, 3, 9, 6)^T)$ besitzt eine Optimallösung von (1.6) analog zum ersten Beispiel, nämlich $z_C(E_2) = z_M(E_2) = 3 - 5/132$, $x_1 = 2/3$, $x_2 = 3/4$, $x_3 = 1$, $x_4 = 6/11$ bei Wahl der Varianten $\mathbf{a}^1 = 3\mathbf{e}^1$, $\mathbf{a}^2 = 4\mathbf{e}^2$, $\mathbf{a}^3 = 9\mathbf{e}^3$ und $\mathbf{a}^4 = 11\mathbf{e}^4$. Wird einmal die Variante \mathbf{a}^3 von der Instanz abgetrennt, dann bleibt eine residuale Instanz mit Gap $137/132$ analog zum ersten Beispiel übrig, vgl. [30]. Jedoch gibt es eine andere optimale Basislösung der stetigen Relaxation (1.6), nämlich $\mathbf{a}^5 = (2, 0, 3, 0)^T$, $\mathbf{a}^2 = 4\mathbf{e}^2$, $\mathbf{a}^3 = 9\mathbf{e}^3$ und $\mathbf{a}^4 = 11\mathbf{e}^4$ in den Häufigkeiten $x_5 = 1$, $x_2 = 3/4$, $x_3 = 2/3$ und $x_4 = 6/11$ mal in (1.6) zu packen. Für die verbleibende residuale Instanz bleibt das Gap bei $5/132$, denn die Varianten $\mathbf{a}^6 = (0, 2, 2, 3)^T$ mit Verschnitt 2 und $\mathbf{a}^7 = (0, 1, 4, 3)^T$ mit Verschnitt 13 können je einmal gefertigt werden, um den Auftrag zu erfüllen. \triangleleft

In diesen Beispielen hätte die Relaxation (1.7) nicht zu einer residualen Instanz mit größerem Gap gegenüber der Ausgangsinstanz geführt. Im allgemeinen darf man das aber nicht erwarten. Das folgende Lemma über residuale Instanzen wird in den folgenden Kapiteln wiederholt verwendet werden.

Lemma 1: Seien $p, q \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ beliebig. Dann gilt für residuale Instanzen (1.11) des d -VPPs die Implikation

$$z_D(E^{(r)}) < p * z_C(E^{(r)}) + q \implies \Delta(E^{(r)}) < \frac{p-1}{p} * m + \frac{q}{p} = m * \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{q}{p}.$$

Beweis: Die stetige Relaxation (1.6) kann mit der revidierten Simplexmethode gelöst werden. Dann sind nur m Varianten in der Basis. Nach Voraussetzung gibt es eine optimale Basislösung, in der jede Variante \mathbf{a}^j eine Häufigkeit $x_j < 1$ hat. Einen ganzzahligen Zuschnittplan mit Überproduktionen erhält man aus der Optimallösung der Relaxation (1.6) durch einfaches Aufrunden. Das ergibt $z_D(E^{(r)}) \leq m$ und somit

$$\Delta(E^{(r)}) \leq m - z_C(E^{(r)}). \quad (1.12)$$

Nach Voraussetzung gilt $\Delta(E^{(r)}) < (p-1) * z_C(E^{(r)}) + q$. Addition des $(p-1)$ -fachen der Ungleichung (1.12) ergibt $p * \Delta(E^{(r)}) < (p-1) * m + q$. Division durch p liefert die Behauptung. \square

Die folgende Abschätzung des Gaps ist zwar sehr schwach, wird aber später zur Herleitung besserer Schranken gebraucht werden.

Aussage 2: Für jede Instanz $E = (m; \mathbf{w}; \mathbf{L}; \mathbf{b})$ des d -VPPs gilt $\Delta(E) < \max\{1, m-1\}$.

Beweis: Sei $E^{(r)}$ residuale Instanz zu E . Gilt $z_C(E^{(r)}) > 1$, dann folgt sofort aus $\Delta(E) \leq \Delta(E^{(r)})$ und Abschätzung (1.12) die Behauptung. Andernfalls ist $z_M(E^{(r)}) \leq z_C(E^{(r)}) \leq 1$, so daß in $E^{(r)}$ alle geforderten Teile in einen Container passen, d. h. $z_D(E^{(r)}) \in \{0; 1\}$. Bei $z_D(E^{(r)}) = 1$ ist auch $z_C(E^{(r)}) > 0$, so daß das Gap kleiner als 1 wird. \square

Da die exakte Lösung einer Instanz des d -VPPs mitunter sehr schwierig ist, kommen Heuristiken in Betracht. Eine relativ erfolgreiche, zuerst die Relaxation (1.7) zu lösen,

den ganzzahligen Teil von \mathbf{x} abzuspalten und danach die residuale Instanz weiter zu bearbeiten, ist im Abschnitt 5.3 für einen Spezialfall des d -VPPs angegeben.

Eine andere Heuristik, ausschließlich mit den Basisvarianten der Relaxation (1.6) oder (1.7) alle Teile mindestens in den geforderten Anzahlen zu packen, wobei Überproduktion erlaubt werden muß, liefert ziemlich schlechte Ergebnisse. Selbst wenn für die Bestimmung der „optimalen“ ganzzahligen Häufigkeiten x_j dieser Varianten exakte Verfahren eingesetzt werden, wird der erreichte Zielfunktionswert z trotz des großen Aufwandes meist deutlich größer sein als z_C , z_E und z_D . Diese Heuristik sollte nur dann in Erwägung gezogen werden, wenn mit möglichst wenigen verschiedenen Varianten der Auftrag, ggf. mit Überproduktion, erfüllt werden soll, weil die Umstellung der Fertigungsanlage auf eine andere Variante lange dauert und deshalb besonders kostspielig ist.

1.8 Schnittebenenverfahren

Es werde das ganzzahlige lineare Optimierungsproblem (1.9) mit $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^m$, $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ betrachtet. Sei

$$P := \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}, \quad Q := \text{conv}(P), \quad R := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

Für die Lösung von (1.9) hat GOMORY Verfahren entwickelt, die durch Hinzufügen weiterer Nebenbedingungen in Ungleichungsform nach und nach nicht ganzzahlige Ecken von der konvexen polyedrischen Menge R abschneiden, bis die Unlösbarkeit feststeht oder eine Optimallösung des ganzzahligen Problems (1.9) gefunden wurde [10]. Bei Beachtung bestimmter Verfahrensvorschriften ist die Endlichkeit seiner Algorithmen erwiesen. Die Schnitte, die eine nicht ganzzahlige Lösung der stetigen Relaxation zu (1.9) von Q trennen, können oft noch verschärft werden [25]. Ein Schnitt, der von R keine Facette, sondern nur eine Randfläche niedrigerer Dimension abschneidet, kann stets verschärft werden. Diese Überlegung kann auch auf Zuschnittprobleme angewandt werden [31], jedoch besteht die Hauptschwierigkeit der Schnittkonstruktion darin, daß von der gesamten Matrix \mathbf{A} meist nur wenige Spalten bekannt sind. Deren Indizes mögen die Menge J' bilden.

Zuerst wird $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min!$ bei $\mathbf{x} \in R$ gelöst. Ist die Lösung \mathbf{x} nicht ganzzahlig, dann werden Schnittbedingungen, die sich nur auf die Spalten $j \in J'$ von \mathbf{A} beziehen, hinzugefügt. Diejenigen $\mathbf{x} \in R$, die diese Schnittbedingungen erfüllen, bilden ein Polyeder R' mit $Q \subseteq R'$. Die Schnittbedingungen sind so gewählt, daß eine ganzzahlige Lösung $\bar{\mathbf{x}}$ von

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min! \quad \text{bei} \quad \mathbf{x} \in R', \quad x_j = 0 \quad \forall j \notin J' \tag{1.13}$$

gefunden werden kann. Ist $\mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} = \lceil z_E \rceil$, dann ist $\bar{\mathbf{x}}$ offensichtlich optimal für (1.9). Andernfalls wird nach weiteren geeigneten Spalten von \mathbf{A} gesucht, deren Indizes auch in J' aufgenommen werden, und die Aufgabe (1.13) wird wieder gelöst. Kann nachgewiesen werden, daß auch für $J' = J$, wenn also alle Spalten von \mathbf{A} für die Minimierung in (1.13) verwendet werden dürfen, der optimale Zielfunktionswert von (1.13) größer als $\lfloor \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \rfloor$ ist, dann ist

$$u := \lfloor \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{x}} \rfloor$$

eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert von (1.9), und die Optimierung kann beendet werden, sobald ein $\mathbf{x} \in P$ mit $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = u$ bekannt ist.

Wenn nach der Spaltengenerierung unter Berücksichtigung der Schnittbedingungen die Lösung von (1.13) ein nicht ganzzahliges $\mathbf{x} \in R'$ mit $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq u$ ergab, dann werden weitere Schnitte hinzugefügt, bis eine ganzzahlige Lösung von (1.13) bei entsprechend eingeschränktem R' gefunden wurde. Dann wird wieder geprüft, ob Optimalität vorliegt. Wenn nicht, werden weitere Spalten generiert usw. usf. Oft können Schnittbedingungen wieder verworfen werden, weil sie aufgrund anderer hinzugenommener Schnitte überflüssig wurden.

Dieses Verfahren wurde von A. MÜLLER unter Anleitung von G. SCHEITHAUER und J. TERNO erarbeitet [17] und unter Mitarbeit von G. BELOV verbessert [32]. Damit steht nun ein wirkungsvolles Verfahren zur exakten Lösung des 1CSPs als Alternative zu b & b zur Verfügung.

In der Spaltengenerierung zum d -VPP sind d -dimensionale Rucksackprobleme zu lösen, vgl. Abschnitt 1.6. Das sind ganzzahlige lineare Optimierungsprobleme, in denen die gesamte Koeffizientenmatrix von Anfang an bekannt ist. Folglich könnten die Schnittebenenverfahren von GOMORY eingesetzt werden. Dabei besteht jedoch immer die Schwierigkeit, zu entscheiden, ob eine Variable als ganzzahlig anzusehen ist oder nicht. Bei b & b sind die Auswirkungen dieser Problematik nicht immer so kraß.

Ist \mathbf{L} ganzzahlig, dann ist es einfach, ein lexikographisch positives, dual zulässiges, erweitertes Simplexschema aufzustellen, welches außer in der ersten Zeile, der z -Zeile, die die Formkoeffizienten für die Zielfunktion des Generierungsproblems enthält, nur ganzzahlige Einträge besitzt. Da das Pivotelement niemals aus der z -Zeile genommen wird, kann der dritte Algorithmus von GOMORY, der nur mit ganzen Zahlen rechnet (Prozedur ALLINTEGER aus [38], S. 92f) zwar entsprechend angepaßt werden, jedoch ist die Entscheidung, ob ein Element der z -Zeile null ist oder nicht, sehr schwer zu treffen, weil durch Linearkombinationen der Spalten positive Elemente entstehen können, die sehr nah an 0 sind. Rundungsfehler in der z -Zeile führten dann trotz mehrerer Abhilfe-Versuche regelmäßig zu Endlosschleifen in der praktischen Rechnung. Solche Schwierigkeiten traten bei b & b nicht auf.

Es wäre auch möglich, anstelle $\mathbf{g}^T \mathbf{a} > 1$ bei $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^m$, $\mathbf{L}^T \mathbf{a} \leq \mathbf{w}$ gemäß der Zulässigkeitsbedingung (1.2) das Problem $(\lambda \mathbf{g})^T \mathbf{a} > \lambda$ unter den selben Nebenbedingungen auf Lösbarkeit zu untersuchen, wobei $\lambda > 0$ so gewählt sei, daß $\lambda \mathbf{g}$ ganzzahlig ist. Das wäre bei $\lambda = |\det \mathbf{B}|$ (mit der Basismatrix \mathbf{B} , vgl. Abschnitt 1.6) gewiß der Fall, jedoch ist $|\det \mathbf{B}|$ meist sehr groß, z. B. ergibt das Fünffache der Einheitsmatrix die Determinante 5^m . Es reicht aber in diesem Beispiel völlig aus, $\lambda = 5$ zu setzen. Geeignete, möglichst kleine λ können aus der Gleichung $\mathbf{B}^T \mathbf{g} = \mathbf{e}$ bestimmt werden, indem der Satz über die HERMITE-Normalform und die Lösbarkeit diophantischer Gleichungssysteme nebst Lösungsdarstellung benutzt wird. Trotzdem ist nicht auszuschließen, daß λ sehr groß gewählt werden muß, weil viele verschiedene Primfaktoren auftreten. In so einem Fall ist mit dem Überlaufen des Zahlenbereichs der Rechenanlage zu rechnen, so daß das Verfahren versagt. Alternativ könnten Bibliotheken für sehr große ganze Zahlen benutzt werden, doch der Aufwand erscheint nicht gerechtfertigt, da b & b sich gegenüber Gomorys drittem Schnittebenenverfahren bewährt hat.

Kapitel 2

Das eindimensionale Problem

In diesem Kapitel werden weitere theoretische Grundlagen zur Untersuchung des Gaps im 1CSP gelegt, die nicht oder nur bedingt auf das d -VPP mit $d \geq 2$ übertragen werden können. Mit Ausnahme des Abschnitts 2.3 und der Schrankenverschärfungen in den Abschnitten 2.2 und 2.4 sowie den daraus abgeleiteten Folgerungen sind die hier vorgestellten Ideen bereits in [26] und [27] zu finden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß alle Teile nach fallenden Längen sortiert sind, d. h.

$$\ell_1 > \ell_2 > \dots > \ell_m > 0 \quad (2.1)$$

2.1 Dominanz von Varianten

Die Aussagen dieses Abschnitts und deren hier nicht angeführte Beweise finden sich in ähnlicher Form in [26] und dienen als Ergänzung zu Abschnitt 1.4. J sei wie in Kapitel 1 die Indexmenge aller zulässigen Varianten.

Aussage 3: Die zu einer Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ des 1CSPs mit beliebigen reellen Längen $\ell_i \in (0, w]$ äquivalenten Instanzen bilden einen Kegel $K(E)$ in folgendem Sinn: $E, E' \in K(E), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \implies \lambda E := (m; \lambda w; \lambda \mathbf{l}; \mathbf{b}) \in K(E)$ und $(E + E') := (m; w + w'; \mathbf{l} + \mathbf{l}'; \mathbf{b}) \in K(E)$. Diese Aussage ist im 2-VPP nicht mehr gültig.

Beweis: \mathbf{a} sei eine beliebige zulässige Variante von E , während für $\mathbf{u} \in N^m$ das nicht gelte, d. h. $\mathbf{l}^T \mathbf{u} > w$. Für alle zu E äquivalenten Instanzen E' ist dann auch $\mathbf{l}'^T \mathbf{a} \leq w' < \mathbf{l}'^T \mathbf{u}$ laut Definition der Äquivalenz. Offensichtlich gilt $\lambda \mathbf{l}'^T \mathbf{a} \leq \lambda w' < \lambda \mathbf{l}'^T \mathbf{u}$ für alle $\lambda > 0$, d. h. $\lambda E' \in K(E)$. Entsprechend folgt aus $E, E' \in K(E)$ im 1CSP stets $(\mathbf{l} + \mathbf{l}')^T \mathbf{a} \leq w + w' < (\mathbf{l} + \mathbf{l}')^T \mathbf{u}$. Im 2-VPP ist eine dazu analoge Aussage aber falsch, z. B. seien mit $m = 1$ nur die Nullvariante und die Variante \mathbf{e} zulässig. Zwei derartige Instanzen sind $E = (1; (3, 3)^T; (2, 1); 1)$ und $E' = (1; (3, 3)^T; (1, 2); 1)$. Für $(E + E') := (1; (6, 6)^T; (3, 3); 1)$ wäre jedoch auch die Variante $2\mathbf{e}$ zulässig. \square

Aussage 4: Seien $\bar{\mathbf{a}}^1, \dots, \bar{\mathbf{a}}^n$ alle maximalen Varianten der Instanz $\bar{E} = (m; \bar{w}; \bar{\mathbf{l}}; \mathbf{b})$, wobei alle Teile nach fallenden Längen sortiert seien, so daß eine zu (2.1) analoge Aussage gilt. Dann ist die Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ genau dann äquivalent zu \bar{E} , wenn $w \geq \ell_1$ sowie die Ungleichungskette (2.1) und für $j = 1, \dots, n$ auch die folgende

Ungleichung wahr sind:

$$\mathbf{l}^T \bar{\mathbf{a}}^j \leq w < \mathbf{l}^T (\bar{\mathbf{a}}^j + \mathbf{e}^m)$$

Viele dieser Ungleichungen werden wegen (2.1) automatisch erfüllt, denn wenn in einer zulässigen Variante \mathbf{a} einige Teile durch kürzere ersetzt oder weggelassen werden, dann entsteht offensichtlich wieder eine zulässige Variante $\bar{\mathbf{a}}$. Das kommt in den folgenden Definitionen zum Ausdruck, vgl. [26].

Eine Variante \mathbf{a} *dominiert* die Variante $\bar{\mathbf{a}}$, in Zeichen $\mathbf{a} >_d \bar{\mathbf{a}}$, wenn für alle $\mathbf{l} \in \mathbb{R}_+^m$, die die Ungleichungskette (2.1) erfüllen, $\mathbf{l}^T (\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}) > 0$ gilt. Eine zulässige Variante \mathbf{a} heißt *dominant*, wenn es keine zulässige Variante $\bar{\mathbf{a}}$ mit $\bar{\mathbf{a}} >_d \mathbf{a}$ gibt. Eine maximale Variante $\bar{\mathbf{a}}$ heißt *nichtdominant*, wenn es keine maximale Variante \mathbf{a} mit $\bar{\mathbf{a}} >_d \mathbf{a}$ gibt.

Aussage 5: Seien zulässige Varianten \mathbf{a} und $\bar{\mathbf{a}}$ gegeben. Mit der Bezeichnung I gemäß (1.1) gilt $\mathbf{a} >_d \bar{\mathbf{a}}$ genau dann, wenn folgende Aussage wahr ist:

$$(\forall i \in I \text{ gilt } \sum_{j=1}^i (a_j - \bar{a}_j) \geq 0) \quad \wedge \quad (\exists i \in I \text{ mit } \sum_{j=1}^i (a_j - \bar{a}_j) > 0)$$

Aussage 6: Bei vorgegebenen w und \mathbf{l} ist die zulässige Variante \mathbf{a} genau dann dominant, wenn gilt:

$$w - \mathbf{l}^T \mathbf{a} < \min\{\ell_m, \ell_{i-1} - \ell_i : a_i > 0, i \in I \setminus \{1\}\} \quad (2.2)$$

Beweisidee: Falls (2.2) nicht gilt, kann eine dominierende Variante konstruiert werden, indem noch ein Teil m eingefügt oder ein Teil durch ein größeres ersetzt wird. Entsprechende Ersetzungen können in einer nicht dominanten Variante vorgenommen werden, bis die Ungleichung (2.2) gilt. Der vollständige Beweis ist in [26] angegeben. \square

Aussage 7: Seien $\ell_1 \leq w$ und die Ungleichungskette (2.1) erfüllt. \mathbf{l} und w genügen der Bedingung $\mathbf{l}^T \mathbf{a}^j \leq w$ für alle $j \in J$ dann und nur dann, wenn $\mathbf{l}^T \mathbf{a} \leq w$ für jede dominante Variante \mathbf{a} gilt. $\mathbf{l}^T (\bar{\mathbf{a}}^j + \mathbf{e}^m) > w$ gilt für alle $j \in J$ genau dann, wenn $\mathbf{l}^T (\bar{\mathbf{a}} + \mathbf{e}^m) > w$ für jede nichtdominante Variante $\bar{\mathbf{a}}$ gilt.

Wenn (2.1) erfüllt ist, kann folglich die Zuschnittmatrix für eine bestimmte Instanz des 1CSPs bis auf Spaltenpermutationen alleine aus der Kenntnis aller dominanten und nichtdominanten Varianten abgeleitet werden. So gibt es z. B. in der von T. GAU/G. WÄSCHER angegebenen Instanz E_G genau 41 zulässige Varianten, davon 20 maximale, 7 dominante und 5 nichtdominante, so daß alle zulässigen Varianten alleine durch die Ungleichungskette (2.1) und die folgenden zwölf Ungleichungen vollständig charakterisiert sind. Da sowohl E_G als auch die Instanz (1.10) das System erfüllen, sind beide Instanzen äquivalent. Bei der Lösung von (1.3), (1.6) oder (1.7) müssen dennoch alle zulässigen bzw. eigentlichen Varianten betrachtet werden.

$$\begin{array}{rcll} 2\ell_1 & & \leq & w \\ \ell_1 & + 2\ell_5 & \leq & w \quad \ell_1 + \ell_4 + \ell_5 > w \\ 2\ell_2 & + \ell_5 & \leq & w \quad \ell_1 \quad + \quad 3\ell_5 > w \\ \ell_2 & + 2\ell_4 & \leq & w, \quad 2\ell_4 + 2\ell_5 > w \\ \ell_2 & + 3\ell_5 & \leq & w \quad \ell_4 + 4\ell_5 > w \\ 3\ell_3 & & \leq & w \quad 6\ell_5 > w \\ & 5\ell_5 & \leq & w \end{array}$$

2.2 Der Teilbarkeitsfall

Der *Teilbarkeitsfall* ist dadurch definiert, daß $w/\ell_i \in \mathbb{N}$ für alle $i \in I$ gilt. In diesem Fall konnte MIRUP bewiesen werden. Der Beweis von O. MARCOTTE [14] war deutlich komplizierter als der von G. SCHEITHAUER und J. TERNO [28], welcher hier in ähnlicher Form wiedergegeben wird, um die angegebene Schranke zu verschärfen. Für $i \in I$ bezeichnet $k_i := \lfloor w/\ell_i \rfloor$ den *Typ* des Teils i . Jedes Teil kann also alleine so oft in den Container gepackt werden, wie sein Typ angibt. Für jede Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ des Teilbarkeitsfalls gilt somit $z_C = z_M = \sum_{i \in I} b_i/k_i$ sowie die Äquivalenz $\mathbf{l}^T \mathbf{a} \leq w \iff \sum_{i \in I} a_i/k_i \leq 1$ wegen $\ell_i = w/k_i \forall i \in I$.

Aussage 8: Sei eine Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ des Teilbarkeitsfalls mit $w/\ell_i = k_i \in \mathbb{N}$ und $0 \leq b_i \leq k_i$ für $i = 1, \dots, m$ gegeben. Dann gibt es $\lceil z_C \rceil + 1$ Vektoren $\mathbf{a}^j \in \mathbb{N}^m$ mit

$$\sum_{j=1}^{\lceil z_C \rceil + 1} a_{ij} = b_i \quad \forall i \in I. \quad (2.3)$$

Beweis mittels vollständiger Induktion, vgl. [28]: Für $m = 1$ ist die Behauptung (2.3) mit $a_{11} = b_1$ und $a_{12} = 0$ erfüllt. Für festes $m = u \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei

$$\gamma_u := \left\lceil \sum_{i=1}^u \frac{b_i}{k_i} \right\rceil, \quad (2.4)$$

so daß mit höchstens $\gamma_u + 1$ Varianten die Teile 1 bis u in den geforderten Bedarfszahlen geschnitten werden können. Zu zeigen ist, daß bei Hinzunahme des Teils Nr. $u + 1$ mit der Bedarfszahl $b_{u+1} \leq k_{u+1}$ die Behauptung analog (2.3) gilt.

Fall a): Es gibt ein $r \in \{1, \dots, u\}$ mit $k_{u+1} = k_r$. Dann wird $b_r^{(1)} := b_r + b_{u+1}$ festgelegt. Gilt $b_r^{(1)} \leq k_r$, dann ist die Induktionsvoraussetzung anwendbar, andernfalls wird $b_r^{(1)} \leq 2k_r$, und mit $b_r^{(2)} := b_r^{(1)} - k_r \leq k_r$ folgt

$$\left\lceil \sum_{i=1, i \neq r}^u \frac{b_i}{k_i} + \frac{b_r^{(2)}}{k_r} \right\rceil = \gamma_{u+1} - 1.$$

Wegen $b_i \leq k_i$ für alle $i \neq r$ sowie $b_r^{(2)} \leq k_r$ gibt es γ_{u+1} geeignete Vektoren $\mathbf{a}^j \in \mathbb{N}^u$, und mit $a_{r, \gamma_{u+1}+1} := k_r$ und $a_{i, \gamma_{u+1}+1} := 0$ für $i \neq r$ ist die Behauptung erfüllt. Diese Argumentation stimmt auch für $\gamma_u = \gamma_{u+1}$, denn die Induktionsvoraussetzung galt für jede Instanz des Teilbarkeitsfalls mit $m = u$ und $0 \leq b_i \leq k_i \forall i \in I$.

Fall b): $k_{u+1} > k_u > \dots > k_1 \geq 1$ darf wegen der Betrachtungen im Fall a) angenommen werden. Somit wird $k_{u+1} \geq u + 1$. Wegen $\gamma_u \leq \gamma_{u+1}$ gibt es $\gamma_{u+1} + 1$ nichtnegative u -dimensionale ganzzahlige Vektoren \mathbf{a}^j mit

$$\sum_{j=1}^{\gamma_{u+1}+1} a_{ij} = b_i, \quad i = 1, \dots, u.$$

Diese Vektoren werden nun als $(u + 1)$ -dimensional angesehen, indem

$$a_{u+1, j} := \left\lceil k_{u+1} * \left(1 - \sum_{i=1}^u \frac{a_{ij}}{k_i}\right) \right\rceil \geq 0 \quad (2.5)$$

gesetzt wird. Das ergibt

$$1 - \frac{1}{k_{u+1}} < \sum_{i=1}^{u+1} \frac{a_{ij}}{k_i} \leq 1 \quad (2.6)$$

für $j = 1, \dots, \gamma_{u+1} + 1$. Aus der Festlegung (2.4) folgt

$$\begin{aligned} b_{u+1} &\leq k_{u+1} * \left(\gamma_{u+1} - \sum_{i=1}^u \frac{b_i}{k_i} \right) \\ b_{u+1} - \sum_{j=1}^{\gamma_{u+1}+1} a_{u+1,j} &\leq k_{u+1} * \left(\gamma_{u+1} - \frac{1}{k_{u+1}} * \sum_{j=1}^{\gamma_{u+1}+1} a_{u+1,j} - \sum_{i=1}^u \frac{b_i}{k_i} \right) \\ &= k_{u+1} * \left(\gamma_{u+1} - \frac{1}{k_{u+1}} * \sum_{j=1}^{\gamma_{u+1}+1} a_{u+1,j} - \sum_{i=1}^u \left(\frac{1}{k_i} * \sum_{j=1}^{\gamma_{u+1}+1} a_{ij} \right) \right) \\ &= k_{u+1} * \left(\gamma_{u+1} - \sum_{j=1}^{\gamma_{u+1}+1} \sum_{i=1}^{u+1} \frac{a_{ij}}{k_i} \right) \\ &< k_{u+1} * \left(\gamma_{u+1} - (\gamma_{u+1} + 1) * \left(1 - \frac{1}{k_{u+1}} \right) \right) \\ &= k_{u+1} * \left(-1 + \frac{\gamma_{u+1}}{k_{u+1}} + \frac{1}{k_{u+1}} \right) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Aufgrund der Ganzzahligkeit von b_{u+1} und der $a_{u+1,j}$ ist $\sum_{j=1}^{\gamma_{u+1}+1} a_{u+1,j} \geq b_{u+1}$, so daß

für $j = 1, \dots, \gamma_{u+1}+1$ passende $a'_{u+1,j} \in \mathbb{N}$ mit $a'_{u+1,j} \leq a_{u+1,j}$ und $\sum_{j=1}^{\gamma_{u+1}+1} a'_{u+1,j} = b_{u+1}$ gewählt werden können. Damit ist der Beweis fertig. \square

Dieser Beweis aus [28] liefert nur die Schranke $\Delta < 2$ für alle residuale Instanzen des Teilbarkeitsfalls. Es fällt auf, daß für große k_{u+1} in der Abschätzung von b_{u+1} sogar negative Werte für $-1 + \gamma_{u+1}/k_{u+1} + 1/k_{u+1}$ entstehen können. Im folgenden wird eine noch schärfere Schranke für das Gap nachgewiesen.

Lemma 2: Im Teilbarkeitsfall gilt bei $\ell_i > w/19 \forall i \in I$ stets $\Delta < 5/4$.

Beweis: Es reicht aus, residuale Instanzen zu betrachten. Für Teil i sei p_i der kleinste Primteiler von $k_i = w/\ell_i$. Bei $b_i \geq p_i$ können p_i dieser Teile zu einem größeren zusammengefaßt werden, ohne $z_C = z_M$ zu ändern, da der Teilbarkeitsfall weiterhin vorliegt. Es kommen keine Kombinationsmöglichkeiten oder weitere Varianten hinzu, jedoch können einige verloren gehen. Deshalb bleibt z_D unverändert oder z_D wächst. Wenn für die abgeänderte Instanz $\Delta < 5/4$ gilt, dann erst recht für die Ausgangsinstanz. Folglich darf angenommen werden, daß derartige Zusammenfassungen nicht mehr möglich sind. Analoges gilt für Zusammenfassungen mehrerer Brüche zu einem Stammbruch, z. B. $1/5 + 2/15 = 1/3$, $1/3 + 1/6 = 2/5 + 1/10 = 3/7 + 1/14 = 1/2$. Werden zwei Teile der Längen $w/15$ und ein Teil der Länge $w/5$ zu einem Teil der Länge $w/3$ zusammengefaßt, dann entsteht eine neue Instanz des Teilbarkeitsfalls mit mindestens dem Gap der Ausgangsinstanz.

Verschnittfreie eigentliche Varianten können ebenfalls abgetrennt werden, wobei $z_C = z_M$ jeweils um 1 fällt, z_D jedoch um höchstens 1. Wenn eine einfache Heuristik (hier

etwa die Greedy-Heuristik) eine Lösung des ganzzahligen Problems (1.3) mit dem Zielfunktionswert $z_H < z_C + 5/4$ liefert, gilt erst recht $\Delta < 5/4$. Im 1CSP gilt bei $z_M \leq 7/4$ stets IRUP, wie schon in [27] bewiesen wurde. Es bleiben nur endlich viele Instanzen zu untersuchen. Das kann mit dem nachfolgendem C-Programm, welches im nächsten Absatz beschrieben wird und durchaus verbesserungsfähig ist, erfolgen.

Um mit ganzen Zahlen arbeiten zu können, wurde jeweils mit dem $w := 12\,252\,240$ -fachen von z_M und z_H gerechnet. Der Vektor **bmax** gibt die größten vorzugebenden Bedarfszahlen an, nämlich **bmax**[*i*-2] mit $i \in \{2, \dots, 18\}$ für Teile des Typs *i*. Es ist **bmax**[*i*-2] jeweils der Vorgänger des kleinsten Primfaktors von *i*, damit nicht mehrere gleiche Teile zu einem größeren zusammengefaßt werden können. Der Bedarfsvektor für eine konkrete Instanz wird in **b** untergebracht, wobei mit **bmax** beginnend lexikographisch streng monoton fallende **b** bis hin zum Nullvektor untersucht werden. Wegen $1/4 + 1/12 = 1/3$ kann gefordert werden, daß niemals ein Teil der Länge $w/4$ und ein Teil der Länge $w/12$ jeweils (mindestens) einmal zuzuschneiden sind, andernfalls ist die Instanz auf eine mit nicht kleinerem Gap rückführbar. Nachdem **b** festgelegt wurde (Schleife mit der Marke `_1`), werden einige dieser Tests durchgeführt, und ggf. wird **b** entsprechend angepaßt. Sei etwa Teil *i* auszuschließen. Dann führt $b_i := 0$ auf das selbe Ergebnis wie $b_i := 1$ und $b_j := 0$ für alle $j \in I, j > i$ mit anschließendem Übergang zum lexikographisch nächst kleineren Vektor **b** unter Berücksichtigung von **bmax**. Ein Prüfen aller Vereinfachungsmöglichkeiten wäre zu aufwendig. Danach wird die Materialschranke z_M berechnet (Zeilen `i=zM=zH=0` und folgende). Bei $z_M \leq 7/4$ gilt stets IRUP, so daß in diesem Fall die heuristische Bestimmung einer zulässigen Lösung der ganzzahligen Aufgabe (1.3) entfallen kann. Andernfalls wird der Bedarfsvektor **b** in den Vektor **a** kopiert, bevor irgendwelche Manipulationen stattfinden. Mit Hilfe der jeweils aktuell verbleibenden Bedarfszahlen (Vektor **a**) wird eine zulässige Lösung von (1.3) gemäß Greedy-Heuristik konstruiert. Sollte dabei eine verschnittfreie Variante gefunden werden, dann war die Instanz reduzierbar, so daß die heuristische Lösung abgebrochen werden kann, und es wird mit verändertem **b** entsprechend den oben genannten Tests bei der Marke `_1` fortgefahren, d. h. **b** wird wieder lexikographisch kleiner. Ist keine verschnittfreie Variante gefunden worden, dann werden möglichst viele der größten Teile (unter Berücksichtigung der aktuellen Bedarfszahlen in **a**) in die Variante gepackt, bis auch kein kleineres noch zu packendes Teil hineinpaßt. Dabei wird **a** um die gepackten Teile reduziert. Das Packen ist beendet, sobald **a** zum Nullvektor wurde. Danach wird $z_H - z_M$ ausgewertet und die größte erreichte Differenz gespeichert. Hat sie zugenommen, dann wird sie zusammen mit **b** ausgegeben. Am Ende wird das kleinste *i* mit $b_i > 0$ ermittelt (falls es existierte) und $b_i := b_i - 1$ gesetzt. Die im Programm auftretende Nebenwirkung $b_j := -1$ für $j > i$ ist ohne Bedeutung, weil anschließend **b** in jenen Komponenten wieder mit **bmax** überschrieben wird. Sollte kein entsprechendes *i* gefunden worden sein, dann war **b** der Nullvektor, und das Programm endet.

```

/*Ziel: Pruefung des groesstmoeeglichen Gaps im Teilbarkeitsfall
bei k_i<=kmax*/
#include<stdio.h>
#define kmax 18
#define w 12252240L /*kgV(2,3,...,kmax)*/
#define str_w "12252240"
void main(void){
static const char bmax[kmax-1]={1,2,1,4,1,6,1,2,1,10,1,12,1,2,1,16,1};
unsigned long Delta = w, Verschnitt, zH, zM;

```

```

int i = 0; /*Indextyp int fuer Compiler besser*/
char j, b[kmax-1], a[kmax-1];
for(;;){ /*Endlosschleife, wird unten mit return verlassen*/
    while (i < kmax-1){
        b[i] = bmax[i];
_1:    i++;
    }
    if (b[2])
        b[10] = 0; /*1/4+1/12=1/3, 2/5+1/10=1/2 usw.*/
    if (b[8] || b[1] && b[3]>2)
        b[13] = 0; /*1/10+1/15=1/6, 1/3+3/5+1/15=1*/
    if (b[3] && b[13]==2)
        b[13]--;
    i=1;
    do
        if (2*b[i] > i)
            b[2*(i+1)] = 0;
    while ((i+=2) <= kmax/2-2);
    i = zM = zH = 0;
    do
        zM += b[i] * (w/(i+2));
    while (i++ < kmax-2);
    if (zM > (w/4)*7){
        do
            i--, a[i]=b[i];
        while (i);
        do{
            j = a[i];
            zH += (Verschnitt=w); /*Varianten nach Greedy bestimmen*/
            do{
                if (j > a[i])
                    j = a[i];
                a[i] -= j;
                if ((Verschnitt -= j*(w/(i+2))) == 0){
                    b[i] = j-1;
                    goto _1;
                }
            }
            do
                i++;
            while (i<kmax-1 && (a[i]==0 || (j = Verschnitt/(w/(i+2))) == 0));
        }while (i < kmax-1);
        i=0;
        do
            i++;
        while (i < kmax-1 && a[i] == 0);
    }while (i < kmax-1);
    if (zH-zM > Delta){
        i=0;
        printf("z_H-z_M-1 = %lu/"str_w", b = (%u",
            (Delta = zH-zM) - w, b[0]);
    }
}

```

```

do
    printf("%u", b[++i]);
while (i < kmax-2);
printf("\n");
}
}/*Materialschranke>7/4*/
i = kmax-1;
while (b[i-1]-- == 0)
    if (i-- == 1)
        return;
}/*for(;;)*/
}/*main*/

```

Folgende Ausgaben erzeugte das Programm, wobei nur die ersten und letzten Zeilen angegeben werden:

```

z_H-z_M-1 = 456293/12252240, b = (1,2,1,4,0,6,1,2,0,10,0,12,0,0,1,11,0)
z_H-z_M-1 = 496333/12252240, b = (1,2,1,4,0,6,1,2,0,10,0,12,0,0,1,10,1)
z_H-z_M-1 = 1177013/12252240, b = (1,2,1,4,0,6,1,2,0,10,0,12,0,0,1,10,0)
z_H-z_M-1 = 1217053/12252240, b = (1,2,1,4,0,6,1,2,0,10,0,12,0,0,1,9,1)
z_H-z_M-1 = 1222058/12252240, b = (1,2,1,4,0,6,1,2,0,10,0,12,0,0,0,11,0)
z_H-z_M-1 = 1262098/12252240, b = (1,2,1,4,0,6,1,2,0,10,0,12,0,0,0,10,1)
z_H-z_M-1 = 1398773/12252240, b = (1,2,1,4,0,6,1,2,0,10,0,11,0,0,1,11,0)
...
z_H-z_M-1 = 2119213/12252240, b = (1,2,1,4,0,6,1,2,0,7,0,10,0,0,1,15,1)
z_H-z_M-1 = 2238293/12252240, b = (1,2,1,4,0,4,1,2,0,10,0,10,0,0,1,16,0)
z_H-z_M-1 = 2278333/12252240, b = (1,2,1,4,0,4,1,2,0,10,0,10,0,0,1,15,1)
z_H-z_M-1 = 2310028/12252240, b = (1,2,0,4,0,0,0,1,0,8,1,12,0,0,0,0,0)
z_H-z_M-1 = 2386188/12252240, b = (1,2,0,4,0,0,0,0,0,10,1,11,0,0,0,0,0)
z_H-z_M-1 = 2464728/12252240, b = (1,2,0,4,0,0,0,0,0,10,0,12,0,0,0,0,0)
z_H-z_M-1 = 2557548/12252240, b = (1,2,0,4,0,0,0,0,0,9,1,12,0,0,0,0,0)

```

Die größte Differenz war $z_H - z_C = 1 + 2557548/12252240 = 1 + 597/2860 < 5/4$ beim Bedarfsvektor $(1, 2, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 9, 1, 12, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. Dem entspricht die Instanz $E = (6; w; (w/2, w/3, w/5, w/11, w/12, w/13)^T; (1, 2, 4, 9, 1, 12)^T)$ mit $w = 12252240$. Eigentlich müßte die Korrektheit des Programms noch mit dem HOARE-Kalkül nachgewiesen werden, aber das würde den Rahmen bei weitem sprengen. \square

Theoretisch wäre es auch möglich, auf diese Weise alle Fälle für $\ell_i > w/23$ zu untersuchen, ggf. auch mit einer verbesserten Version des Programms. Das Problem ist die mindestens exponentielle Komplexität der im obigen Programm geführten Rechnung. Selbstverständlich wird aus einer IRUP-Instanz E wieder eine IRUP-Instanz erhalten, wenn einzelne Teile von E in geringeren Bedarfszahlen gefordert werden, sofern $[z_C]$ gleich bleibt. Damit könnte in obigem Programm eine erhebliche Reduktion des Aufwandes erreicht werden, aber wenn die betrachteten Bedarfsvektoren \mathbf{b} lexikographisch streng monoton fallen sollen, kann die Reduktion nur bei den kleinsten Teilen durchgeführt werden. Warum sollte z. B. nach der Ersetzung von drei Teilen der Länge $w/13$ durch zwei Teile der Länge $w/15$ und je ein Teil der Längen $w/14$ und $w/16$ wieder IRUP gelten?

Um den Teilbarkeitsfall im 1CSP allgemein zu untersuchen, sei $G \in \mathbb{R}$ geeignet gewählt — die Forderungen werden weiter unten erarbeitet. Zum Beispiel wird $G := 2$ alle Bedingungen erfüllen; es wird aber ein möglichst kleines G gesucht. Für $u \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wird anstelle (2.4) definiert:

$$\delta_u := \left\lceil G + \sum_{i=1}^u \frac{b_i}{k_i} \right\rceil - 1 \quad (2.7)$$

SATZ 1: Für jede Instanz E des Teilbarkeitsfalls gilt $\Delta(E) < 7/5$.

Beweis: Wegen $\Delta(E) \leq \Delta(E^{(r)})$ reicht der Nachweis für residuale Instanzen aus, ebenso darf $k_i > 1 \forall i \in I$ angenommen werden. Es wird $G := 7/5$ gesetzt und gezeigt, daß für jede Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ mit $w/\ell_i = k_i \in \mathbb{N}$ und $b_i \leq k_i$ für $i = 1, \dots, m$ immer δ_m Vektoren $\mathbf{a}^j \in \mathbb{N}^m$ existieren, so daß gilt:

$$\sum_{j=1}^{\delta_m} a_{ij} = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.8)$$

Induktionsanfang: Für $m < 3$ gilt IRUP, so daß die Behauptung wegen $G > 1$ zutrifft.

Induktionsschritt: Für festes $m = u \geq 2$ gelte (2.8). Gezeigt werden muß, daß nach Hinzunahme des $(u + 1)$ -ten Teils (Bedarfszahl $b_{u+1} \leq k_{u+1}$) eine zu (2.8) analoge Aussage gilt. Folgende Annahmen dürfen gemacht werden:

- $k_1 < k_2 < \dots < k_{u+1}$, ansonsten wird die Reduktion wie im Fall a) des Beweises von Aussage 8 durchgeführt.
- Es gibt keine eigentliche, verschnittfreie Variante. Andernfalls kann sie separat geschnitten werden, wobei $z_M = z_C$ um 1 abnimmt. Konnte $\Delta < G$ für die reduzierte Instanz nachgewiesen werden, dann gilt das auch für die Ausgangsinstanz.

Nun wird analog zum Beweis von Aussage 8, Fall b) weiter verfahren. Wegen $\delta_u \leq \delta_{u+1}$ kann die Induktionsvoraussetzung benutzt werden, d. h. es gibt δ_{u+1} Vektoren $\mathbf{a}^j \in \mathbb{N}^u$ mit

$$\sum_{j=1}^{\delta_{u+1}} a_{ij} = b_i, \quad i = 1, \dots, u$$

Es wird wieder eine $(u + 1)$ -te Komponente gemäß (2.5) definiert, so daß die Ungleichung (2.6) für $j = 1, \dots, \delta_{u+1}$ gilt. Aus der Festlegung (2.7) folgt

$$\begin{aligned} \delta_{u+1} + 1 &= \left\lceil G + \sum_{i=1}^{u+1} \frac{b_i}{k_i} \right\rceil \geq G + \sum_{i=1}^{u+1} \frac{b_i}{k_i} \\ b_{u+1} &\leq k_{u+1} * \left(\delta_{u+1} + 1 - G - \sum_{i=1}^u \frac{b_i}{k_i} \right) \\ b_{u+1} - \sum_{j=1}^{\delta_{u+1}} a_{u+1,j} &\leq k_{u+1} * \left(\delta_{u+1} + 1 - G - \frac{1}{k_{u+1}} * \sum_{j=1}^{\delta_{u+1}} a_{u+1,j} - \sum_{i=1}^u \frac{b_i}{k_i} \right) \\ &= k_{u+1} * \left(\delta_{u+1} + 1 - G - \frac{1}{k_{u+1}} * \sum_{j=1}^{\delta_{u+1}} a_{u+1,j} - \sum_{i=1}^u \left(\frac{1}{k_i} * \sum_{j=1}^{\delta_{u+1}} a_{ij} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k_{u+1} * (\delta_{u+1} + 1 - G - \sum_{j=1}^{\delta_{u+1}} \sum_{i=1}^{u+1} \frac{a_{ij}}{k_i}) \\
&< k_{u+1} * \left(\delta_{u+1} + 1 - G - \delta_{u+1} * \left(1 - \frac{1}{k_{u+1}}\right) \right) \quad (\text{wegen (2.6)}) \\
&= \delta_{u+1} + k_{u+1} * (1 - G) =: t
\end{aligned}$$

Es muß $t \leq 1$ gesichert werden. Wegen der Ganzzahligkeit von b_{u+1} und der $a_{u+1,j}$ wird dann $\sum_{j=1}^{\delta_{u+1}} a_{u+1,j} \geq b_{u+1}$ sein, so daß mit eventuellem Weglassen einzelner Teile Gleichheit erreicht wird, womit der Beweis zu Ende wäre.

Die Bedingung $t \leq 1$ muß für alle $u \in \mathbb{N}$, $u \geq 2$ und alle entsprechenden k_i, b_i mit $i = 1, \dots, u+1$ erfüllt werden, wenn nicht auf andere Weise die Wahrheit der Induktionsbehauptung bewiesen wird. Wegen (2.7) gilt $\delta_{u+1} < G + \sum_{i=1}^{u+1} \frac{b_i}{k_i}$ und daher

$$t < G * (1 - k_{u+1}) + k_{u+1} + \sum_{i=1}^{u+1} \frac{b_i}{k_i} = \sum_{i=1}^{u+1} \frac{b_i}{k_i} - (G - 1) * (k_{u+1} - 1) + 1.$$

Hinreichend für $t \leq 1$ ist somit

$$G \geq 1 + \frac{1}{k_{u+1} - 1} * \sum_{i=1}^{u+1} \frac{b_i}{k_i} =: S(k_{u+1}), \quad u = 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

Um eine obere Schranke für $S(k_{u+1})$ zu finden, soll $S(k_{u+1})$ zuerst möglichst groß gemacht werden. Aufgrund der gemachten Annahmen scheidet die Möglichkeit $k_1 = 1$ aus. Wegen $0 \leq b_i \leq k_i$ tritt für festes $u \in \mathbb{N}$ der ungünstigste Fall ein, wenn $k_i = i + 1$ für $i = 1, \dots, u + 1$ gilt, denn dann werden besonders große Summanden addiert. Größere k_{u+1} als $u + 2$ brauchen nicht betrachtet werden, denn bei einer entsprechenden Erhöhung von u würde dieser Fall mit erfaßt, wobei noch zusätzliche (positive) Summanden hinzukommen könnten.

Daß keine eigentliche, verschnittfreie Variante existieren soll, heißt insbesondere $b_i < k_i$. Ist der Nenner eines Summanden in $S(k_{u+1})$ eine Primzahl p , dann darf der Zähler höchstens $p - 1$ sein, sonst könnte eine eigentliche, verschnittfreie Variante zusammengestellt werden. Es ist z. B.

$$S(30) \leq 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{10}{11} + \frac{12}{13} + \frac{1}{16} + \frac{16}{17} + \frac{18}{19} + \frac{22}{23} + \frac{4}{25} + \frac{2}{27} + \frac{28}{29} + \frac{1}{30} \right) / 29.$$

Sei $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mit den Typen p, p^2, \dots, p^q von Teilen, jeweils in der Bedarfszahl $p - 1$, können alle Längen $r * w / p^q$ mit $r \in \{0, 1, \dots, p^q - 1\}$ zusammengestellt werden. Deshalb ist auch für Primzahlpotenzen p^q im Nenner der Zähler nur $p - 1$ für den ungünstigsten Fall.

Enthält ein Nenner genau zwei verschiedene Primfaktoren p_1, p_2 in den Potenzen $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann ergeben sich mit den Typen der Typen $p_1, p_1^2, \dots, p_1^{q_1}$ und $p_2, p_2^2, \dots, p_2^{q_2}$, jeweils in den Anzahlen $p_1 - 1$ bzw. $p_2 - 1$, immer eigentliche, verschnittfreie Varianten wie folgt: Für $r = 0, 1, \dots, p_1^{q_1} - 1$ werden die Produkte $r * p_2^{q_2}$ betrachtet. Diese durchlaufen dann alle Restklassen modulo $p_1^{q_1}$ je einmal, da die Potenzen $p_1^{q_1}$ und $p_2^{q_2}$ teilerfremd sind. Es gibt also eine durch $p_2^{q_2}$ teilbare ganze Zahl

$g \in [0, p_1^{q_1} * p_2^{q_2} - 1]$ mit $g \equiv -1 \pmod{p_1^{q_1}}$. Folglich ist $r_1 := (p_1^{q_1} * p_2^{q_2} - 1 - g)/p_1^{q_1} \in \mathbb{N}$ und $r_2 := g/p_2^{q_2} \in \mathbb{N}$ und $r_1 * p_1^{q_1} + r_2 * p_2^{q_2} + 1 = p_1^{q_1} * p_2^{q_2}$, so daß r_1 Teile des Typs $p_1^{q_1}$ und r_2 Teile des Typs $p_2^{q_2}$ zusammen mit einem Teil des Typs $p_1^{q_1} * p_2^{q_2}$ eine eigentliche, verschnittfreie Variante bilden. Folglich fallen derartige Summanden in $S(k_{u+1})$ weg. Addierte man alternativ einen Summanden $(p_1 - 1)/(p_1^{q_1} * p_2^{q_2})$ oder $(p_2 - 1)/(p_1^{q_1} * p_2^{q_2})$ statt des Summanden $(p_1 - 1)/p_1^{q_1}$ bzw. $(p_2 - 1)/p_2^{q_2}$ in $S(k_{u+1})$, dann nähme $S(k_{u+1})$ ab.

Enthält ein Nenner mindestens drei verschiedene Primfaktoren, dann kann der betreffende Bruch, z. B. $1/30$, nicht in jedem Fall vollständig eliminiert werden. So ist die Aufgabe $r_1/2 + r_2/3 + r_3/5 = 29/30$ in natürlichen Zahlen r_i unlösbar. Lautet der Nenner $p_1^{q_1} * p_2^{q_2} * \dots * p_s^{q_s}$ mit $s \geq 3$, $q_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, s$ und den Primfaktoren $p_1 < p_2 < \dots < p_s$, dann darf aber gefordert werden, daß der Zähler höchstens $p_1 - 1$ ist, wenn die Teile der Typen $p_i, p_i^2, \dots, p_i^{q_i}$ je $(p_i - 1)$ -mal gefordert wurden ($i = 1, \dots, s$).

Wegen $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^q} = 1$ ist eine einfache Abschätzung von $S(k_{u+1})$ damit gegeben, daß die Anzahl der Primzahlen bis k_{u+1} ermittelt wird und hier noch zusätzliche Summanden wie $1/30, 1/66, 1/84, 1/90, 1/102, 2/105, \dots$ zu ergänzen sind. Seien $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$ und $N := p_3^{q_3} * \dots * p_s^{q_s}$ mit $3 < p_3 < \dots < p_s$. Die zusätzlichen Summanden sind dann wie folgt zusammenzufassen und abzuschätzen:

- bei $s = 3$: $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-i} * 3^{-j}/N = \frac{1}{2N}$ mit $N \geq 5$;
- bei $s = 4$: $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-i} * 3^{-j}/N + \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j} * 2/N = \frac{5}{2N}$ mit $N \geq 35$;
- bei $s \geq 5$: $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-i} * 3^{-j}/N + \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j} * 2/N + (p_3 - 1)/N = \frac{2p_3 + 3}{2N} < 1/59$
wegen $\frac{2p_3 + 3}{2N} = \frac{2 + 3/p_3}{2 * p_3^{q_3-1} * p_4^{q_4} * \dots * p_s^{q_s}} \leq \frac{2,6}{2 * 7 * 11}$.

Für unterschiedliche s, p_i oder q_i ($i = 3, \dots, s$) ergeben sich unterschiedliche N . Jeder der zusätzlichen Summanden wird bei genau einem der obigen Fälle für ein bestimmtes N erfaßt. Da jede Primzahl größer als 3 bei Division durch 6 den Rest 1 oder 5 läßt, ist die Anzahl der Primzahlen bis k_{u+1} höchstens

$$\left\lfloor \frac{k_{u+1} + 5}{3} \right\rfloor, \quad (2.10)$$

und auch die zusammengesetzte Zahl N liegt in der Restklasse ± 1 modulo 6. Für jedes solche N wurde höchstens $1/10$, also weniger als 1, hinzugezählt. Damit ist die Summe der Brüche $\sum_{i=1}^{u+1} b_i/k_i$ in $S(k_{u+1})$ ebenfalls mit Formel (2.10) abzuschätzen. Es folgt

$$S(k_{u+1}) \leq 1 + \frac{\lfloor (k_{u+1} + 5)/3 \rfloor}{k_{u+1} - 1} \leq \frac{4}{3} + \frac{2}{k_{u+1} - 1},$$

also ist für $k_{u+1} \geq 31$ die Bedingung (2.9) wegen $S(k_{u+1}) \leq 7/5$ erfüllt. Bei $k_{u+1} \in \{21, 24, 26, 27, 29, 30\}$ gilt $\frac{\lfloor (k_{u+1} + 5)/3 \rfloor}{k_{u+1} - 1} \leq 0,4$, also $S(k_{u+1}) \leq 1,4$. Für $k_{u+1} \in \{20, 22, 23, 25, 28\}$ ist $S(k_{u+1}) < 7/5$ durch direktes Ausrechnen zu bestätigen. Ist $k_{u+1} \leq 18$, dann gilt gemäß Lemma 2 immer $\Delta < 5/4$, so daß die Induktionsbehauptung ebenfalls zutrifft. Sei $k_{u+1} = 19$. Ist $b_{u+1} \leq 17$, dann ist $S(19) < 7/5$. Ist $b_{u+1} = 18$, dann kann wieder mit Lemma 2 argumentiert werden. Gegenüber einer Instanz mit $k_i \leq 18$ kann wegen $z_C = z_M$ das Gap dann nämlich nur um höchstens $1 - 18/19 = 1/19$ zugenommen haben, und $5/4 + 1/19 < 7/5$. \square

Bemerkung 1: Die einzigen primen Restklassen modulo 30 sind $\pm 1, \pm 7, \pm 11$ und ± 13 , so daß höchstens $(4k_{u+1} + 44)/15$ Primzahlen bis k_{u+1} existieren. Es ist kein Problem, den Primfaktor 5 in obige Fallunterscheidung einzubeziehen. Um den Beweis auch für deutlich kleinere G führen zu können, müssen jedoch die Schranken für das größtmögliche Gap für kleine k_{u+1} verbessert werden. Hilfreich könnte die Konstruktion besserer Schnittpläne sein.

2.3 Materialschranke und Gap

Werden für eine beliebige Instanz E des 1CSPs alle Längen ℓ_i durch die nicht kleineren Längen w/k_i ersetzt, dann können z_C und z_D nicht abnehmen. Für die so abgeänderte Instanz E' gilt $z_C(E') = \sum_{i \in I} b_i/k_i$ und $z_D(E') < z_C(E') + 7/5$ wegen Satz 1, da der Teilbarkeitsfall vorliegt. Aufgrund der Materialschranke (1.8), S. 11, gilt $z_M(E) > \sum_{i \in I} b_i/(k_i + 1)$ und folglich

$$z_D(E) < \frac{7}{5} + \sum_{i \in I} \frac{b_i}{k_i} \quad \text{und} \quad \Delta(E) \leq z_D(E) - z_M(E) < \frac{7}{5} + \sum_{i \in I} \frac{b_i}{k_i * (k_i + 1)}. \quad (2.11)$$

Wenn die Sortierung (2.1), S. 22, vorausgesetzt wird, gilt $k_1 \leq \dots \leq k_m$ und $z_D(E) < 7/5 + z_M(E) * (k_1 + 1)/k_1$. Dies gilt insbesondere auch für alle residualen Instanzen $E^{(r)}$. Wegen $\Delta(E) \leq \Delta(E^{(r)})$ und $z_M(E) \leq z_C(E)$ ergibt das im Abschnitt 1.7 angegebene Lemma 1, S. 19, bei Wahl von $p := (k_1 + 1)/k_1$ und $q := 7/5$ die Abschätzung

$$\Delta(E) < \frac{m}{k_1 + 1} + \frac{7k_1}{5 * (k_1 + 1)}.$$

Sind nur zwei verschiedene Typen von Teilen in E vorhanden, dann gibt es in E' nur zwei verschiedene Teile zu packen, so daß wegen Aussage 2, S. 19, für E' sogar IRUP gilt. In Kapitel 3 wird diese Situation für die Typen k und $k + 1$ ausführlicher untersucht. In diesem Fall ergibt sich zunächst $z_D(E) \leq z_D(E') < z_C(E') + 1$. Wegen $b_i \in \mathbb{N}$ und $k_i \in \{k, k + 1\} \forall i \in I$ ist der Nenner von $z_C(E')$ Teiler von $k * (k + 1)$. Folglich ist entweder $z_C(E') \in \mathbb{N}$ oder $z_C(E') \geq \lfloor z_C(E') \rfloor + \frac{1}{k * (k + 1)}$. Aus $z_D(E) \in \mathbb{N}$ folgt daher

$$z_D(E) \leq \left\lfloor \sum_{i \in I} \frac{b_i}{k_i} + 1 - \frac{1}{k * (k + 1)} \right\rfloor. \quad (2.12)$$

Im 1CSP kann immer dafür gesorgt werden, daß eine zulässige Lösung des ganzzahligen Problems (1.3) gefunden wird, in der in allen Varianten — mit höchstens einer

Ausnahme — ein Materialausnutzungsgrad über 50% erreicht wird, indem zuerst die größten Teile gepackt werden. Das ergibt die sehr grobe Abschätzung $z_D < 2z_M + 1$, die für alle Instanzen des 1CSPs gilt, insbesondere auch für residuale. Es folgt $\Delta < z_M + 1$ und wegen Lemma 1 auch $\Delta < (m+1)/2$. Diese Schranken können verbessert werden, indem bessere Heuristiken eingesetzt werden, die dafür sorgen, daß in allen Varianten, höchstens eine ausgenommen, entweder eine möglichst hohe Materialausnutzung erreicht wird oder gezeigt werden kann, daß auch in einer Optimallösung von (1.6) in diesen Varianten der große Verschnitt vorkommen muß. Obwohl im dritten Kapitel bessere Abschätzungen für das Gap hergeleitet werden, soll so ein Beweis hier demonstriert werden.

Algorithmus zum Nachweis von $\Delta < \max\{1, \frac{m+1}{3}\}$

1. Trenne den ganzzahligen Anteil von der Optimallösung von (1.6) ab. Es wird also nur die residuale Instanz (1.11) betrachtet. Diese formuliere gemäß Abschnitt 1.5 als $\bar{E} = (\bar{m}; w; \bar{\mathbf{l}}; \mathbf{e})$, wobei $\bar{\ell}_1 \geq \dots \geq \bar{\ell}_{\bar{m}}$ gelte. Sei $\bar{I} := \{1, \dots, \bar{m}\}$.
2. Setze $T_1 := \{i \in \bar{I} : k_i = 1\}$, $T_2 := \{i \in \bar{I} : k_i = 2\}$, $T_3 := \{i \in \bar{I} : k_i \geq 3\}$ und $T_4 := T_5 := \emptyset$.
3. a) Bei $T_1 = \emptyset$ setze $T_4 := T_4 \cup T_2 \cup T_3$ und $T_2 := T_3 := \emptyset$, halt.
b) Bei $T_2 = \emptyset$ gehe zu Schritt 4.
c) Setze $i := \min\{i : i \in T_2\}$, danach $T_2 := T_2 \setminus \{i\}$. Falls $\bar{\ell}_i + \bar{\ell}_j > w \ \forall j \in T_1$ gilt, dann setze $T_4 := T_4 \cup \{i\}$ und gehe zu Teilschritt b).
d) Setze $j := \min\{j \in T_1 : \bar{\ell}_i + \bar{\ell}_j \leq w\}$, danach $T_5 := T_5 \cup \{i, j\}$ und $T_1 := T_1 \setminus \{j\}$. Gehe zu Teilschritt a).
4. a) Wähle $i \in T_1$ beliebig. Setze $T_1 := T_1 \setminus \{i\}$ und $T_6 := \{i\}$.
b) Solange es möglich ist, wähle ein $j \in T_3$ mit $\bar{\ell}_j + \sum_{i \in T_6} \bar{\ell}_i \leq w$ und setze $T_3 := T_3 \setminus \{j\}$ sowie $T_6 := T_6 \cup \{j\}$.
c) Bei $\sum_{i \in T_6} \bar{\ell}_i > 2w/3$ setze $T_5 := T_5 \cup T_6$, sonst $T_2 := T_2 \cup T_6$.
d) Bei $T_1 \neq \emptyset$ gehe zu Teilschritt a).
e) Setze $T_4 := T_4 \cup T_3$ und $T_3 := \emptyset$, halt.

Auswertung: Bei $z_M(\bar{E}) < 1$ ist $\Delta(E) \leq \Delta(\bar{E}) < 1$ klar. Sei $z_M(\bar{E}) \geq 1$. Sämtliche Teile von \bar{E} wurden in den Mengen T_2 , T_4 und T_5 versammelt. T_6 war nur eine Hilfsmenge zur Formulierung von Schritt 4. Solange Schritt 3 abgearbeitet wird, werden in T_5 je ein Teil der Typen 1 und 2 versammelt, was zusammen eine Materialausnutzung über 5/6 ergibt, während nach T_4 nur Teile des Typs 2 kommen, die auch in der stetigen Relaxation (1.6) zumindest in dieser Anzahl nicht mit Teilen des Typs 1 kombinierbar waren, weil in Schritt 3 c jeweils das größte noch zu packende Teil des Typs 2 ausgewählt wurde und dieses mit keinem der noch zu verarbeitenden Teile des Typs 1 verträglich war.

1. Fall: $T_2 \neq \emptyset$. Dann konnte der Algorithmus nur in Schritt 4 e und nicht in Schritt 3 a enden, so daß einmal in Schritt 3 b gesprungen wurde. Nur im Schritt 4 c wurden wieder Teile nach T_2 gebracht. Da in T_3 nur Teile mit einer Länge bis $w/3$ waren, kann in Schritt 4 b immer eine Materialausnutzung über 2/3 erreicht werden, es sei

denn, T_3 enthielt zu wenig Teile. Das muß wegen $T_2 \neq \emptyset$ einmal eingetreten sein, so daß nur noch Teile des Typs 1 zu verarbeiten waren. (Es kann auch das allerletzte Typ-1-Teil in Schritt 4 a aus T_1 entnommen worden sein.) Folglich war $T_3 = \emptyset$ schon vor Schritt 4 e erreicht worden, und in T_2 und T_5 wurden nur Varianten gesammelt, die ein Typ-1-Teil enthalten. In T_4 sind nur Teile des Typs 2, d. h. keine drei von ihnen bilden eine zulässige Variante, wohl aber je zwei beliebige Teile. In der stetigen Relaxation (1.6) kann auch jedes Typ-2-Teil zweimal in einer uneigentlichen Variante verwendet werden, die dann 1/2-mal benutzt wird. Bezeichne \bar{I}_1 die Indexmenge aller Typ-1-Teile der Instanz \bar{E} . Mit den Überlegungen zu Schritt 3 c ergibt sich somit nach Beendigung des Algorithmus $z_C(\bar{E})$ als die Anzahl aller Typ-1-Teile plus die halbe Anzahl der nach T_4 gebrachten Teile, also $z_C(\bar{E}) = |\bar{I}_1| + |T_4|/2$. Für $z_D(\bar{E})$ ergibt sich $z_D(\bar{E}) = |\bar{I}_1| + \lceil |T_4|/2 \rceil$ und damit $\Delta(\bar{E}) \in \{0; 1/2\}$.

2. Fall: $T_2 = \emptyset$. Sämtliche in T_5 versammelten Teile ergaben mehr als 2/3 Materialausnutzung, so daß nur noch T_4 zu diskutieren ist. Nach T_4 kamen keine Teile des Typs 1. Zwei beliebige Teile vom Typ 2 ergeben zusammen stets mehr als 2/3 Materialausnutzung. Angenommen, es bleibt genau ein Teil dieses Typs übrig. Wenn weitere Teile aus T_3 ergänzt werden können, dann ist wegen $\bar{\ell}_i \leq w/3 \forall i \in T_3$ immer eine Materialausnutzung über 2/3 erzielbar, höchstens eine Variante ausgenommen. Nach dem Schneiden von $z \in \mathbb{N}$ solcher Varianten bleibt weniger Material als $\mathbf{I}^T \mathbf{b} - z * w * 2/3$ zuzuschneiden. Ist dies höchstens w , dann paßt dieser Rest in eine Variante. Das heißt, bei $z_M(\bar{E}) - z * 2/3 \leq 1$ bzw. $z \geq 1,5 * (z_M(\bar{E}) - 1)$ ist $z_D(\bar{E}) \leq z + 1$. Folglich ist $z_D(\bar{E}) \leq \lceil 1,5 * (z_M(\bar{E}) - 1) \rceil + 1 < (3 * z_M(\bar{E}) + 1)/2$. Lemma 1 ergibt $\Delta(\bar{E}) < (m+1)/3$. Wegen $\Delta(E) \leq \Delta(\bar{E})$ gilt die Behauptung. \square

2.4 Wert einer Variante zur Abschätzung des Gaps

Der *Wert* einer Variante \mathbf{a} ist als $v := \sum_{i \in I} a_i/k_i$ definiert. Für maximale elementare Varianten ist stets $v = 1$. In jeder Optimallösung von (1.6) ist die Häufigkeit einer Variante mit Wert $v < 1$ stets 0, vgl. [20]. Die Begründung ist diese: Sei $\bar{\mathbf{a}}$ eine derartige Variante, die in der Häufigkeit \bar{x} in (1.6) verwendet wurde. Dann kann \bar{x} mal $\bar{\mathbf{a}}$ durch eine Kombination elementarer Varianten ersetzt werden, nämlich durch die bis zu m Varianten $k_i \mathbf{e}^i$, jeweils in der Häufigkeit $\bar{x} * \bar{a}_i/k_i$, $i \in I$. Dann gilt $\bar{x} \bar{\mathbf{a}} = \sum_{i \in I} \frac{\bar{x} * \bar{a}_i}{k_i} * k_i \mathbf{e}^i$ und $\sum_{i \in I} \bar{x} * \bar{a}_i/k_i = v * \bar{x}$, so daß der Zielfunktionswert fällt, falls $\bar{x} > 0$ war. Ebenso kann jede nicht elementare Variante, deren Wert genau 1 ist, durch elementare Varianten ersetzt werden, ohne den Zielfunktionswert in (1.6) zu beeinflussen. Deshalb darf immer eine Optimallösung der Relaxation (1.6) zugrunde gelegt werden, in der nur elementare Varianten und Varianten mit Wert $v > 1$ positive Häufigkeiten x_j , $j \in J$ haben können.

Im 1CSP ist immer $v \leq 1,7$ gemäß [5]. Dazu hatten Coffman und seine Mitautoren eine stückweise lineare Funktion $W : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert und gezeigt, daß für beliebig gegebene $x_i \in (0, 1]$ mit $\sum_i x_i \leq 1$ stets $\sum_i W(x_i) \leq 1,7$ gilt. Eine geringfügige Verbesserung ist wie folgt möglich.

Lemma 3: Mit $t_0 := 1$ und $t_{n+1} := t_n * (t_n + 1)$ werde die Folge (t_n) rekursiv definiert.

Dann ist im 1CSP der Wert einer zulässigen Variante stets kleiner als

$$\hat{v} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{t_n} < \frac{1}{t_p^2} + \sum_{n=0}^p \frac{1}{t_n}$$

für beliebige $p \in \mathbb{N}$. Die Konstante $\hat{v} = 1,6910302\dots$ ist irrational.

Beweis: Sei $p \in \mathbb{N}$ beliebig. Zuerst wird eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ gemäß

$$f(x) := \frac{t_p + 1}{t_p} * x + \tilde{f}(x)$$

mit einer stückweise konstanten, monoton wachsenden, überall in $(0, 1]$ linksseitig stetigen Funktion \tilde{f} definiert. Dabei sei $\tilde{f}(x) = 0$ für $0 \leq x \leq 1/t_p$. Für $n \in \mathbb{N}$, $0 < n < t_p$ und $1/(n+1) < x \leq 1/n$ sei jeweils $\tilde{f}(x) = \frac{t_p - n}{n * (n+1) * t_p}$.

Nun wird $f(x) > 1/\lfloor 1/x \rfloor$ für alle $x \in (0, 1]$ gezeigt. Für $0 < x \leq 1/(t_p + 1)$ folgt $f(x) > 1/\lfloor 1/x \rfloor$, denn

$$\frac{t_p + 1}{t_p} * x * \lfloor \frac{1}{x} \rfloor > \frac{t_p + 1}{t_p} * x * \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{t_p + 1}{t_p} * (1 - x) \geq 1$$

wegen $x \leq 1/(t_p + 1)$. Bei $1/(t_p + 1) < x \leq 1/t_p$ ist $\lfloor 1/x \rfloor = t_p$ und $x * (t_p + 1)/t_p > 1/t_p$. Für $1/t_p < x \leq 1$ wurde der additive Term in \tilde{f} jeweils passend festgelegt, denn für $n \in \mathbb{N}$, $0 < n < t_p$ und $1/(n+1) < x \leq 1/n$ ist $\lfloor 1/x \rfloor = n$ und

$$f(x) - \frac{1}{n} > \frac{t_p + 1}{t_p * (n+1)} + \frac{t_p - n}{n * (n+1) * t_p} - \frac{1}{n} = \frac{n * t_p + n + t_p - n - (n+1) * t_p}{t_p * n * (n+1)} = 0.$$

Um eine Beziehung zum Wert v einer beliebigen Variante $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ in einer Instanz $E := (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ des 1CSPs herzustellen, wird ein spezielles Rucksackproblem hergeleitet.

$$v = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{\lfloor w/\ell_i \rfloor} < \sum_{i=1}^m a_i * f\left(\frac{\ell_i}{w}\right) = \frac{t_p + 1}{t_p} * \sum_{i=1}^m a_i * \frac{\ell_i}{w} + \sum_{i=1}^m a_i * \tilde{f}\left(\frac{\ell_i}{w}\right)$$

Somit entsteht das Rucksackproblem

$$z_1 := \sum_{i=1}^m a_i * \tilde{f}\left(\frac{\ell_i}{w}\right) \rightarrow \max! \quad \text{bei } a_i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{l} \leq w. \quad (2.13)$$

Teile gleichen Typs werden nun zusammengefaßt. Für $s = 1, \dots, t_p - 1$ seien

$$I_s := \{i \in I : k_i = s\} = \left\{i \in I : \frac{1}{s+1} < \frac{\ell_i}{w} \leq \frac{1}{s}\right\}$$

und $y_s := \sum_{i \in I_s} a_i$. Anstelle des Problems (2.13) wird das Ersatzproblem

$$z_2 := \sum_{s=1}^{t_p-1} \frac{t_p - s}{s * (s+1) * t_p} * y_s \rightarrow \max! \quad \text{bei} \quad \sum_{s=1}^{t_p-1} \frac{y_s}{s+1} < 1, \quad y_s \in \mathbb{N} \quad (2.14)$$

gelöst. Es gilt $z_1 \leq z_2$. Die spezifischen Werte der gesuchten y_s lauten $\frac{t_p - s}{s * t_p}$ und fallen streng monoton. Das Problem (2.14) kann leicht mit Dominanzüberlegungen gelöst werden.

Zuerst sei $q := 0$. Bevor über y_{t_q} entschieden wird, ist der von den schon in den Rucksack gepackten Teilen noch nicht belegte Platz $1/t_q$. Daraus folgt $y_{t_q} \leq 1$. Wird $y_{t_q} := 1$ gesetzt, dann erhöht sich z_2 im Problem (2.14) um

$$\frac{t_p - t_q}{t_q * (t_q + 1) * t_p} = \frac{t_p - t_q}{t_{q+1} * t_p}.$$

Wird dagegen $y_{t_q} := 0$ gesetzt, dann ist $y_{t_{q+1}} \leq (t_q + 2)/t_q$, und alle weiteren Teile ergeben höchstens den Beitrag

$$\frac{t_p - t_q - 1}{(t_q + 1) * (t_q + 2) * t_p} * \frac{t_q + 2}{t_q} < \frac{t_p - t_q}{t_{q+1} * t_p}$$

für z_2 , was nicht optimal ist. Deshalb ist $y_{t_q} := 1$ zu wählen. Danach verbleibt ein freier Platz

$$\frac{1}{t_q} - \frac{1}{t_q + 1} = \frac{1}{t_q * (t_q + 1)} = \frac{1}{t_{q+1}}$$

im Rucksack. Folglich ist $y_s = 0$ für alle s mit $t_q < s < t_{q+1}$ zu setzen. Diese Überlegungen können mit einem um 1 erhöhten q wiederholt werden, solange $q < p$ ist. Gegebenenfalls werden im Rucksackproblem (2.14) noch wertlose Teile mit der Größe 0 ergänzt. Folglich gilt

$$v < \frac{t_p + 1}{t_p} + \sum_{n=0}^{p-1} \frac{t_p - t_n}{t_p * t_{n+1}} = (1 - \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{t_n + 1})/t_p + \sum_{n=0}^p \frac{1}{t_n} = \frac{1}{t_p^2} + \sum_{n=0}^p \frac{1}{t_n}.$$

Diese Abschätzung gilt für beliebige $p \in \mathbb{N}$ und geht für $p \rightarrow \infty$ in $v \leq \hat{v}$ über. Da in v nur endlich viele rationale Zahlen addiert wurden, ist die Behauptung bewiesen, sobald die Irrationalität von \hat{v} gezeigt wurde.

Angenommen, es gäbe eine positive ganze Zahl g mit $g * \hat{v} \in \mathbb{N}$. Für hinreichend großes $p \in \mathbb{N}$ ist $2g < t_p + 1$, so daß

$$0 < \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{g * t_p}{t_n} < 1$$

wird, denn der erste Summand liegt in $(0, 1/2)$, und alle weiteren Summanden sind höchstens halb so groß wie der vorherige. Wegen

$$\sum_{n=0}^p \frac{g * t_p}{t_n} \in \mathbb{N}$$

ergibt sich der Widerspruch $g * t_p * \hat{v} \notin \mathbb{N}$. □

Sei $\bar{\mathbf{k}} := (1/k_1, \dots, 1/k_m)^T$. Ferner sei \mathbf{x} eine Optimallösung von (1.6). Mit $v < \hat{v}$ aufgrund des Lemmas 3 und der linken Ungleichung in (2.11) folgt die sehr grobe Abschätzung

$$z_D < 7/5 + \bar{\mathbf{k}}^T \mathbf{b} = 7/5 + \bar{\mathbf{k}}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 7/5 + \hat{v} * \sum_{j \in J} x_j = 7/5 + \hat{v} * z_C, \quad (2.15)$$

also $\Delta < 7/5 + (\hat{v} - 1) * z_C$ und $\Delta < (1 - 1/\hat{v}) * m + 7/(5\hat{v})$ wegen Lemma 1, weil die Formel (2.15) für alle Instanzen des 1CSPs gilt, also insbesondere auch für residuale. Hier wurde aber nicht berücksichtigt, daß hohe Werte nahe \hat{v} nur mit bestimmten Varianten entstehen können, etwa $1 + 1/2 + 1/6 + 1/42 + 1/1806 + \dots \approx 1,691$. Diese Überlegungen werden im Abschnitt 5.1 wieder aufgegriffen werden, weil die Materialschranke im d -dimensionalen Vektorpackproblem bei $d > 1$ für die gewünschten Abschätzungen nicht mehr ausreicht.

In der nachfolgenden Tabelle werden alle denkbaren dominanten Varianten mit Wert $v > 1$ aufgezählt, die nur Teile der Typen 1–5 enthalten. Hierbei bedeutet „denkbar“, daß für bestimmte l und w oder eine bestimmte Auswahl von Teilen der vorgegebenen Typen die Varianten zulässig sind, für andere nicht. Für $i = 1, \dots, 5$ gibt $c_i \in \mathbb{N}$ an, wieviele Teile des Typs i in der Variante kombiniert wurden. Von diesen 36 Kombinationen gibt es nur zehn, die von jedem Typ höchstens ein Teil enthalten und deshalb stets eigentliche Varianten ergeben.

c_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	2	1	1	1	1	1	1
c_3	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2	1	1	1	1	1
c_4	0	1	0	0	2	1	1	0	0	0	1	0	0	2	1	1	0	0
c_5	0	0	1	0	0	1	0	2	1	0	0	1	0	0	1	0	2	1
$60v$	90	95	92	80	90	87	75	84	72	80	75	72	70	80	77	65	74	62
c_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_3	0	0	0	0	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0
c_4	3	2	1	0	1	0	2	1	0	3	2	2	1	0	4	3	2	1
c_5	0	1	2	3	0	1	0	1	2	0	2	1	3	4	1	2	3	4
$60v$	75	72	69	66	75	72	70	67	64	65	74	62	71	68	72	69	66	63

Kapitel 3

MIRUP-Untersuchungen bei $(k, k + 1)$ -Instanzen

3.1 Einführung

In diesem Kapitel werden schärfere Schranken für das 1CSP hergeleitet, indem zuerst ein wichtiger Spezialfall behandelt wird. Eine Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ des 1CSPs heißt $(k, k + 1)$ -Instanz, wenn sämtliche Teile vom Typ k oder $k + 1$ mit einer Zahl $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind. Im Fall $k = 1$ gilt IRUP, sogar $\Delta \in \{0; 1/2\}$, da keine drei Teile eine zulässige Variante bilden und jede uneigentliche Variante aus genau zwei Typ-2-Teilen besteht. Interessanter ist der Fall $k = 2$ (größere k analog). Die meisten der in diesem Kapitel angegebenen Aussagen sind schon in [27] in stark verdichteter Form enthalten und können unter einer Voraussetzung auch auf das d -VPP verallgemeinert werden, siehe Abschnitt 5.3.

Zusätzlich zur Bezeichnung (1.1) wird

$$I_k := \{i \in I : k_i = k\} \quad \text{und} \quad I_{k+1} := \{i \in I : k_i = k + 1\} \quad (3.1)$$

festgelegt. Für jede $(k, k + 1)$ -Instanz gilt dann $I = I_k \cup I_{k+1}$. Eine (p, q) -Variante ist eine zulässige Variante \mathbf{a} mit $\sum_{i \in I_k} a_i = p$ und $\sum_{i \in I_{k+1}} a_i = q$, d. h. es werden genau p

Teile des Typs k und q Teile vom Typ $k + 1$ mit dieser Variante gepackt. Offensichtlich werden in Optimallösungen der stetigen Relaxation (1.6) keine (p, q) -Varianten mit $p + q < k$ und keine $(k - q, q)$ -Varianten mit $q > 0$ verwendet, denn der Wert derartiger Varianten wäre unter 1.

Sei $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}_+^n$ eine beliebige zulässige, nicht notwendig optimale, Lösung der Relaxation (1.6). Sei $S \subseteq J$ eine Teilmenge der Indexmenge aller zulässigen Varianten. Dann sei

$$y(\bar{\mathbf{x}}, S) := \sum_{j \in S} \bar{x}_j \quad (3.2)$$

die Summe der Häufigkeiten aller Varianten aus S , wobei wie üblich die leere Summe 0 ergibt, d. h. $y(\bar{\mathbf{x}}, \emptyset) = 0$. Die Summe der Häufigkeiten aller Varianten, die genau q Teile des Typs $k + 1$ enthalten, ist

$$y_q := y(\bar{\mathbf{x}}, \{j \in J \mid \sum_{i \in I_{k+1}} a_{ij} = q\}). \quad (3.3)$$

Ist \bar{x} Optimallösung der stetigen Relaxation (1.6), dann ist y_q (mit $q \in \{1, \dots, k+1\}$) die Summe der Häufigkeiten aller $(k+1-q, q)$ -Varianten, während y_0 sämtliche k -Teile-Varianten erfaßt.

3.2 Der Nenner des optimalen Zielfunktionswertes der stetigen Relaxation

Die Betrachtungen dieses Abschnitts dienen als Motivation für den Abschnitt 3.3 und als Grundlage für bestimmte Nicht-IRUP-Konstruktionen. Hierbei wird hauptsächlich der Fall $k=2$ betrachtet. Es wird gezeigt, daß für z_C sehr viele verschiedene gebrochene Zahlen möglich sind.

Aussage 9: Sei $u \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Festlegungen

$$m := 2u+1, \quad w := 2^m+3, \quad \ell_1 := (w+1)/3 \quad \text{und} \quad \ell_i := w-2\ell_{i-1} \quad \text{für} \quad i = 2, 3, \dots, m \quad (3.4)$$

ergeben eine $(2, 3)$ -Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{e})$ mit $z_C = \frac{(3m+1) \cdot 2^m + 1}{9 \cdot 2^m}$. Dieser Bruch kann nur durch 9 gekürzt werden.

Beweis: Zuerst wird gezeigt, daß tatsächlich eine $(2, 3)$ -Instanz vorliegt. Danach wird eine zulässige Lösung der Relaxation (1.6) konstruiert, die genau den angegebenen Zielfunktionswert besitzt, und gezeigt, daß die Lösung optimal ist, es also insbesondere keine bessere gibt.

Wegen (3.4) gilt $\ell_i = w/3 + (-2)^{i-1}/3 \quad \forall i \in I$, also $\ell_{2u} = 2^{2u+1}/3 + 1 - 2^{2u-1}/3 = 1 + 2^{2u-1} > w/4$ und $\ell_{2u+1} = 2^{2u+1}/3 + 1 + 2^{2u}/3 = 1 + 2^{2u} < w/2$. Damit gilt $w/4 < \ell_i < w/2 \quad \forall i \in I$, so daß tatsächlich eine $(2, 3)$ -Instanz vorliegt.

Nun wird eine Kette geeigneter $(2, 1)$ - und $(1, 2)$ -Varianten erzeugt. Dabei bedeutet $x_j \times \mathbf{a}^j$, daß die Variante \mathbf{a}^j genau x_j -mal in (1.6) benutzt werden soll, also die Häufigkeit x_j hat:

$$\frac{1}{2} \times (2\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2) + \frac{1}{4} \times (\mathbf{e}^3 + 2\mathbf{e}^2) + \frac{3}{8} \times (2\mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^4) + \frac{5}{16} \times (\mathbf{e}^5 + 2\mathbf{e}^4) + \frac{11}{32} \times (2\mathbf{e}^5 + \mathbf{e}^6) + \dots$$

Diese Kette kann nicht mit einer Variante $3\mathbf{e}^m$ abgeschlossen werden, denn $w - 3\ell_m = 2 \cdot 4^u + 3 - 3 - 3 \cdot 4^u = -4^u < 0$, d. h. die Variante wäre unzulässig. Auf das letzte $(1, 2)$ -Glied folgt die Variante $2\mathbf{e}^m$ mit der Häufigkeit x_m .

Für die Häufigkeiten x_j , $j = 1, 2, \dots, m-1$ gilt $x_1 = 1/2$ und $x_j = (1 - x_{j-1})/2$, $j > 1$. Da die letzte Variante $2\mathbf{e}^m$ ist, gilt das auch für x_m . Die Lösung dieser Anfangswertaufgabe ist $x_j = \frac{1 - (-1/2)^j}{3}$. Es ergeben sich hohe Zweierpotenzen im Nenner von z_C :

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{1}{3} * \sum_{i=0}^{2u} (1 - (-\frac{1}{2})^i) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} * (1 - (-\frac{1}{2})^{2u}) \\ &= \frac{2u+1}{3} - \frac{1}{3} * \sum_{i=0}^{2u} (-\frac{1}{2})^i + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} * (-\frac{1}{2})^{2u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2u+2}{3} - \frac{1}{3} * \frac{2}{3} * (1 - (-\frac{1}{2})^{2u+1}) - \frac{1}{3} * (-\frac{1}{2})^{2u+1} \\
&= \frac{6u+4}{9} - \frac{1}{9} * (-\frac{1}{2})^{2u+1} = \frac{(3m+1) * 2^m + 1}{9 * 2^m}
\end{aligned}$$

Da nur endlich viele Brüche mit Zweierpotenzen als Nenner addiert wurden, im Nenner von z_C aber noch eine 9 steht, kürzen sich die Neuntel weg. Wie in (3.4) festgelegt, wurden auch genau $m = 2u + 1$ verschiedene Teile verwendet, und die oben angegebenen Varianten sind zulässig.

Nachweis der Optimalität der konstruierten Lösung trotz niedrigerer Materialschranke: Die Basismatrix \mathbf{B} hat die Gestalt

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

also $b_{ii} = 2$, $b_{i+1,i} = 1$, alles andere ist null. Die Inverse hat die Gestalt

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/8 & -1/4 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 2^{-2u-1} & -2^{-2u} & -(-1/2)^{1-2u} & \dots & 1/2 & \end{pmatrix},$$

also $b_{ij}^{(-1)} = \frac{1}{2} * (-\frac{1}{2})^{i-j}$ für $i \geq j$, sonst 0. Die in der Spaltengenerierung zu lösenden Rucksackprobleme lauten $\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a} \rightarrow \max!$ bei $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^m$, $\mathbf{l}^T \mathbf{a} \leq w$. Die i -te Komponente des Zeilenvektors $\mathbf{g}^T = \mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1}$ ist

$$g_i = \frac{1}{2} * \sum_{j=i}^{2u+1} (-\frac{1}{2})^{j-i} = \frac{1}{2} * \sum_{j=0}^{2u+1-i} (-\frac{1}{2})^j = \frac{1}{3} * (1 - (-\frac{1}{2})^{2u+2-i})$$

Eine Verbesserung wäre möglich, wenn $\mathbf{g}^T \mathbf{a} > 1$ würde. Nun ist aber $\max_{i \in I} g_i = \frac{1}{3} * (1 - (-\frac{1}{2})^1) = \frac{1}{2}$, d. h. nur für $\sum_{i \in I} a_i > 2$ kann $\mathbf{g}^T \mathbf{a} > 1$ werden. Weil jedes Teil höchstens dreimal in eine Ausgangslänge paßt, folgt aus der Ganzzahligkeit von \mathbf{a} schließlich $\sum_{i \in I} a_i = 3$, wenn ein Abstieg erreicht werden soll. Damit wird $\mathbf{l}^T \mathbf{a} = w + \sum_{i \in I} a_i * (-2)^{i-1} / 3$ und

$$\mathbf{g}^T \mathbf{a} = \frac{1}{3} * \sum_{i \in I} (1 - (-\frac{1}{2})^{2u+2-i}) a_i = \frac{1}{3} * 3 + \frac{1}{3} * 2^{-2u-1} * \sum_{i \in I} (-2)^{i-1} a_i.$$

Wenn $\mathbf{g}^T \mathbf{a} > 1$ werden soll, muß also $\mathbf{l}^T \mathbf{a} > w$ werden, Widerspruch. Somit gibt es keine Abstiegsmöglichkeit mehr; der erreichte Wert $z_C = (6u + 4 + 2^{-2u-1})/9$ ist optimal. \square

Bemerkung 2: Diese Überlegungen können analog auf $(k, k + 1)$ -Instanzen mit $k > 2$ übertragen werden, so daß das Gap sehr viele verschiedene gebrochene Werte annehmen kann.

Für $u \in \mathbb{N}$ wird auch die $(2, 3)$ -Instanz

$$E = (2^u; 3 * 2^{u+1} - 5; (5 * 2^{u-1} - 2, 5 * 2^{u-1} - 3, \dots, 3 * 2^{u-1}, 3 * 2^{u-1} - 1)^T; \mathbf{e}) \quad (3.5)$$

betrachtet. Für $u = 0, 1, \dots, 6$ besitzt die Relaxation (1.6) die optimalen Zielfunktionswerte $1/2, 3/4, 7/5, 30/11, 124/23, 504/47$ und $2032/95$, was zur Vermutung

$$z_C \stackrel{?}{=} \frac{2^{2u-1} - 2^{u-2}}{3 * 2^{u-1} - 1} = \frac{m^2/2 - m/4}{\frac{3}{2}m - 1} = \frac{1}{18} * \frac{(6m + 1) * (\frac{3}{2}m - 1) + 1}{\frac{3}{2}m - 1}$$

Anlaß gibt. Der Beweis steht noch aus. Für $u \geq 2$ sind Zähler und Nenner teilerfremde natürliche Zahlen.

Wird in der Instanz (3.5) das größte Teil durch $(w - 1)/2 = 3m - 3$ bei $u > 1$ ersetzt, dann entstehen andere auffällige Nenner. Oft können noch viele eigentliche Varianten abgetrennt werden, wobei z_C jeweils um 1 fällt, der Nenner also unverändert bleibt. So eine Instanz ist z. B.

$$E = (22; 379; (189, 155, 153, 150, 149, 144, 138, 136, 133, 131, 128, 127, 123, 122, 117, 113, 112, 107, 103, 99, 97, 95)^T; \mathbf{e}), \quad z_C = 7 + 167/376.$$

Das Abtrennen anderer oder weiterer Varianten oder das Variieren der Längen kann andere Primfaktoren im Nenner liefern, z. B.

Nenner 14: $E = (5; 90; (42, 36, 31, 25, 23)^T; \mathbf{e})$ ergibt $z_C = 1 + 11/14$;
 Nenner 17: $E = (8; 90; (43, 42, 36, 31, 26, 25, 24, 23)^T; \mathbf{e})$, $z_C = 2 + 14/17$;
 Nenner 38: $E = (8; 128; (52, 50, 46, 43, 42, 40, 36, 34)^T; \mathbf{e})$, $z_C = 2 + 27/38$;
 Nenner 26: $E = (12; 187; (78, 77, 75, 72, 65, 60, 58, 57, 54, 53, 52, 49)^T; \mathbf{e})$,
 $z_C = 4 + 1/26$;
 Nenner 62: $E = (14; 187; (78, 77, 75, 72, 69, 65, 63, 60, 58, 57, 53, 52, 50, 49)^T; \mathbf{e})$,
 $z_C = 4 + 45/62$.

3.3 Rückführung auf einfachere Instanzen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie jede $(k, k + 1)$ -Instanz so vereinfacht werden kann, daß der optimale Zielfunktionswert der stetigen Relaxation (1.6) ganzzahlig wird. \mathbf{x}^C und \mathbf{x}^D seien beliebige Optimallösungen von (1.6) bzw. (1.3). Unter Benutzung der Bezeichnung (3.2) wird $y_C := y(\mathbf{x}^C, \{j \in J : \mathbf{e}^T \mathbf{a}^j \leq k\})$ und $y_D := y(\mathbf{x}^D, \{j \in J : \mathbf{e}^T \mathbf{a}^j \leq k\})$ gesetzt, d. h. y_C und y_D geben die Summen der Häufigkeiten derjenigen Varianten an, welche aus höchstens k Teilen bestehen.

Lemma 4: $y_D \geq y_C$.

Beweis: $y(\mathbf{x}^C, \{j \in J : \mathbf{e}^T \mathbf{a}^j < k\}) = 0$ und $y(\mathbf{x}^C, \{j \in J : \mathbf{e}^T \mathbf{a}^j > k\}) = z_C - y_C$ sind offensichtlich. Die Teilebilanz liefert

$$\mathbf{e}^T \mathbf{b} = y_C * k + (z_C - y_C) * (k + 1) = z_C * (k + 1) - y_C. \quad (3.6)$$

Gilt $y_D = 0$, dann folgt $(k+1) * z_C - y_C = \mathbf{e}^T \mathbf{b} = (k+1) * z_D \geq (k+1) * z_C$, also $y_C \leq 0$ und somit $y_C = 0$. Das bedeutet die Implikation $y_C > 0 \implies y_D > 0$. Wegen $y_D \in \mathbb{N}$ heißt das $y_D \geq 1$. Bei $y_C = 0$ ist $y_D \geq y_C$ offensichtlich wahr. Deshalb ist der Beweis nur noch für den Fall $y_C > 0$ zu führen, d. h. $y_D \geq \max\{1, y_C\}$ ist zu zeigen.

Nach Definition gilt $y(\mathbf{x}^D, \{j \in J : \mathbf{e}^T \mathbf{a}^j = k+1\}) = z_D - y_D$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann verlangt werden, daß $x_j^D = 0 \forall j > z_D$ gilt und für $j = 1, \dots, z_D - y_D$ mit den zu \mathbf{x}^D gehörenden Varianten \mathbf{a}^j je $k+1$ Teile gepackt werden, wobei ggf. gleiche Varianten mehrfach vorkommen dürfen. Ferner seien die \mathbf{a}^j für $j = z_D - y_D + 1, \dots, z_D - 1$ jeweils zu \mathbf{x}^D gehörige k -Teile-Varianten und \mathbf{a}^{z_D} eine k -Teile-Variante mit $1 \leq \tilde{k} \leq k$. Dann gilt

$$\mathbf{e}^T \mathbf{b} = (k+1) * (z_D - y_D) + k * (y_D - 1) + \tilde{k} = (k+1) * z_D - y_D - k + \tilde{k}. \quad (3.7)$$

Um eine Beziehung zu z_C herzustellen, wird eine zulässige, nicht notwendig optimale, Lösung von (1.6) von \mathbf{x}^D und den Varianten \mathbf{a}^j , $j = 1, \dots, z_D$ ausgehend konstruiert. Alle Varianten außer \mathbf{a}^{z_D} werden beibehalten.

Sei $\mathbf{a}^{z_D} = \sum_{i=1}^{\tilde{k}} \mathbf{e}^{p_i}$, wobei unter den $p_i \in I$ auch gleiche vorkommen können. $k - \tilde{k}$ beliebige Teile können zu \mathbf{a}^{z_D} ergänzt werden, so daß eine zulässige Variante entsteht. Deshalb kann \mathbf{a}^{z_D} durch die Varianten $\mathbf{a}^{z_D} + (k - \tilde{k})\mathbf{e}^{p_i}$, $i = 1, \dots, \tilde{k}$ ersetzt werden. Jede dieser Ersatzvarianten wird genau $1/k$ -mal gefertigt. Das ergibt eine zulässige Lösung der Relaxation (1.6), denn jede Variante ist zulässig und wird in nicht negativer Häufigkeit realisiert, und alle Teile werden gepackt. Deshalb ist

$$z_C \leq (z_D - y_D) + (y_D - 1) + \tilde{k}/k = z_D - 1 + \tilde{k}/k. \quad (3.8)$$

Subtraktion der Gleichung (3.6) von (3.7) führt auf $(k+1)*(z_D - z_C) + \tilde{k} - k = y_D - y_C$. Einsetzen von (3.8) ergibt $y_D - y_C \geq (k+1) * (1 - \tilde{k}/k) + \tilde{k} - k = 1 - \tilde{k}/k \geq 0$ wegen $\tilde{k} \leq k$. \square

Beispiel: In der (2, 3)-Instanz

$$E_1 = (13; 8195; (4097, 3073, 2817, 2753, 2737, 2733, 2732, 2731, 2729, 2721, 2689, 2561, 2049)^T; 5\mathbf{e} + 45\mathbf{e}^8) \quad (3.9)$$

gilt $z_C \approx 37,2217$ und $y_C \approx 1,6650$, also $y_D \geq 2$. Folglich müssen in Optimallösungen von (1.3) mindestens zwei Varianten mit jeweils höchstens zwei Teilen vorkommen. \triangleleft

Bemerkung 3: Eine Verallgemeinerung von Lemma 4 auf Instanzen des 1CSPs mit drei Typen k , $k+1$ und $k+2$ von Teilen stößt auf Schwierigkeiten.

Beispiel: Die Instanz $E = (5; 36; (18, 14, 12, 11, 8)^T; (3, 3, 3, 3, 6)^T)$ hat IRUP; es gilt $z_C = z_M = 6 - 1/12$ und $z_D = 6$. Optimale Pläne für (1.6) und (1.3) sind

$$\frac{3}{2} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{4} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{5}{12} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die Variante $\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^2$ führt wegen zu großen Verschnitts auf $z > 6$, also auf keine Optimallösung. Es ist somit $y(\mathbf{x}^D, \{j \in J : \mathbf{e}^T \mathbf{a}^j \leq 2\}) = 1 < 3/2 = y(\mathbf{x}^C, \{j \in J : \mathbf{e}^T \mathbf{a}^j \leq 2\})$. \triangleleft

Lemma 5: Sei $E := (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{e})$ eine $(k, k+1)$ -Instanz, und sei $q := k * \lceil y_C \rceil < m$. Das Entfernen der q größten Teile aus E ergebe die Instanz $E' = (m'; w; \mathbf{l}'; \mathbf{b}')$. Dann gilt $\Delta(E) \geq \Delta(E') > \Delta(E) - 1/(k+1)$ und $(k+1) * z_C(E') = \sum_{i=1}^{m'} b'_i \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wegen Lemma 4 treten in jeder Optimallösung von (1.3) mindestens $\lceil y_C \rceil$ Varianten mit jeweils höchstens k Teilen auf. Das heißt aber nicht notwendig $y_D = \lceil y_C \rceil$, denn das hieße IRUP. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden in den $\lceil y_C \rceil$ erwähnten Varianten die q größten Teile untergebracht, so daß

$$z_D(E') = z_D(E) - \lceil y_C(E) \rceil \quad (3.10)$$

folgt. Daß $y_C(E') = 0$ gilt, wird in mehreren Schritten gezeigt.

Wegen (3.6) ist mit $z_C(E)$ auch $y_C(E)$ minimal. Sei o. B. d. A. $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_m$. Dann gibt es für E eine Lösung von (1.6), in der in den $y_C(E)$ k -Teile-Varianten nur Teile aus $\{1, \dots, q\}$ gepackt werden. Diese q größten Teile können mit $\lceil y_C(E) \rceil$ k -Teile-Varianten erhalten werden.

Um für E' eine zulässige Lösung von (1.6) zu erhalten, werden die verbleibenden $z_C(E) - y_C(E)$ aus je $k+1$ Teilen bestehenden Varianten betrachtet. Sei \mathbf{a}^j solch eine Variante mit Häufigkeit x_j . Treten in \mathbf{a}^j Teile aus $\{1, \dots, q\}$ auf, dann wird \mathbf{a}^j wie folgt durch andere Varianten ersetzt. Für $i = q+1, \dots, m$ bekommen diese Ersatzvarianten die Häufigkeiten $a_{ij}x_j/(k+1)$, und sie enthalten keine Teile aus $\{1, \dots, q\}$. Die Ersatzvarianten sind

$$\mathbf{a}^j + \sum_{p=1}^q a_{pj} * (\mathbf{e}^i - \mathbf{e}^p), \quad i = q+1, \dots, m.$$

Wegen $p \leq q < i$ und $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_m$ sind diese Varianten zulässig, und mit ihnen werden je $k+1$ Teile gepackt. Die Ersatzvarianten summieren sich zu

$$\begin{aligned} & \frac{x_j}{k+1} * \sum_{i=q+1}^m a_{ij} * \left(\mathbf{a}^j + \sum_{p=1}^q a_{pj} * (\mathbf{e}^i - \mathbf{e}^p) \right) \\ &= \frac{x_j}{k+1} * \left((k+1 - \sum_{i=1}^q a_{ij}) * (0, \dots, 0, a_{q+1,j}, \dots, a_{m,j})^T + \sum_{p=1}^q a_{pj} * \sum_{i=q+1}^m a_{ij} \mathbf{e}^i \right) \\ &= x_j * (0, \dots, 0, a_{q+1,j}, \dots, a_{m,j})^T. \end{aligned}$$

Folglich werden die Teile aus $\{q+1, \dots, m\}$ in der selben Anzahl wie mit x_j -mal der Variante \mathbf{a}^j erhalten.

Die konstruierte Lösung von (1.6) für E' enthält nur Varianten mit je $k + 1$ Teilen, aber nicht aus $\{1, \dots, q\}$. Ihr Beitrag zum Zielfunktionswert ist $(m - q)/(k + 1)$. Also ist $y_C(E') = 0$, vgl. (3.6). Wegen $m = \mathbf{e}^T \mathbf{b}$ ist $z_C(E') = (m - k * \lceil y_C(E) \rceil)/(k + 1)$, also $(k + 1) * z_C(E') = m - q = \sum_{i=1}^{m'} b'_i \in \mathbb{N}$. Aus den Gleichungen (3.10) und (3.6) folgt

$$\begin{aligned} \Delta(E') &= z_D(E') - z_C(E') \\ &= z_D(E) - \lceil y_C(E) \rceil - \frac{m - k * \lceil y_C(E) \rceil}{k + 1} - z_C(E) + \frac{m + y_C(E)}{k + 1} \\ &= \Delta(E) - \frac{\lceil y_C(E) \rceil - y_C(E)}{k + 1}, \end{aligned}$$

also $\Delta(E') \leq \Delta(E)$ und $\Delta(E') > \Delta(E) - 1/(k + 1)$. \square

Bemerkung 4: Im Gegensatz zum Übergang zur residualen Instanz (1.11) liefert Lemma 5 eine Instanz E' mit nicht größerem Gap.

Beispiel: Für die Instanz (3.9) war $y_D \geq 2$ festgestellt worden. Zweimaliges Zuschneiden der Variante $2\mathbf{e}^1$ führt auf eine Instanz E_2 mit den selben Werten für m , w und \mathbf{l} , aber $\mathbf{b} = 5\mathbf{e} - 4\mathbf{e}^1 + 45\mathbf{e}^8$. Damit wird $y_C(E_2) = 0$ und $z_C(E_2) = 35 + 1/3$. \triangleleft

Lemma 6: Sei eine $(k, k + 1)$ -Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ mit $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_m$, $b_1 = 1$ und $z_C = (\mathbf{e}^T \mathbf{b})/(k + 1)$ gegeben. Sei $E' := (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b} - \mathbf{e}^1)$, wobei $b'_1 = 0$ ist. Dann gilt $z_C(E') = z_C(E) - 1/(k + 1)$.

Beweis: Analog zu den Betrachtungen der k -Teile-Varianten in Lemma 4 wird eine neue zulässige Lösung von (1.6) für E' mit dem gewünschten Zielfunktionswert konstruiert. Da nicht mehr als $k + 1$ Teile in eine Variante passen, gilt

$$z_C(E') \geq \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{b}'}{k + 1} = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{b} - 1}{k + 1} = z_C(E) - \frac{1}{k + 1}.$$

Sei $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$ eine beliebige $(k + 1)$ -Teile-Variante einer Optimallösung von (1.6) für E mit Häufigkeit x . Angenommen, $a_1 > 0$. Dann werden für $i = 2, 3, \dots, m$ Ersatzvarianten ohne das größte Teil gepackt. Die i -te Ersatzvariante ist $\mathbf{a} - a_1\mathbf{e}^1 + a_1\mathbf{e}^i$ und wird $a_i x/(k + 1)$ -mal geschnitten. Die Häufigkeiten dieser $m - 1$ Varianten summieren sich in der Relaxation (1.6) zu

$$\frac{x}{k + 1} * \sum_{i=2}^m a_i = \frac{x}{k + 1} * (k + 1 - a_1) = x * \left(1 - \frac{a_1}{k + 1}\right),$$

und wegen

$$\begin{aligned} \frac{x}{k + 1} * \sum_{i=2}^m a_i (\mathbf{a} - a_1\mathbf{e}^1 + a_1\mathbf{e}^i) &= x * \left(1 - \frac{a_1}{k + 1}\right) * (\mathbf{a} - a_1\mathbf{e}^1) + \frac{a_1 x}{k + 1} * \sum_{i=2}^m a_i \mathbf{e}^i \\ &= x * \left(1 - \frac{a_1}{k + 1}\right) * (\mathbf{a} - a_1\mathbf{e}^1) + \frac{a_1 x}{k + 1} * (\mathbf{a} - a_1\mathbf{e}^1) \\ &= x * (\mathbf{a} - a_1\mathbf{e}^1) \end{aligned}$$

werden alle Teile bis auf $a_1 x$ -mal Teil 1 erhalten. Wegen $\sum x_j \mathbf{a}^j = \mathbf{b}$ und $b_1 = 1$ addieren sich diese Einsparungen zu genau $1/(k + 1)$ in der stetigen Relaxation (1.6) für E' . \square

Beispiel: Lemma 5 angewandt auf die Instanz (3.9) ergab E_2 , und E_2 wird weiter reduziert. Werden die beiden größten Teile je einmal entfernt, dann verbleibt als Bedarfsvektor $5\mathbf{e} - 5\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^2 + 45\mathbf{e}^8$, und der optimale Zielfunktionswert der Relaxation (1.6) sinkt auf $34 + 2/3$, so daß Lemma 6 erneut anwendbar ist. Mit zweimaligem Zuschneiden des zweiten Teils in einer Variante ergibt sich die Instanz

$$E_3 = (12; 8195; (3073, 2817, 2753, 2737, 2733, 2732, 2731, 2729, 2721, 2689, 2561, 2049)^T; 5\mathbf{e} - 3\mathbf{e}^1 + 45\mathbf{e}^7) \quad (3.11)$$

mit $z_C(E_3) = 34$. Dennoch ergibt (1.6) viele nicht ganzzahlige Optimallösungen. \triangleleft

Folgerung: Jede $(k, k+1)$ -Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ des 1CSPs mit $z_C(E) \notin \mathbb{N}$ kann auf eine Instanz E' mit $z_C(E') \in \mathbb{N}$, $z_C(E') < z_C(E)$ und $\Delta(E) - 1 < \Delta(E') < \Delta(E)$ reduziert werden. Insbesondere heißt das: Ist $C(k) \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $(k, k+1)$ -Instanzen mit $z_C \leq C(k) \wedge z_C \in \mathbb{N}$ MIRUP gilt, dann gilt MIRUP für alle $(k, k+1)$ -Instanzen mit $z_C < C(k) + 1$.

Beweis: Laut Abschnitt 1.5 darf o. B. d. A. $\mathbf{b} = \mathbf{e}$ in E angenommen werden. Nun ist eine Reduktion gemäß Lemma 5 möglich. Diese führt auf eine Instanz $E'' = (m''; w; \mathbf{l}''; (1, 1, \dots, 1)^T)$ mit $z_C(E'') = m''/(k+1)$ und somit $(k+1) * \Delta(E'') \in \mathbb{N}$. Das bedeutet wegen Lemma 5 auch $\lfloor \Delta(E'') \rfloor = \lfloor \Delta(E) \rfloor$. Sei o. B. d. A. $\ell_1'' \geq \dots \geq \ell_{m''}''$, so daß Lemma 6 wiederholt anwendbar ist, bis der optimale Zielfunktionswert der Relaxation (1.6) ganzzahlig wird. Bei diesen Reduktionen wird jeweils ein kleineres Gap erhalten. Folgende Fälle können sich ergeben:

1. Ist $z_C(E'')$ schon ganzzahlig, dann entfällt die Reduktion, und es wird $E' := E''$ gesetzt.
2. Ist $z_C(E'') < 1$, dann ist $\Delta(E'') \leq k/(k+1)$, also $\Delta(E) < 1$ aufgrund Lemma 5. Hier wird E' die leere Instanz ($m' = 0$).
3. Ist $z_C(E'') > 1$, aber nicht ganzzahlig, dann entsteht die Instanz E''' aus E'' durch Abtrennung der k größten Teile. k -malige Anwendung von Lemma 6 ergibt $z_C(E''') = z_C(E'') - k/(k+1)$. Wegen $z_C(E'') \notin \mathbb{N}$ konnten in der ganzzahligen Aufgabe (1.3) nicht nur $(k+1)$ -Teile-Varianten verwendet werden. Da die k größten Teile in einer separaten Variante geschnitten wurden, ist $z_D(E''') = z_D(E'') - 1$, also $\Delta(E''') = \Delta(E'') - 1/(k+1) \geq \lfloor \Delta(E'') \rfloor$.

Solange der dritte Fall eintritt, werden die Reduktionen mit E''' anstelle E'' fortgeführt. Höchstens k -mal konnte der dritte Fall eintreten, bevor die gewünschte Instanz E' erhalten wird. Es gilt $\lfloor \Delta(E) \rfloor = \lfloor \Delta(E') \rfloor = \Delta(E')$ wegen $z_C(E') \in \mathbb{N}$, also $\Delta(E) - 1 < \Delta(E') \leq \Delta(E)$, woraus wegen $z_C(E) \notin \mathbb{N}$ die Behauptung folgt. \square

Mit dem folgenden Lemma wird eine weitere Reduktionsmöglichkeit gegeben. (Die Begriffe „irreduzibel“ und „reduzierbar“ wurden am Anfang des Abschnitts 1.7, S. 18, definiert.)

Lemma 7: In einer $(k, k+1)$ -Instanz E mit $z_C \in \mathbb{N}$ und $m = (k+1) * z_C$ sei g die Anzahl aller zuzuschneidenden Teile des Typs k . Ist $y_{k+1} \geq 1$ (gemäß der Definition (3.3)), dann ist die Instanz reduzierbar. Ist $g < z_C$, dann ist $y_{k+1} \geq 1$, und die $k+1$

größten Teile des Typs $k + 1$ können in einer Variante geschnitten werden, wobei das Gap gleich bleibt.

Beweis: Laut Voraussetzungen ist $z_C = \sum_{i=1}^{k+1} y_i$ und $g = \sum_{i=1}^{k+1} (k + 1 - i) * y_i$. Ist $g < z_C$, dann folgt $-1 \geq g - z_C = \sum_{i=1}^{k+1} (k - i) * y_i \geq -y_{k+1}$ wegen $g \in \mathbb{N}$ und $z_C \in \mathbb{N}$. Damit ist $y_{k+1} \geq 1$, so daß jede Optimallösung von (1.6) notwendigerweise mindestens eine Variante ohne Teile des Typs k enthält. Für die ganzzahlige Aufgabe (1.3) gilt das gleiche, denn wenn $z_D \geq z_C$ Varianten mit mindestens einem Teil des Typs k gepackt werden sollten, ergäbe sich $g \geq z_D$ im Widerspruch zu $g < z_C$.

Wird eine $(0, k + 1)$ -Variante geschnitten, aber nicht mit den $k + 1$ größten Teilen des Typs $k + 1$, dann können die kleineren Teile in dieser Variante durch die größten des Typs $k + 1$ aus den anderen Varianten ausgetauscht werden. Nach Abtrennung dieser Variante entsteht eine Instanz E' mit $z_C(E') = z_C(E) - 1$. Für (1.3) gilt analoges, falls eine Optimallösung von (1.3) existiert, in der diese Variante in positiver Häufigkeit benutzt wird, z. B. bei $g < z_C$. Dann ergibt sich $z_D(E') = z_D(E) - 1$ und $\Delta(E') = \Delta(E)$. \square

Bemerkung 5: 1. Bei $k = 2 \wedge m = 3z_C$ gilt $z_C = y_1 + y_2 + y_3$ und $g = 2y_1 + y_2$ und deshalb

$$y_1 = (g - z_C) + y_3. \quad (3.12)$$

2. Es kann vorkommen, daß eine zulässige Variante \mathbf{a} existiert, die die aus Lemma 7 dominiert. Dann kann \mathbf{a} abgetrennt werden, ohne das Gap zu ändern. Unter Umständen kann dann Lemma 7 öfter benutzt werden.

Beispiel: In der Instanz (3.11) ist $g = 27 < z_C = 34$, so daß gewiß siebenmal die Variante $\mathbf{a}^1 = 3\mathbf{e}^7$ abgetrennt werden kann, ohne das Gap zu ändern. Allerdings wird diese Variante durch andere dominiert, nämlich durch $\mathbf{a}^2 = 2\mathbf{e}^6 + \mathbf{e}^7$ und $\mathbf{a}^3 = \mathbf{e}^5 + 2\mathbf{e}^7$. Die Varianten \mathbf{a}^2 und \mathbf{a}^3 sind verschnittfrei. Zweimal kann \mathbf{a}^2 und fünfmal \mathbf{a}^3 zugeschnitten werden, ohne Überproduktion zu erzielen. In der somit erhaltenen Instanz E_4 gilt wieder $g < z_C$, und es kann auch die Variante $\mathbf{a}^4 = \mathbf{e}^6 + 2\mathbf{e}^7$ einmal abgetrennt werden. (Teil 5 war schon verbraucht.) Damit entsteht die Instanz

$$E_5 = (10; 8195; (3073, 2817, 2753, 2737, 2731, 2729, 2721, 2689, 2561, 2049)^T; 5\mathbf{e} - 3\mathbf{e}^1 + 31\mathbf{e}^5)$$

mit $z_C(E_5) = 26$ und $g = 17$, so daß wegen Lemma 7 noch neunmal die Variante $3\mathbf{e}^5$ abgetrennt werden kann, ohne das Gap zu ändern. In der so entstandenen Instanz E_6 ist der Bedarfsvektor $(2, 5, 5, 5, 9, 5, 5, 5, 5, 5)^T$. Wegen $z_C(E_6) = 17 = g$ ist eine weitere Reduktion basierend auf den Lemmas 5–7 nicht möglich. Nach diesen Reduktionen kann mittels Heuristiken $z_D(E_6) = 17$, also $\Delta(E_6) = 0$ und $\Delta(E_1) < 1$ leicht gezeigt werden. Für weitere theoretische Untersuchungen stellen diese Reduktionen ebenfalls eine gute Grundlage dar. \triangleleft

3.4 A priori-Nachweis der Zulässigkeit einer Variante

Nach den Reduktionen im vorigen Abschnitt werden hier hinreichende, nicht notwendige, Bedingungen für die Zulässigkeit von Varianten in $(k, k+1)$ -Instanzen hergeleitet. Mit diesen Varianten können dann im nächsten Abschnitt zulässige, nicht notwendig optimale, Lösungen der ganzzahligen Aufgabe (1.3) aufgestellt werden. Das dient der Herleitung schärferer Abschätzungen des Gaps.

Seien $k, q \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq k$, $k \geq 2$. In der $(k, k+1)$ -Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{e})$ mit $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_m$ sei g wieder die Anzahl der Teile des Typs k , also $g = |I_k|$. Wenn nicht anders angegeben, wird $m = (k+1) * z_C$ nicht vorausgesetzt. Seien $p_1, p_2, \dots, p_{k+1} \in \mathbb{N}$ und $p_0 := 0 < p_1 \leq \dots \leq p_{k+1} \leq m$ sowie $p_q \leq g < p_{q+1}$. Gilt $\sum_{i=1}^{k+1} \ell_{p_i} \leq w$, dann wird für diese zulässige Variante $\sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{e}^{p_i}$ die Notation (p_1, \dots, p_{k+1})

benutzt; andernfalls bedeutet $\neg(p_1, \dots, p_{k+1})$ eine unzulässige Variante, d. h. $\sum_{i=1}^{k+1} \ell_{p_i} > w$. Das Ziel dieses Abschnitts besteht in der Herleitung hinreichender Bedingungen für (p_1, \dots, p_{k+1}) unabhängig von \mathbf{l} und w , also alleine mit g , z_C und y_{k+1-q} , vgl. Definition (3.3).

Einführungsbeispiel: $k = 2$, $z_C = 5$, $g = 10$, $m = 15$, also $m = (k+1) * z_C$. Wäre $\neg(8, 9, 15)$, dann gäbe es wegen $\ell_7 \geq \ell_8 \geq \ell_9$ für die Teile 7 und 8 nur Varianten der Form $(7, 10, i_1)$ und $(8, 10, i_2)$ mit $i_1, i_2 \in I_3 = \{11, \dots, 15\}$. Die Summe der Häufigkeiten der 3-Teile-Varianten für die Teile 7 und 8 müßte deshalb $b_7 + b_8 = 2$ betragen, aber wegen $b_{10} = 1$ hieße das Überproduktion von Teil 10, Widerspruch. Wäre $\neg(7, 10, 14)$, dann benutzten alle $(2, 1)$ -Varianten für Teil 7 (oder größer) Teil 15, aber das ist unmöglich. Folglich sind die Varianten $(8, 9, 15)$ und $(7, 10, 14)$ zulässig. Nach ihrer Abtrennung bleiben nur noch 6 Typ-2-Teile und 3 Typ-3-Teile übrig, so daß aufgrund der Abschätzung (2.12), S. 32, MIRUP gilt: $z_D \leq 2 + \lfloor \frac{6}{2} + \frac{3}{3} + 1 - \frac{1}{6} \rfloor = 6$. \triangleleft

J ist die Menge aller zulässigen Varianten. Für festes q sei J_0 die Menge aller zulässigen $(q, k+1-q)$ -Varianten. Offensichtlich gilt

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i = 1 \quad \forall i \in I, \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} = k+1 \quad \forall j \in J_0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^g a_{ij} = q \quad \forall j \in J_0.$$

Zur Motivation der weiteren Herleitungen wird der Fall $k = q = 3$ (und damit y_1) ausführlicher untersucht. Angenommen, $\neg(p_1, p_2, p_3; p_4)$. Trotzdem können für bestimmte w und \mathbf{l} u. a. die folgenden Varianten zulässig sein.

- | | |
|---|-----------------------------------|
| 1. $(1, 1, p_3 + 1; g + 1)$ | 2. $(1, 1, 1; p_4 + 1)$ |
| 3. $(p_1 + 1, p_1 + 1, p_1 + 1; g + 1)$ | 4. $(1, p_2 + 1, p_2 + 1; g + 1)$ |
| 5. $(p_1 + 1, p_1 + 1, p_2 + 1; g + 1)$ | |

Das heißt z. B. $2\ell_1 + \ell_{p_3+1} + \ell_{g+1} \leq w$. Diesen Varianten werden Teilmengen von J_0 zugeordnet. Die Mengen J_1 bis J_6 werden durch die folgenden Bedingungen charakterisiert.

$$\begin{aligned}
J_1 &:= \{j \in J_0 \mid \sum_{i=p_3+1}^g a_{ij} \geq 1\}, & J_2 &:= \{j \in J_0 \mid \sum_{i=p_4+1}^m a_{ij} = 1\}, \\
J_3 &:= \{j \in J_0 \mid \sum_{i=p_1+1}^{p_2} a_{ij} = 3\}, & J_4 &:= \{j \in J_0 \mid \sum_{i=p_2+1}^{p_3} a_{ij} \geq 2\}, \\
J_5 &:= \{j \in J_0 \mid \sum_{i=p_1+1}^{p_2} a_{ij} = 2 \wedge \sum_{i=p_2+1}^{p_3} a_{ij} = 1\}, & J_6 &:= J_0 \setminus \bigcup_{i=1}^5 J_i.
\end{aligned}$$

Für alle $j \in J_6$ gilt $\sum_{i=1}^{p_3} a_{ij} = 3$, $\sum_{i=g+1}^{p_4} a_{ij} = 1$, $\sum_{i=p_1+1}^{p_2} a_{ij} \leq 2$, $\sum_{i=p_2+1}^{p_3} a_{ij} \leq 1$ und $j \notin J_5$.
Zwei Fälle ergeben sich:

- Wenn $\sum_{i=p_2+1}^{p_3} a_{ij} = 1$ ist, dann folgt $\sum_{i=p_1+1}^{p_2} a_{ij} \leq 1$ und $\sum_{i=1}^{p_2} a_{ij} = 2$, also $\sum_{i=1}^{p_1} a_{ij} \geq 1$ im Widerspruch zu $\neg(p_1, p_2, p_3; p_4)$ wegen der Monotonie der ℓ_i .
- Bei $\sum_{i=p_2+1}^{p_3} a_{ij} = 0$ ist $\sum_{i=1}^{p_2} a_{ij} = 3$ und $\sum_{i=1}^{p_1} a_{ij} \geq 1$, Widerspruch zu $\neg(p_1, p_2, p_3; p_4)$.

Folglich ist J_6 leer. Wegen $\mathbf{b} = \mathbf{e}$ gelten für jede Optimallösung \mathbf{x}^C von (1.6) die Ungleichungen $y(\mathbf{x}^C, J_1) \leq g - p_3$, $y(\mathbf{x}^C, J_2) \leq m - p_4$, $y(\mathbf{x}^C, J_3) \leq (p_2 - p_1)/3$ und $y(\mathbf{x}^C, J_4) \leq (p_3 - p_2)/2$ mit der Definition (3.2). Ist $J_5 = \emptyset$, dann folgt

$$y_1 \leq g - p_3 + m - p_4 + \frac{p_2 - p_1}{3} + \frac{p_3 - p_2}{2}. \quad (3.13)$$

Diese Ungleichung gilt auch für beliebige J_5 , wie jetzt gezeigt wird. Offensichtlich sind J_3 , J_4 und J_5 paarweise disjunkt, da jede Variante höchstens vier Teile enthalten konnte. Die Menge J_5 wird durch zwei Bedingungen gekennzeichnet. Dies wird wie folgt ausgenutzt: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J_5} x_j &= \sum_{j \in J_5} x_j * (\lambda_1 + \lambda_2) = \sum_{j \in J_5} x_j * (\lambda_1 * \sum_{i=p_2+1}^{p_3} a_{ij} + \frac{\lambda_2}{2} * \sum_{i=p_1+1}^{p_2} a_{ij}) \\
\sum_{j \in J_3 \cup J_4 \cup J_5} x_j &\leq \sum_{i=p_1+1}^{p_2} (\frac{1}{3} * \sum_{j \in J_3} a_{ij} x_j + \frac{\lambda_2}{2} * \sum_{j \in J_5} a_{ij} x_j) + \\
&\quad + \sum_{i=p_2+1}^{p_3} (\frac{1}{2} * \sum_{j \in J_4} a_{ij} x_j + \lambda_1 * \sum_{j \in J_5} a_{ij} x_j).
\end{aligned}$$

Wegen $J_3 \cap J_5 = J_4 \cap J_5 = \emptyset$ kann dies zusammengefaßt und abgeschätzt werden, nämlich

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J_3 \cup J_4 \cup J_5} x_j &\leq \max\{\frac{1}{3}, \frac{\lambda_2}{2}\} * \sum_{i=p_1+1}^{p_2} \sum_{j \in J} a_{ij} x_j + \max\{\frac{1}{2}, \lambda_1\} * \sum_{i=p_2+1}^{p_3} \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \\
&= \max\{\frac{1}{3}, \frac{\lambda_2}{2}\} * \sum_{i=p_1+1}^{p_2} b_i + \max\{\frac{1}{2}, \lambda_1\} * \sum_{i=p_2+1}^{p_3} b_i \\
&= \max\{\frac{1}{3}, \frac{\lambda_2}{2}\} * (p_2 - p_1) + \max\{\frac{1}{2}, \lambda_1\} * (p_3 - p_2).
\end{aligned}$$

Wird $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ gesetzt, dann entstehen genau die gewünschten Terme für die Abschätzung von y_1 in der Ungleichung (3.13).

Diese Betrachtungen können für jedes k und q vorgenommen werden, wenn weiterhin $\neg(p_1, \dots, p_{k+1})$ angenommen wird. Sei $M_0 := \{1, 2, \dots, k+1\} \setminus \{q+1\}$. Auf J_0 wird eine Äquivalenzrelation eingeführt. Für $r \in J_0$ wird die Äquivalenzklasse $[r]$ wie folgt definiert:

$$s \in [r] \iff \sum_{i=p_{j-1}+1}^{p_j} (a_{ir} - a_{is}) = 0 \quad \forall j \in M_0$$

Für $r = 1, \dots, k+1$ sei $[r] = J_r$. Die Äquivalenzklasse $[r]$ kann (auch bei $r > k+1$) unabhängig vom konkret gewählten Repräsentanten eindeutig mit Hilfe eines Tupels $\mathbf{c}^r \in \mathbb{N}^{k+1}$ charakterisiert werden:

$$j \in [r] \implies c_{q+1,r} := \sum_{i=g+1}^{p_{q+1}} a_{ij} \quad \text{und} \quad c_{sr} := \sum_{i=p_{s-1}+1}^{p_s} a_{ij} \quad \text{für} \quad s \in M_0 \quad (3.14)$$

Beispiel: $k = q = 3$, $p_1 + 2 < p_2$, $g + 1 < p_4$. Dann gehören die Varianten $(p_1 + 1, p_1 + 1, p_2 + 1, g + 1)$ und $(p_1 + 2, p_1 + 3, p_3, g + 2)$ zur gleichen Äquivalenzklasse, falls sie zulässig sind. Ihnen wird das Tupel $(0, 2, 1, 1)$ zugeordnet, denn beide Varianten bestehen aus null Teilen aus $\{1, \dots, p_1\}$, zwei Teilen aus $\{p_1 + 1, \dots, p_2\}$, einem aus $\{p_2 + 1, \dots, p_3\}$, keinem weiteren Teil bis g — das wird nicht in \mathbf{c} vermerkt — und einem Teil aus $\{g + 1, \dots, p_4\}$. Ebenfalls nicht vermerkt wird in \mathbf{c} , daß kein Teil aus $\{p_4 + 1, \dots, m\}$ zu diesen Varianten gehört. Da es sich um Varianten aus J_0 handelt, ist mit \mathbf{c} alles bekannt. Die Mengen J_1 bis J_4 kombinieren verschiedene Äquivalenzklassen, z. B. gilt $c_{1j} + c_{2j} + c_{3j} < 3 \quad \forall j \in J_1$, $c_{4j} = 0 \quad \forall j \in J_2$, $c_{2j} = 3 \quad \forall j \in J_3$ und $c_{3j} \geq 2 \quad \forall j \in J_4$. \triangleleft

Offensichtlich gilt $\sum_{i=1}^q c_{ir} \leq q$, $\sum_{i=q+1}^{k+1} c_{ir} \leq k+1 - q$ und $\mathbf{c}^r \neq (1, 1, \dots, 1)^T$ für alle r , da $\neg(p_1, \dots, p_{k+1})$ und $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots \geq \ell_m$ angenommen worden war. Da es auch keine $\neg(p_1, \dots, p_{k+1})$ dominierende Variante geben kann, gilt für alle r mit $\sum_{i=1}^{k+1} c_{ir} = k+1$:

$$\exists j \in \{1, 2, \dots, k\} \setminus \{q\} : \sum_{i=1}^j c_{ir} < j \quad (3.15)$$

Analog zu den Betrachtungen des Spezialfalls $k = q = 3$ wird allgemein gesetzt:

$$J_1 := \{j \in J_0 \mid \sum_{i=1}^{p_q} a_{ij} < q\} = \{j \in J_0 \mid \sum_{i=p_{q+1}}^q a_{ij} \geq 1\},$$

$$J_2 := \{j \in J_0 \setminus J_1 \mid \sum_{i=1}^{p_{k+1}} a_{ij} \leq k\} = \{j \in J_0 \setminus J_1 \mid \sum_{i=p_{k+1}+1}^m a_{ij} \geq 1\},$$

$$\text{bei } q > 1: \quad J_{r+2} := \{j \in J_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{r+1} J_i \mid \sum_{i=p_{r+1}}^{p_{r+1}} a_{ij} = q - r + 1\} \quad \text{für } r = 1, \dots, q-1,$$

$$\text{bei } q < k: \quad J_{r+1} := \{j \in J_0 \setminus \bigcup_{i=1}^r J_i \mid \sum_{i=p_{r+1}}^{p_{r+1}} a_{ij} = k - r + 2\} \quad \text{für } r = q+1, \dots, k.$$

Im Unterschied zum Spezialfall $k = q = 3$ sind hier alle Mengen J_r paarweise disjunkt.

Aus der Festlegung (3.14) ergibt sich z. B. $\sum_{i=1}^q c_{i1} < q$, $\sum_{i=1}^{k+1} c_{i2} \leq k$ und mit $j \in J_r$:

$$c_{r-1,r} = \sum_{i=p_{r-2}+1}^{p_{r-1}} a_{ij} \geq q - (r-2) + 1 \geq 2 \quad \text{bei } q > 1 \quad \text{und} \quad 3 \leq r \leq q+1 \quad (3.16)$$

$$c_{rr} = \sum_{i=p_{r-1}+1}^{p_r} a_{ij} \geq k - (r-1) + 2 \geq 2 \text{ bei } q < k \text{ u. } q+2 \leq r \leq k+1 \quad (3.17)$$

Angenommen, es gibt genau $K - k - 1$ weitere Äquivalenzklassen $[k+2]$ bis $[K]$ zur Beschreibung von $J_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} J_i$. Es wird $J_r := [r]$ für $r = k+2, \dots, K$ gesetzt. Gerade die letzten $K - k - 1$ Mengen J_r erschweren eine gute Abschätzung für y_{k+1-q} . Andererseits werden diese Mengen durch mehrere Bedingungen charakterisiert. Dies kann ausgenutzt werden, indem nach geeigneten Linearkombinationen dieser Restriktionen gesucht wird.

Für $r = k+2, \dots, K$ sei $M_r := \{i \in M_0 \mid c_{ir} > 0\}$. Für $r = 3, 4, \dots, q+1$ sei $M_r := \{r-1\}$, und für $r = q+2, \dots, k+1$ sei $M_r := \{r\}$. Damit gilt $c_{ir} \neq 0$ auch für $3 \leq r \leq k+1$ und $i \in M_r$.

Sei $\Lambda \in \mathbb{R}_+^{(k+1) \times K}$ eine später festgelegte Matrix mit $\sum_{i \in M_j} \lambda_{ij} \geq 1$ für $j = 3, 4, \dots, K$.

Für $2 < j \leq K \wedge i \notin M_j$ wird immer $\lambda_{ij} = 0$ gefordert. Da alle Mengen endlich sind, ist die folgende Abschätzung wahr:

$$\begin{aligned} y_{k+1-q} &= \sum_{j \in J_0} x_j = \sum_{r=1}^K \sum_{j \in J_r} x_j \\ &\leq \sum_{j \in J_1} x_j * 1 + \sum_{j \in J_2} x_j * 1 + \sum_{r=3}^K \sum_{j \in J_r} x_j * \sum_{i \in M_r} \lambda_{ir} * c_{ir} / c_{ir} \\ &\leq \sum_{j \in J_1} x_j * \sum_{i=p_q+1}^g a_{ij} + \sum_{j \in J_2} x_j * \sum_{i=p_{k+1}+1}^m a_{ij} + \sum_{r=3}^K \sum_{j \in J_r} x_j * \sum_{i \in M_r} \frac{\lambda_{ir}}{c_{ir}} * \sum_{s=p_{i-1}+1}^{p_i} a_{sj} \\ &= \sum_{i=p_q+1}^g \sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j + \sum_{i=p_{k+1}+1}^m \sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j + \\ &\quad + \sum_{i \in M_0} \sum_{r=3}^K \frac{\lambda_{ir}}{\max\{c_{ir}, 1\}} * \sum_{s=p_{i-1}+1}^{p_i} \sum_{j \in J_r} a_{sj} x_j \end{aligned}$$

Sei $\mu_i := \max_{r \in \{3, \dots, K\}} \left\{ \frac{\lambda_{ir}}{\max\{c_{ir}, 1\}} \right\}$ für $i \in M_0$. Da J_0 in paarweise disjunkte Teilmengen aufgespalten wurde, folgt

$$\begin{aligned} y_{k+1-q} &\leq \sum_{i=p_q+1}^g \sum_{j \in J} a_{ij} x_j + \sum_{i=p_{k+1}+1}^m \sum_{j \in J} a_{ij} x_j + \sum_{i \in M_0} \mu_i * \sum_{s=p_{i-1}+1}^{p_i} \sum_{j \in J} a_{sj} x_j \\ &= \sum_{i=p_q+1}^g b_i + \sum_{i=p_{k+1}+1}^m b_i + \sum_{i \in M_0} \mu_i * \sum_{s=p_{i-1}+1}^{p_i} b_s \\ &= g - p_q + m - p_{k+1} + \sum_{i \in M_0} (p_i - p_{i-1}) * \mu_i. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Um zu einer Abschätzung von y_{k+1-q} zu gelangen, wird eine zulässige Belegung von Λ gesucht. Es wird gesetzt:

- $\lambda_{ir} := 0$ für $r = 3, \dots, k+1$ und $i \notin M_r$;

- $\lambda_{ir} := 1$ für $r = 3, \dots, k+1$ und $i \in M_r$, also $\lambda_{r-1,r} = 1$ für $r = 3, \dots, q+1$ (falls $q > 1$) und $\lambda_{rr} = 1$ für $r = q+2, \dots, k+1$ (bei $q < k$);
- $\lambda_{ir} := c_{ir}/(q+2-i)$ für $r = k+2, \dots, K$ und $i = 2, \dots, q$ (falls $q > 1$);
- $\lambda_{ir} := c_{ir}/(k+3-i)$ für $r = k+2, \dots, K$ und $i = q+2, \dots, k+1$ (bei $q < k$)

Das heißt insbesondere $\lambda_{ir} = 0$ für $r = 3, \dots, K$ und $i \notin M_r$, speziell $\lambda_{1r} = 0$ für alle $r \geq 3$, folglich $\mu_1 = 0$. Nur noch $\sum_{i \in M_r} \lambda_{ir} \geq 1$ ist für $r = 3, \dots, K$ nachzuweisen, um die Zulässigkeit obiger Festlegungen zu zeigen. Für $r = 3, \dots, k+1$ gilt $\sum_{i \in M_r} \lambda_{ir} \geq 1$.

Sei $r > k+1$ fest. Für alle $j \in J_0 \setminus J_1$ gilt $\sum_{i=1}^{p_q} a_{ij} = q$, folglich $\sum_{i=1}^q c_{ir} = q$. Ferner folgt für alle $j \in J_0 \setminus (J_1 \cup J_2)$ stets $\sum_{i=1}^{p_{k+1}} a_{ij} = k+1$, also $\sum_{i=1}^{k+1} c_{ir} = k+1$. Deshalb darf die Aussage (3.15) benutzt werden, obwohl das j in (3.15) von r abhängt, doch hier ist r fest. Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

- Falls $1 \leq j < q$: $\sum_{i=j+1}^q c_{ir} \geq q - j + 1$ wegen $\sum_{i=1}^q c_{ir} = q$ und Aussage (3.15), d. h.
$$\sum_{i \in M_r} \lambda_{ir} \geq \sum_{i=j+1}^q \frac{c_{ir}}{q-i+2} \geq \frac{1}{q-j+1} * \sum_{i=j+1}^q c_{ir} \geq \frac{q-j+1}{q-j+1} = 1.$$
- Wenn $q < j \leq k$: $\sum_{i=j+1}^{k+1} c_{ir} \geq k - j + 2$ wegen $\sum_{i=1}^{k+1} c_{ir} = k+1$ und (3.15), also
$$\sum_{i \in M_r} \lambda_{ir} \geq \sum_{i=j+1}^{k+1} \frac{c_{ir}}{k-i+3} \geq \frac{1}{k-j+2} * \sum_{i=j+1}^{k+1} c_{ir} \geq \frac{k-j+2}{k-j+2} = 1.$$

Mit Hilfe der zulässigen Belegung von Λ sind für die Abschätzung von y_{k+1-q} nun die μ_i auszurechnen. Für $q > 1$ und $i = 2, \dots, q$ folgt aus der Formel (3.16)

$$\max_{r \in \{3, \dots, k+1\}} \left\{ \frac{\lambda_{ir}}{\max\{c_{ir}, 1\}} \right\} = \frac{1}{c_{i,i+1}} = \frac{1}{q+2-i},$$

also $\mu_i = 1/(q+2-i)$ wegen $\max_{r \in \{k+2, \dots, K\}} \frac{\lambda_{ir}}{\max\{c_{ir}, 1\}} \leq \frac{1}{q+2-i}$ laut Festlegung der λ_{ir} . Entsprechend folgt für $q < k$ und $i = q+2, \dots, k+1$ aus der Formel (3.17)

$$\max_{r \in \{3, \dots, k+1\}} \left\{ \frac{\lambda_{ir}}{\max\{c_{ir}, 1\}} \right\} = \frac{1}{c_{ii}} = \frac{1}{k+3-i},$$

also $\mu_i = 1/(k+3-i)$ aufgrund der Festlegung von Λ . Möglicherweise kann J_0 auf bessere Weise aufgeteilt werden, um günstigere μ_i und damit schärfere Abschätzungen für y_{k+1-q} zu erzielen, jedoch ist das mit der Wahl $\lambda_{1r} = 0 \forall r$ (und damit $\mu_1 = 0$) unmöglich, denn c_{1r} könnte die einzige Nicht-Null-Komponente von \mathbf{c}^r in den zu J_4 bis J_k zugeordneten Vektoren sein. Es folgt

Lemma 8: $k, q, g, E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{e})$ und p_1, \dots, p_{k+1} werden wie am Anfang dieses Abschnitts definiert.

a) Die Variante $\sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{e}^{p_i}$ ist zulässig, wenn gilt:

$$y_{k+1-q} > g - p_q + m - p_{k+1} + \sum_{i=2}^q \frac{p_i - p_{i-1}}{q - i + 2} + \sum_{i=q+2}^{k+1} \frac{p_i - p_{i-1}}{k - i + 3} \quad (3.19)$$

b) Bei $m = (k+1) * z_C$ ist $y_1 \geq g - (k-1)z_C$.

Beweis: a) Wäre die Variante unzulässig, dann ergäbe sich ein Widerspruch zu der für y_{k+1-q} hergeleiteten Abschätzung (3.18).

b) Wegen $m = (k+1) * z_C$ gilt $z_C = \sum_{i=1}^{k+1} y_i$ und $g = \sum_{i=1}^{k+1} (k+1-i) * y_i$ sowie $y_i \geq 0 \forall i$,

also $g - (k-1) * z_C = \sum_{i=1}^{k+1} (k+1-i-k+1) * y_i \leq y_1$. \square

Bemerkung 6: 1. Für eine gegebene $(k, k+1)$ -Instanz E konnte mit den Lemmas 6 und 7 eine Instanz E' mit $z_C \in \mathbb{N}$ und $g \geq z_C$ erzeugt werden, aber das wurde für Lemma 8 nicht gebraucht.

2. Ist $m = (k+1) * z_C$, dann ergibt Lemma 8 b) mit $q = k$ eine hinreichende Bedingung für die Zulässigkeit der Variante $\sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{e}^{p_i}$, kurz $(p_1, p_2, \dots, p_{k+1})$ geschrieben, nämlich

$$p_{k+1} + \frac{p_1}{k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p_{k+1-i}}{i * (i+1)} > 2k * z_C. \quad (3.20)$$

Beweis: Wegen $y_1 \geq g - (k-1) * z_C$ und $m = (k+1) * z_C$ ist

$$\begin{aligned} & y_1 - \left(g - p_k + m - p_{k+1} + \sum_{i=2}^k \frac{p_i - p_{i-1}}{k - i + 2} \right) \\ & \geq p_k - 2k * z_C + p_{k+1} - \frac{p_2 - p_1}{k} - \dots - \frac{p_k - p_{k-1}}{2} \\ & = p_{k+1} + \frac{p_k}{2} + \frac{p_{k-1}}{6} + \dots + \frac{p_2}{(k-1) * k} + \frac{p_1}{k} - 2k * z_C > 0 \end{aligned}$$

wegen Ungleichung (3.20), so daß die Bedingung (3.19) von Lemma 8 a) erfüllt ist. \square

3. Obwohl die y_i nicht gegeben sind, können die zwischen ihnen geltenden Beziehungen in Fallunterscheidungen genutzt werden.

4. Mittels dominanter Varianten können auch für $q < k$ zusätzliche hinreichende Bedingungen für die dominierten Varianten aufgestellt werden.

Das nächste Lemma wird auf ähnliche Weise hergeleitet und ergibt eine weitere hinreichende Bedingung für die Zulässigkeit von Varianten. Die Anwendung auf $(2, 3)$ -Instanzen und entsprechende Beispiele werden danach zusammenfassend angegeben.

Wieder werden $(k, k+1)$ -Instanzen $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{e})$ mit $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_m$ betrachtet, wobei $m = (k+1) * z_C$ gemäß Lemma 5 keine einschneidende Voraussetzung ist. Im Unterschied zu Lemma 8 wird nicht mehr nach verschiedenen $(q, k+1-q)$ -Varianten unterschieden, so daß auch die y_q keine Rolle spielen werden. Unter diesen abgeschwächten Voraussetzungen wird zwar eine strengere Zulässigkeits-Bedingung bewiesen, aber sie kommt unabhängig von g aus. Damit wird das Lemma 9 noch einfacher als Lemma 8

zu benutzen sein. Wenn die Variante $\sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{e}^{p_i}$ zulässig ist, wird wieder (p_1, \dots, p_{k+1}) , andernfalls $\neg(p_1, \dots, p_{k+1})$ geschrieben, wobei $p_0 := 0 < p_1 \leq \dots \leq p_{k+1} \leq m$ natürliche Zahlen sind.

Beispiel: $k = 2, m = 27 = 3z_C$. Dann gilt $(1, 26, 27)$, sonst könnte Teil 1 nur 1/2-mal mit der Variante $(1, 27, 27)$, also nicht in ausreichender Anzahl in 3-Teile-Varianten geschnitten werden. Ebenso folgt $(2, 24, 27)$ (Teile 1 und 2 diskutieren), $(3, 22, 27)$ usw. sowie $(3, 25, 26), \dots, (15, 19, 20)$ unabhängig von der Anzahl der Teile des Typs 2. \triangleleft

Aussagen, die die Zulässigkeit einer Variante unter der Bedingung nachweisen, daß eine andere Variante unzulässig ist, sollen nicht bewiesen werden, denn deren Beweis, Benutzung und Verallgemeinerung wären kompliziert.

Zunächst wird nur eine Aussage für den Fall $k = 2$ hergeleitet. J bezeichnet die Indexmenge aller zulässigen Varianten, J_0 die Indexmenge aller zulässigen $(k + 1)$ -Teile-Varianten. J_0 wird geeignet zerlegt, diesmal aber anders als in der Herleitung von Lemma 8.

Angenommen, $\neg(p_1, p_2, p_3)$. Dennoch kann u. a. $(1, 1, p_3 + 1), (1, p_2 + 1, p_2 + 1), (1, p_2 + 1, p_3 + 1), (1, p_1 + 1, p_3 + 1), (p_1 + 1, p_1 + 1, p_1 + 1)$ usw. gelten, aber nicht (p_1, p_1, p_3) . Diesen Repräsentanten unterschiedlicher Äquivalenzklassen (falls die Varianten tatsächlich zulässig sind) werden Tripel $\mathbf{c}^r \in \mathbb{N}^3$ ($r = 1, 2, \dots$) zugeordnet, welche beschreiben, wieviele Teile aus den Bereichen 1 bis $p_1, p_1 + 1$ bis p_2 und $p_2 + 1$ bis p_3 in der Variante vorkommen, d. h. der Äquivalenzklasse r gehören alle Varianten \mathbf{a}^j mit $j \in J_0$ an, für die $\sum_{i=1}^{p_1} a_{ij} = c_{1r}, \sum_{i=p_1+1}^{p_2} a_{ij} = c_{2r}$ und $\sum_{i=p_2+1}^{p_3} a_{ij} = c_{3r}$ gilt. J_0 wird gemäß dieser Äquivalenzrelation in J_1, \dots, J_K zerlegt, wobei $K \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Äquivalenzklassen ist. Da g und q hier nicht mehr vorkommen, sind diese c_{ir} andere als in der Festlegung (3.14).

Sei \mathbf{x} eine beliebige Optimallösung der Relaxation (1.6). Für $i = 1, 2, 3$ gilt dann $p_i - p_{i-1} = \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} b_j = \sum_{r=1}^K c_{ir} * \sum_{j \in J_r} x_j$ und außerdem $z_C = \sum_{j \in J} x_j = \sum_{j \in J_0} x_j = \sum_{r=1}^K 1 * \sum_{j \in J_r} x_j$. Für alle r wird zusätzlich $c_{4r} := 1$ festgelegt. Die Tupel \mathbf{c}^r werden zur Matrix \mathbf{C} zusammengefaßt. Mit $\mathbf{h} := (p_1, p_2 - p_1, p_3 - p_2, z_C)^T$ und $u_r := \sum_{j \in J_r} x_j$ für $r = 1, \dots, K$ wird also $\mathbf{u} \geq \mathbf{o}$ eine Lösung eines speziellen linearen Gleichungssystems $\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{h}$. Da $\neg(p_1, p_2, p_3)$ angenommen wurde, heißt das: Wenn das System $\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{h}$ keine nichtnegative Lösung besitzt, muß doch (p_1, p_2, p_3) gelten. Für $k = 2$ lautet die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Zeile entspricht der Bedingung $\sum_{r=1}^K u_r = z_C$. Die Zusatzbedingung $m - p_3 = \sum_{r=1}^K (3 - c_{1r} - c_{2r} - c_{3r}) * u_r$ wäre wegen $m = 3z_C$ linear abhängig zu den übrigen Bedingungen und wird deshalb nicht notiert.

Das Kriterium bleibt gültig, wenn alle Spalten von \mathbf{C} , die als Konvexkombination anderer Spalten darstellbar sind, gestrichen werden. Die so reduzierte Matrix heiße \mathbf{C}_k . Für $k = 2$ bzw. $k = 3$ ergibt das

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $k > 3$ wird die Unterbestimmtheit des Systems $\mathbf{C}_k \mathbf{u} = \mathbf{h}$ (wobei aus \mathbf{u} überflüssige Komponenten ebenfalls gestrichen wurden) und damit die Kompliziertheit der Untersuchung noch größer. Deshalb beschränkt sich die genaue Lsbarkeitsdiskussion des Systems auf den Fall $k = 2$. Offensichtlich ist $u_3 := (p_2 - p_1)/3$ zu wählen, während u_1, u_2, u_4, u_5 von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängen. Mit $u_2 := t$ folgt $u_1 = (p_1 - t)/2$, $u_4 = (p_3 - p_2 - 2t)/3$ und $u_5 = (6z_C - p_1 - 2p_3 + t)/6$. Da die $u_i \geq 0$ sein müssen, ist (wegen u_1 und u_4) ein möglichst kleines $t \geq 0$ zu wählen. Wird für $t = 0$ auch $u_5 \geq 0$, dann besitzt das System eine nichtnegative Lösung. Nun sei aber

$$t = p_1 + 2p_3 - 6z_C > 0 \quad (3.21)$$

(also $u_5 = 0$) und zusätzlich $t > p_1 \vee t > (p_3 - p_2)/2$, so daß Unlösbarkeit (mit $\mathbf{u} \geq \mathbf{o}$) vorliegt. $t > p_1$ erforderte $p_3 > 3z_C = m$ wegen der Ungleichung (3.21), was unmöglich ist. Es bleibt also nur $2t > p_3 - p_2$ übrig, was aufgrund der Ungleichung (3.21) auf die Bedingung $2p_1 + p_2 + 3p_3 > 12z_C$ führt. Folglich kann ohne zusätzliche Voraussetzungen kein besseres Kriterium erwartet werden. Da die Herleitung so kompliziert und aufwendig war, wird im allgemeinen Fall nur eine hinreichende Bedingung für die Unlösbarkeit des Systems $\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{h}$, $\mathbf{u} \geq \mathbf{o}$ angegeben, aber nicht untersucht, inwieweit sie notwendig ist oder durch andere Kriterien ersetzt werden kann.

Lemma 9: In der $(k, k + 1)$ -Instanz $E = (m, w, \mathbf{l}, \mathbf{e})$ des 1CSPs gelte $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_m$,

$$m = (k + 1) * z_C \quad \text{und} \quad p_1 + \sum_{i=1}^k \frac{k + 1}{(k + 1 - i) * (k + 2 - i)} * p_{i+1} > k * m \quad (3.22)$$

mit $p_i \in \mathbb{N} \forall i$ und $1 \leq p_1 \leq \dots \leq p_{k+1} \leq m$. Dann gilt (p_1, \dots, p_{k+1}) , d. h. diese Variante ist zulässig.

Beweis (indirekt): Sei $\neg(p_1, \dots, p_{k+1})$. Entsprechend der Herleitung wird die Menge J_0 wieder zerlegt, und jeder Teilmenge J_r wird ein Tupel $\mathbf{c}^r \in \mathbb{N}^{k+2}$ mit $c_{k+2,r} = 1$ und $\sum_{i=1}^{k+1} c_{ir} \leq k + 1$ zugeordnet. Wegen $\neg(p_1, \dots, p_{k+1})$ gilt außerdem für jedes dieser Tupel in Analogie zur Aussage (3.15)

$$\exists j \in \{1, \dots, k + 1\} : \sum_{i=1}^j c_{ir} < j \quad (3.23)$$

Sämtliche dieser Tupel \mathbf{c}^r werden in der Matrix \mathbf{C} zusammengefaßt. Mit $\mathbf{h} := (p_1, p_2 - p_1, p_3 - p_2, \dots, p_{k+1} - p_k, z_C)^T$ ist zu zeigen, daß das System $\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{h}$, $\mathbf{u} \geq \mathbf{o}$ unlösbar ist. Nach dem Lemma von FARKAS ist das genau dann der Fall, wenn es ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{k+2}$

mit $\mathbf{C}^T \mathbf{v} \leq \mathbf{o}$, $\mathbf{h}^T \mathbf{v} > 0$ gibt. Die Angabe einer Lösung des Alternativ-Systems reicht folglich für den gewünschten Beweis aus.

Am Beispiel $k = 2$ wird gezeigt, wie \mathbf{v} gefunden wird — der allgemeine Fall folgt später. Die Voraussetzung (3.22) verlangt $2p_1 + p_2 + 3p_3 - 12z_C > 0$, also wird wegen $\mathbf{h} = (p_1, p_2 - p_1, p_3 - p_2, z_C)^T$ zunächst $v_4 := -12$ angesetzt, ferner $v_3 := 3$, $v_2 := 1 + v_3 = 4$ und $v_1 := 2 + v_2 = 6$, so daß $\mathbf{h}^T \mathbf{v} > 0$ wird. Es muß nur noch gezeigt werden, daß $\mathbf{c}^T \mathbf{v} \leq 0$ für jedes zugelassene Quadrupel \mathbf{c} gilt. Wegen der strengen Monotonie der v_i vereinfacht sich die Abschätzung. Ist in (3.23) das j gleich 1, dann gilt $\mathbf{c}^T \mathbf{v} \leq 0 * v_1 + 3 * v_2 + v_4 = 0$. Ist $j = 2$, dann folgt $\mathbf{c}^T \mathbf{v} \leq 1 * v_1 + 2 * v_3 + v_4 = 0$. Bei $j = 3$ ist $\mathbf{c}^T \mathbf{v} \leq 2 * v_1 + v_4 = 0$. Weitere Fälle gibt es (für $k = 2$) nicht.

Allgemeiner Fall: Es wird $v_{k+2} := -k * m / z_C = -k * (k + 1)$ sowie $v_{k+1} := (k + 1) / 2$ angesetzt, dazu für $i = k, k - 1, \dots, 2$ noch $v_i := v_{i+1} + \frac{k+1}{(k+2-i) * (k+3-i)}$ und $v_1 := v_2 + 1$. Bevor $\mathbf{C}^T \mathbf{v} \leq \mathbf{o}$ gezeigt wird, müssen die Summen vereinfacht werden. Induktiv zeigt man leicht

$$\sum_{i=1}^s \frac{1}{i * (i + 1)} = \frac{s}{s + 1} \quad \forall s \in \mathbb{N}. \quad (3.24)$$

Für $i \in \{2, 3, \dots, k\}$ wird damit

$$v_i = \sum_{j=i}^{k+1} \frac{k+1}{(k+2-j) * (k+3-j)} = \sum_{j=1}^{k+2-i} \frac{k+1}{j * (j+1)} = \frac{(k+1) * (k+2-i)}{k+3-i},$$

speziell $v_2 = k$ und $v_1 = k + 1$. Nach Voraussetzung (3.22) gilt $\mathbf{h}^T \mathbf{v} > 0$.

Gegeben sei jetzt ein beliebiger Spaltenvektor \mathbf{c} von \mathbf{C} , also eines der am Anfang des Beweises eingeführten Tupel. $\mathbf{c}^T \mathbf{v} \leq 0$ soll gezeigt werden. Aufgrund der Monotonie der v_i sind nun nur $k + 1$ Bedingungen zu überprüfen, nämlich in Abhängigkeit von dem j aus Aussage (3.23). Ist jenes j gleich $k + 1$, dann ist $\mathbf{c}^T \mathbf{v} \leq k * v_1 + v_{k+2} = k * (k + 1) - k * (k + 1) = 0$. Andernfalls ist

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{v} &\leq (j - 1) * v_1 + (k + 2 - j) * v_{j+1} + v_{k+2} \\ &= (j - 1) * (k + 1) + (k + 2 - j) * \frac{(k + 1) * (k + 1 - j)}{k + 2 - j} - k * (k + 1) \\ &= (k + 1) * (j - 1 + k + 1 - j) - k * (k + 1) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß das System $\mathbf{C}^T \mathbf{v} \leq \mathbf{o}$, $\mathbf{h}^T \mathbf{v} > 0$ vom Vektor \mathbf{v} gelöst wird, folglich das System $\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{h}$, $\mathbf{u} \geq \mathbf{o}$ unlösbar und deshalb die Annahme $\neg(p_1, \dots, p_{k+1})$ falsch ist. \square

Anwendung. Für eine (2, 3)-Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{e})$ mit $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_m$ bezeichnet g die Anzahl der Teile des Typs 2, während y_1 die Summe der Häufigkeiten aller (2, 1)-Varianten einer Optimallösung der Relaxation (1.6) ist. Es wird vorausgesetzt, daß die in den Lemmas 5 bis 7 angegebenen Reduktionen bereits durchgeführt worden sind, so daß $m = 3z_C$ (gemäß Lemma 5), $z_C \in \mathbb{N}$ (ggf. wiederholt Lemma 6 anwenden) und $y_3 \in [0, 1)$ (laut Lemma 7) gilt. Die Beziehung (3.12) ergibt somit $g - z_C \leq y_1 < g - z_C + 1$. Seien $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}$, $0 < p_1 \leq p_2 \leq p_3$. Für die Zulässigkeit der Variante $\mathbf{e}^{p_1} + \mathbf{e}^{p_2} + \mathbf{e}^{p_3}$, kurz (p_1, p_2, p_3) , sind folgende Bedingungen hinreichend:

- (a) $p_1 \leq p_2 \leq g < p_3 \wedge (p_1 + p_2 + 2p_3 > 2g + 6z_C - 2y_1$ oder $p_1 + p_2 + 2p_3 \geq 8z_C + 1)$
- (b) $p_1 \leq g < p_2 \leq p_3 \wedge (p_1 + 2p_3 > g + 6z_C - 2y_1$ oder $p_1 + 2p_3 \geq 8z_C - g + 1)$
- (c) $p_1 \leq g < p_2 \leq p_3 \wedge 2p_1 + p_2 + p_3 > 6z_C + 4y_1$ (Fallunterscheidung bezüglich y_1 nötig)
- (d) $2p_1 + p_2 + 3p_3 \geq 12z_C + 1$

Begründung: (a) entspricht der Bedingung (3.19) mit $k = q = 2$, denn $y_1 > g - p_2 + m - p_3 + (p_2 - p_1)/2 = (2g + 6z_C - p_1 - p_2 - 2p_3)/2$. (b) trifft zu, weil gemäß (a) (p_1, g, p_3) gilt, was die Variante (b) dominiert. Wegen $g = 2y_1 + y_2$ entspricht (c) der Bedingung (3.19) mit $k = 2, q = 1$, denn $y_2 > g - p_1 + m - p_3 + (p_3 - p_2)/2 = g + (6z_C - 2p_1 - p_2 - p_3)/2$. (d) folgt aus Lemma 9. \square

Entsprechend sollen die gemäß diesen Kriterien als zulässig nachgewiesenen Varianten als (a)-, (b)-, (c)- oder (d)-Varianten bezeichnet werden. Keine dieser Bedingungen (a) bis (d) ist mit den anderen auszudrücken, obwohl jede (d)-Variante mit $p_2 \leq g$ auch (a)-Variante wegen $1,5 * (p_1 + p_2 + 2p_3) - (2p_1 + p_2 + 3p_3) = (p_2 - p_1)/2 \geq 0$ ist und jede (b)-Variante von einer (a)-Variante dominiert wird. Bei $p_2 > g$ ist Kriterium (a) nicht anwendbar. (c)-Varianten sind besonders bei $g = z_C$ leicht zu finden, weil dann $y_1 < 1$ wird. Bei $g = 2z_C$ jedoch sind (a)-Varianten am geeignetsten. Die Verwendung obiger Kriterien soll an Beispielen verdeutlicht werden.

Beispiel 1: $m = 27, z_C = 9, g = 17$. Gemäß (a) gilt $(5, 16, 26)$, denn $5 \leq 16 \leq 17 < 26$ und $5 + 16 + 2 * 26 = 73 \geq 8 * 9 + 1$. (d) hätte kein Ergebnis gebracht wegen $2 * 5 + 16 + 3 * 26 = 104 < 12 * 9 + 1 = 109$. Gemäß (b) gilt $(2, 18, 27)$, denn $2 + 2 * 27 + 17 = 73 \geq 8 * 9 + 1$. Wegen $18 > g$ durfte (a) nicht benutzt werden. Aufgrund Lemma 8 b) ist $y_1 \geq 17 - 9 = 8$, so daß mit (c) bestenfalls $(17, 26, 27)$ nachzuweisen ist, aber nur bei $8 \leq y_1 < 8,25$. Dann ergibt sich nämlich $2 * 17 + 26 + 27 = 87 = 6 * 9 + 4 * 8,25 > 6z_C + 4y_1$. \triangleleft

Beispiel 2: $m = 27, z_C = g = 9$. Selbst $(9, 9, 27)$ kann nicht mit (a) gezeigt werden wegen $9 + 9 + 2 * 27 = 72 \leq 8 * 9$. Daher kann auch (b) keinen Erfolg bringen. Wenn $y_3 < 1$ mit Lemma 7 erzwungen worden war, folgt $y_1 < 1 + g - z_C = 1$ aus Beziehung (3.12) und deshalb $(9, 13, 27)$ gemäß (c), denn $2 * 9 + 13 + 27 = 58 > 6 * 9 + 4y_1$. Mit (d) ist sogar $(9, 10, 27)$ nachzuweisen, denn $2 * 9 + 10 + 3 * 27 = 109 \geq 12 * 9 + 1$. \triangleleft

3.5 Aufstellung ganzzahliger Zuschnittpläne

Wie im vorigen Abschnitt sei g die Anzahl der Teile des Typs k in der $(k, k + 1)$ -Instanz $(m; w; \mathbf{l}; \mathbf{e})$. In diesem Abschnitt werden alleine von z_C, g und k abhängige Abschätzungen für z_D hergeleitet. Aufgrund der Lemmas 5 und 6, S. 43 bzw. 44, ist es keine einschneidende Voraussetzung, wenn im gesamten Abschnitt gefordert wird:

$$m = (k + 1) * z_C, \quad z_C \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \ell_1 \geq \dots \geq \ell_m \quad (3.25)$$

Aussage 10: Für $(2, 3)$ -Instanzen mit $z_C = 2$ gilt stets: $(g = 4 \vee z_M = 2) \implies z_D = 2$.

Beweis: Wenn eine eigentliche, verschnittsfreie Variante gefunden wird, ist die Behauptung bewiesen, denn nach Abtrennung der Variante bleibt nur eine Restinstanz mit $0 < z'_M \leq 1$ übrig. Angenommen, es wäre $z_D = 3$. Wegen der (d)-Variante (3, 4, 5) folgte dann $\neg(1, 2, 6)$.

Ist $z_M = 2$, dann werden in der Relaxation (1.6) nur verschnittsfreie Varianten benutzt. Aufgrund der Annahme $z_D = 3$ sind diese durchweg uneigentlich. Wegen $\neg(1, 2, 6)$ könnte Teil 1 nur mit Varianten (1, i_1 , i_1) und (1, i_2 , i_2) mit $g < i_1 < i_2 \leq 6$ zugeschnitten werden, denn eine einzige uneigentliche Variante reicht nicht aus. Dann aber kann wegen $(\ell_1 + 2\ell_{i_1}) + (\ell_1 + 2\ell_{i_2}) = 2w = 2 * (\ell_1 + \ell_{i_1} + \ell_{i_2})$ eine eigentliche, verschnittsfreie Variante (1, i_1 , i_2) konstruiert werden, Widerspruch.

Ist $g = 4$, dann ist $y_1 = 2$ und $y_2 = y_3 = 0$, und es gibt die (a)-Varianten (1, 4, 6), (2, 3, 6) und (3, 4, 5). Aufgrund der Annahme $z_D = 3$ hieße das $\neg(2, 3, 5)$, $\neg(1, 4, 5)$ und $\neg(1, 2, 6)$. Wegen $\neg(1, 4, 5)$ und $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_6$ gäbe es für Teil 1 nur Varianten der Form (1, i , 6) und (1, 5, j). Letztere entfallen, weil sie keine (2, 1)-Varianten sind. Mit dem Zuschnitt des Teils 1 wird das Teil 6 in der Relaxation (1.6) vollständig verbraucht. Die einzige für Teil 2 verbleibende (2, 1)-Variante ist (2, 4, 5), so daß mit Teil 2 auch die Teile 4 und 5 komplett zugeschnitten wurden. Folglich wurden die Varianten (1, 4, 6) und (1, 3, 6) genau nullmal bzw. einmal in (1.6) zugeschnitten, d. h. $z_D = 2$. \square

Zwei Varianten \mathbf{a} und \mathbf{a}' sollen *unkorreliert* heißen, wenn sie eigentlich sind und kein Teil in beiden Varianten gleichzeitig geschnitten wird, d. h. $\mathbf{a}^T \mathbf{a}' = 0 \wedge \mathbf{a}, \mathbf{a}' \leq \mathbf{b}$. Aus der Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{e})$ werden $r \in \mathbb{N}$ paarweise unkorrelierte $(k + 1)$ -Teile-Varianten abgetrennt. In der Restinstanz E' sollen möglichst wenig Teile des Typs k verbleiben. Sind das höchstens $k * (k + 1)$, dann gilt MIRUP auch für E .

Begründung: Für E' geht die Abschätzung (2.12), S. 32, unter Benutzung der Bezeichnung (3.1), S. 38, in

$$z_D(E') \leq \left[\frac{|I'_k|}{k} + \frac{|I'_{k+1}|}{k+1} + 1 - \frac{1}{k * (k+1)} \right]$$

über. Ferner ist $z_D(E) \leq z_D(E') + r$ und $m = r * (k + 1) + |I'_k| + |I'_{k+1}|$. Gemäß Voraussetzung (3.25) ist $z_C(E) = m / (k + 1)$ und somit

$$\begin{aligned} z_D(E) - z_C(E) &\leq \frac{|I'_k|}{k} + \frac{|I'_{k+1}|}{k+1} + 1 - \frac{1}{k * (k+1)} - \frac{|I'_k|}{k+1} - \frac{|I'_{k+1}|}{k+1} \\ \Delta(E) &\leq \frac{|I'_k| - 1}{k * (k+1)} + 1 \quad \square \quad (3.26) \end{aligned}$$

Beispiel: Eine (2, 3)-Instanz mit $m = 27$ und $g = 16$ sei gegeben, die die Bedingungen (3.25) erfüllt. Fünf (a)-Varianten sind (7, 12, 27), (8, 13, 26), (9, 14, 25), (10, 15, 24) und (11, 16, 23). Da vom Typ 2 nur sechs Teile übrig bleiben, gilt MIRUP. (Für die verbliebenen sechs Typ-3-Teile, die sechs Typ-2-Teile und die fünf (a)-Varianten reichen 10 Einheiten des Ausgangsmaterials aus.) Dieses Schema ist auch für (d)-Varianten zu verallgemeinern. \triangleleft

Lemma 10: Über die $(k, k + 1)$ -Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{e})$ wird (3.25) vorausgesetzt. Sei t die Anzahl der Teile des Typs k , welche nicht gleichzeitig in paarweise unkorrelierten

$(k+1)$ -Teile-Varianten untergebracht werden können, einerlei welcher Plan für (1.3) aufgestellt wird. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{a) } t &\leq g - k * \min\{\lfloor \frac{g}{k} \rfloor, \lceil \frac{1 + g - (k-1) * z_C}{s} - 1 \rceil\} \text{ mit } s = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}; \\ \text{b) } t &\leq (k+1) * (z_C + 1 - \lceil (k+1) * (z_C + \frac{1}{2}) / (\frac{k * (k+3)}{2} - \sum_{i=3}^{k+1} \frac{k+1}{i}) \rceil), \text{ speziell} \\ &t \leq 3 * \lceil \frac{z_C - 1}{4} \rceil \text{ bei } k = 2. \end{aligned}$$

Beweis: a) Lemma 8, S. 51, wird mit einem $q \in \{1, \dots, k\}$ benutzt. Da y_{k+1-q} für $q < k$ schlecht abgeschätzt werden kann und Fallunterscheidungen erfordert, wird der hier angegebene allgemeinere Ansatz nur für $q = k$ ausgewertet. Eine „optimale“ Festlegung der Varianten mit Hilfe der Lemmas 8 und 9 wird nicht angestrebt.

Analog zum obigen Beispiel sind r_q unkorrelierte $(q, k+1-q)$ -Varianten $(p_1 - j, \dots, p_q - j, p_{q+1} + j, \dots, p_{k+1} + j)$ für $j = 0, \dots, r_q - 1$ mit $p_i = g - (q - i) * r_q$ für $i = 1, \dots, q$ und $p_i = m + 1 - (k + 2 - i) * r_q$ für $i = q + 1, \dots, k + 1$, falls $r_q > 0$ gilt und tatsächlich zulässige Varianten vorliegen. Damit die Bedingung von Lemma 8 a) erfüllt ist, sind folgende Bedingungen einzuhalten:

1. $p_1 - (r_q - 1) \geq 1$, also $r_q \leq g/q$;
2. $p_{q+1} \geq g + 1$, d. h. $(k - q + 1) * r_q \leq m - g$;
3. $y_{k+1-q} > g + m - (g - j) - (m - r_q + 1 + j) + \sum_{i=2}^q \frac{r_q}{q - i + 2} + \sum_{i=q+2}^{k+1} \frac{r_q}{k - i + 3}$,
- d. h. $y_{k+1-q} > r_q * \sigma - 1$ mit $\sigma = \sum_{i=1}^q \frac{1}{i} + \sum_{i=2}^{k-q+1} \frac{1}{i}$.

Wird $q = k$ und $r_k := \min\{\lfloor g/k \rfloor, \lceil (1 + y_1)/\sigma - 1 \rceil\}$ gewählt, dann wird $\sigma = s$, und Bedingung 3 ist erfüllt. $g \geq z_C$ darf gemäß Lemma 7 vorausgesetzt werden, andernfalls wäre die Instanz entsprechend reduzierbar. $m - g \geq z_C \geq g/k$ ist wegen $g \leq k * z_C$ und $m = (k+1) * z_C$ wahr. Wegen $y_1 \leq z_C$ und $z_C \in \mathbb{N}$ folgt $r_k \leq z_C$, so daß Bedingung 2 auch erfüllt ist. Bedingung 1 ist automatisch aufgrund der Festlegung von r_k erfüllt. Wegen $y_1 \geq g - (k-1) * z_C$ gemäß Lemma 8 b) ist Teil a) bewiesen.

b) Gemäß Lemma 9 sind $(m - kr - j, m - (k-1)r - j, \dots, m - r - j, m + 1 + j - r)$ für $j = 0, \dots, r - 1$ paarweise unkorrelierte Varianten, wenn $r > 0$ ist und (3.22) gilt, d. h.

$$\begin{aligned} 0 &< p_1 - km + \sum_{i=1}^k \frac{k+1}{i * (i+1)} * p_{k+2-i} \\ &= m - kr - j - km + \frac{k+1}{2} * (m + 1 + j - r) + \\ &\quad + \sum_{i=2}^k \frac{k+1}{i * (i+1)} * (m - j - (k+1-i) * r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m - kr - j - km + \frac{k+1}{2} * (m+1 + j - r - m + j + (k+1) * r) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \frac{k+1}{i * (i+1)} * (m - j - (k+1) * r) + r * \sum_{i=2}^k \frac{k+1}{i+1} \\
&= m - kr - j - km + \frac{k+1}{2} * (1 + 2j + kr) + k * (m - j - (k+1) * r) + \\
&\quad + r * \sum_{i=3}^{k+1} \frac{k+1}{i} \quad (\text{wegen (3.24)}) \\
&= \left(\sum_{i=3}^{k+1} \frac{k+1}{i} - \frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}k \right) * r + \frac{k+1}{2} + m.
\end{aligned}$$

Da der Koeffizient vor r negativ ist, folgt mit (3.25)

$$r < (k+1) * (z_C + \frac{1}{2}) / \left(\frac{k * (k+3)}{2} - \sum_{i=3}^{k+1} \frac{k+1}{i} \right). \quad (3.27)$$

Diese Ungleichung ist erfüllt, wenn $r := \left\lceil (k+1) * (z_C + \frac{1}{2}) / \left(\frac{k * (k+3)}{2} - \sum_{i=3}^{k+1} \frac{k+1}{i} \right) \right\rceil - 1$ gesetzt wird. Mit den r paarweise unkorrelierten $(k+1)$ -Teile-Varianten wurden zwar nur die $r * (k+1)$ kleinsten Teile geschnitten, aber da nur $m - r * (k+1) = (k+1) * (z_C - r)$ verblieben sind, gilt die Behauptung.

Zum Fall $k = 2$: Die Bedingung (3.27) bedeutet $r < \frac{3}{4}z_C + \frac{3}{8}$. Wegen $z_C \in \mathbb{N}$ wird (3.27) mit $r := \lfloor \frac{3}{4}z_C + \frac{1}{4} \rfloor$ erfüllt. Damit wird $t \leq 3 * (z_C - r) \leq 3 * \lceil z_C/4 - 1/4 \rceil$. \square

Bemerkung 7: 1. Lemma 8 wurde nur mit $q = k$ benutzt. Eine Einbeziehung des Falles $q = k - 1$ wäre auch noch möglich; bei noch mehr unterschiedlichen Varianten wäre aber die Unkorreliertheit nur noch schwer zu gewährleisten.

2. Aufgrund der Abschätzung (3.26) gilt für das Gap stets $\Delta \leq 1 + \frac{t-1}{k^2+k}$.

3. Die in [27] gegebene Abschätzung $t \leq \lfloor (8z_C + 5)/9 \rfloor$ bei $k = 2$ ist nur für $z_C \in \{2; 6\}$ besser als $t \leq 3 * \lceil (z_C - 1)/4 \rceil$, aber für alle $z_C \notin \{0, 2, 3, 6, 7, 10\}$ schlechter. (Der Fall $z_C \leq 1$ ist trivial.)

4. In [27] stand Lemma 9 noch nicht zur Verfügung. Mit den Lemmas 8 und 10 a) konnte bei (2, 3)-Instanzen MIRUP nur für $z_C < 9$ bewiesen werden, indem geeignete (a)- und (c)-Varianten kombiniert wurden. Bei $z_C = 9$, $g = 15$ und $y_1 = 6$ gelang der Nachweis jedoch nicht mehr.

SATZ 2: Jede (2, 3)-Instanz mit $z_C < 11$ hat MIRUP.

Beweis: Aufgrund der Folgerungen aus den Lemmas 5 und 6 braucht MIRUP nur für $z_C \in \mathbb{N} \cap [0, 11)$ gezeigt werden. Wenn so viele paarweise unkorrelierte 3-Teile-Varianten geschnitten werden konnten, daß in der Restinstanz höchstens sechs Teile vom Typ 2 sind, dann folgt MIRUP. Wegen Lemma 10 b) ist das bei $z_C \leq 9$ der Fall.

Nun sei $z_C = 10$, $m = 30$. In Abhängigkeit von der Anzahl g der Typ-2-Teile werden (a)- bzw. (d)-Varianten aufgestellt. Folgende (d)-Varianten gibt es stets: (7, 17, 30),

(8, 18, 29), (9, 19, 28), (10, 20, 27), (11, 21, 26), (12, 22, 25) und (13, 23, 24). Damit bleiben nur die Teile 1–6 und 14–16 übrig, so daß für $g < 14$ bereits alles bewiesen ist. Andernfalls werden einige der Varianten durch (a)-Varianten ersetzt: bei $g \geq 14$ die erste Variante durch (7, 14, 30); bei $g \geq 15$ zusätzlich die Variante (8, 18, 29) durch (8, 15, 29); bei $g \geq 16$ zusätzlich die Variante (9, 19, 28) durch (9, 16, 28) usw., so daß bei $g = 20$ die (a)-Varianten (7, 14, 30), (8, 15, 29), (9, 16, 28), (10, 17, 27), (11, 18, 26), (12, 19, 25) und (13, 20, 24) zu schneiden sind. Die Teile 21–23 sind vom Typ 3. Somit konnte stets dafür gesorgt werden, daß nur die Teile 1–6 übrig blieben. \square

Bemerkung 8: Mit den Lemmas 8 bis 10 ist es nicht möglich, MIRUP für alle (2, 3)-Instanzen zu zeigen, wenn $z_C \geq 11$ ist. Sei etwa $z_C = 11$, $g = 22$, $m = 33$. Dann kann keine (c)-Variante nachgewiesen werden. Jede (d)-Variante (p_1, p_2, p_3) mit $p_2 \leq g$ ist auch (a)-Variante. Wegen $g = 2z_C$ ist $y_1 = g - z_C$ und $y_2 = 0$, so daß die (a)-Varianten-Bedingung $p_1 + p_2 + 2p_3 > 2g + 6z_C - 2y_1 = 8z_C$ nur mit $p_1 + p_2 + 2p_3 \geq 8z_C + 1$ zu erfüllen ist. Selbst wenn jede (d)-Variante auch ohne die Forderung $p_2 \leq g$ schon (a)-Variante wäre, ergäbe sich für die benötigten $z_C - 2$ Varianten die Bilanz

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2z_C+3}^{3z_C} 2i + \sum_{i=7}^{2z_C+2} i - (z_C - 2) * (8z_C + 1) \\ &= 3z_C * (3z_C + 1) - (2z_C + 3) * (z_C + 1) - 21 - 8z_C^2 + 15z_C + 2 \\ &= (z_C - 2) * (11 - z_C) = 0 \end{aligned}$$

wegen $z_C = 11$. Bei $z_C > 11$ wären folglich offensichtlich nicht ausreichend viele unkorrelierte 3-Teile-Varianten gegeben. Bei $z_C = 11$ müßte aufgrund der Bilanz, die keine Spielräume zuläßt, jede (d)-Variante, die keine (a)-Variante ist, $2p_1 + p_2 + 3p_3 = 133$ und $p_2 = p_1 + 1$ erfüllen. Das ist nicht möglich, da selbst für die (d)-Variante (22, 23, 24) sich $2 * 22 + 23 + 3 * 24 = 139 > 133$ ergibt. Auch (b)-Varianten entfallen, weil sie einiges „verschenken“. Dennoch ist bisher kein Gegenbeispiel zur MIRUP-Hypothese im 1CSP bekannt, nicht einmal die Existenz eines Gegenbeispiels. \square

3.6 Folgerungen für das allgemeine eindimensionale Zuschnittproblem

In [21] wurde bewiesen, daß für jede Instanz $(m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ mit $m \leq 6$ MIRUP gilt. Da Satz 2 in [21] noch nicht zur Verfügung stand, konnte der unten folgende Satz, der eine Verallgemeinerung der Aussage „ $m \leq 6 \implies \Delta < 2$ “ darstellt, in [21] noch nicht bewiesen werden, jedoch enthielt [21] eine gute Vorlage für den Beweis des nachfolgenden Satzes sowie des vorbereitenden Lemmas.

Lemma 11: Für die Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ des 1CSPs werden die Ungleichungskette (2.1), S. 22, und $2\ell_1 > w$ sowie $\ell_1 + 2\ell_m > w$ vorausgesetzt. Gilt $\ell_1 + \ell_m > w$, dann seien $t := 0$ und $\bar{\mathbf{a}} := \mathbf{e}^1$, andernfalls $t := \min\{i \in I : \ell_1 + \ell_i \leq w\}$ und $\bar{\mathbf{a}} := \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^t$. Sei $\bar{E} := (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b} - \bar{\mathbf{a}})$, wobei $b_1 = 0$ und $b_t = 0$ (bei $t > 0$) erlaubt sind. Dann gilt $z_C(\bar{E}) = z_C(E) - 1$ und $z_D(\bar{E}) = z_D(E) - 1$, d. h. beim einmaligen Zuschneiden der Variante $\bar{\mathbf{a}}$ ändert sich das Gap nicht.

Beweis: Die Nummer der Variante $\bar{\mathbf{a}}$ in J sei o. B. d. A. 1. Ist $t = 0$, dann ist \mathbf{e}^1 die

einzig zulässige Variante, mit der Teil 1 geschnitten werden kann. Dann gilt $x_1 = b_1$ für E sowohl in (1.3) als auch in (1.6), woraus die Behauptung folgt. Es ist nur noch der Fall $t > 0$ zu klären. Das Teil t ist das größte mit Teil 1 kombinierbare Teil. In Optimallösungen von (1.3) und auch von (1.6) für E kann dann immer $x_1 = \min\{b_1, b_t\}$ erzwungen werden, wie im folgenden gezeigt wird. x_1 kann nicht größer sein, weil Überproduktion folgte. Falls x_1 kleiner ist, dann wurde Teil 1 alleine zugeschnitten oder nur mit einem kleineren Teil $s > t$ kombiniert. Im ersten Fall ist x_1 zu erhöhen, während Teil t entsprechend oft aus anderen Varianten zu entfernen ist. Im anderen Fall führt die Erhöhung von x_1 dazu, daß in anderen Varianten, die das Teil t enthalten, entsprechend oft Teil t durch obiges Teil s zu ersetzen ist. In beiden Fällen kann der Zielfunktionswert nicht zunehmen. Daraus folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 9: Die Voraussetzung $\ell_1 + 2\ell_m > w$ kann nicht zu $\ell_1 + 2\ell_m \geq w$ abgeschwächt werden, wie die Instanz $E = (4; 18; (10, 9, 6, 4)^T; (1, 1, 2, 1)^T)$ mit $\Delta(E) = 1$ zeigt. Ebenso kann wegen Instanzen wie $(2; 6; (3, 2)^T; (1, 4)^T)$ nicht auf die Bedingung verzichtet werden, daß Teil 1 vom Typ 1 ist.

SATZ 3: Für jede Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ des 1CSPs gilt

$$\Delta < \max\left\{2, \frac{z_M + 2}{3}\right\} \quad \text{und deshalb} \quad \Delta < \max\left\{2, \frac{m + 2}{4}\right\}. \quad (3.28)$$

Gilt $z_M \in [0, 4,75] \cup (5, 5,5] \cup (6, 6,25]$, dann hat E MIRUP, und bei $z_M \leq 1,75$ hat E IRUP.

Beweis: Werden aus E alle Teile i mit Längen $\ell_i \leq w/4$ entfernt, dann entsteht eine Instanz E' , in der nur Teile der Typen 1 bis 3 vorkommen können. Kein Typ-1-Teil ist mit zwei Typ-3-Teilen in einer Variante kombinierbar. Solange in E' Teile vom Typ 1 vorkommen, kann folglich eine Reduktion gemäß Lemma 11 vorgenommen werden. Es entsteht eine (2,3)-Instanz E'' mit $\Delta(E') = \Delta(E'')$. Diese kann gemäß Lemmas 5–7 zu einer Instanz E''' mit $z_C(E''') \in \mathbb{N}$ und $m''' = 3 * z_C(E''')$ reduziert werden, so daß Lemma 10 b) angewendet werden kann. In Verbindung mit Bemerkung 7.2 ergibt sich

$$\Delta(E''') \leq (3 * \lceil \frac{z_C(E''') - 1}{4} \rceil + 5) / 6 \leq \frac{3z_C(E''') + 26}{24} \quad \text{und} \quad \Delta(E'') < 1 + \Delta(E'''). \quad (3.29)$$

Nun müssen noch die zu E , aber nicht zu E' , gehörenden Teile ergänzt werden.

1. Fall: $z_D(E) > z_D(E')$, d. h. wenigstens ein Teil einer Länge bis $w/4$ paßte nicht in die $z_D(E')$ zuvor festgelegten Varianten. Dann besitzen alle Varianten mit Ausnahme höchstens einer einen Materialausnutzungsgrad über 75%. Wenn $z \in \mathbb{N}$ solche Varianten gefertigt wurden, bleibt weniger als $\mathbf{l}^T \mathbf{b} - 0,75w * z$ zu packen. Wenn dies höchstens w ist, dann reicht eine einzige weitere Variante aus, d. h. wenn $z_M(E) - 0,75z \leq 1$ ist, dann ist $z_D(E) \leq z + 1$. Mit $z := \lceil (z_M(E) - 1) / 0,75 \rceil$ ergibt das

$$z_D(E) \leq \lceil \frac{4 * z_M(E) - 1}{3} \rceil < z_M(E) + \frac{z_M(E) + 2}{3}, \quad (3.30)$$

und mit $\Delta = z_D - z_C$ und $z_M \leq z_C$ folgt die erste Behauptung. Bei $1 < z_M(E) \leq 1,75$ ist $z_D(E) < (4 * 1,75 + 2) / 3 = 3$, d. h. IRUP. Ist $z_M(E) \in [0, 4,75] \cup (5, 5,5] \cup (6, 6,25]$, dann ergibt (3.30) in jedem Fall die passende Schranke, z. B. für $6 < z_M(E) \leq 6,25$ die

Abschätzung $z_D(E) < (4*6,25+2)/3 = 9$, also $z_D(E) \leq 8$. Wegen $z_C(E) \geq z_M(E) > 6$ heißt das MIRUP.

2. Fall: Es wurden keine weiteren Varianten benötigt, d. h. $z_D(E) = z_D(E')$ und $\Delta(E) \leq \Delta(E') = \Delta(E'') < 1 + \Delta(E''')$ mit $\Delta(E''') \in \mathbb{N}$. In E''' gibt es nur Teile der Typen 2 und 3. Aufgrund der Reduktion gemäß Lemma 7 ist die Anzahl g''' der Typ-2-Teile in E''' mindestens $z_C(E''')$, und jede in einer Optimallösung der Relaxation (1.6) in positiver Häufigkeit gepackte Variante enthält genau drei Teile. Das ergibt

$$z_M(E''') > \frac{g'''}{3} + \frac{3z_C(E''') - g'''}{4} = \frac{3z_C(E''')}{4} + \frac{g'''}{12} \geq \frac{5}{6}z_C(E''') \quad (3.31)$$

Bei $\Delta(E''') \leq 1$ ist die Behauptung bewiesen. Sei $\Delta(E''') \geq 2$. Wegen Satz 2 ist dann $z_C(E''') \geq 11$ und $z_M(E''') > 9$ wegen der Ungleichung (3.31). Das heißt, für $z_M(E) \in [0, 4,75] \cup (5, 5,5] \cup (6, 6,25]$ kann dieser Fall nicht eintreten, und die angegebene MIRUP-Behauptung trifft zu.

Die Behauptung $\Delta(E) < \max\{2, \frac{z_M+2}{3}\}$ braucht wegen $\Delta(E) < 1 + \Delta(E''')$ nur für den Fall $\Delta(E''') \geq 2$ bewiesen werden. Dann aber ist $z_C(E''') \geq 11$, und wegen der Ungleichungen (3.29) und (3.31) ergibt der Vergleich

$$\begin{aligned} \Delta(E''') - \frac{z_M(E''') + 2}{3} &\leq \frac{3z_C(E''') + 26 - 8z_M(E''') - 16}{24} \\ &< \frac{9z_C(E''') + 30 - 20z_C(E''')}{72} \leq -\frac{91}{72}, \end{aligned}$$

so daß wegen $\Delta(E) < 1 + \Delta(E''')$ die in der Behauptung (3.28) angegebene Schranke sogar noch schwächer ist.

Die Fallunterscheidung wird mit den Betrachtungen zur Situation $z_M(E) \leq 1,75$ abgeschlossen. Wegen $\Delta(E) < 1 + \Delta(E''')$ muß nur gezeigt werden, daß $\Delta(E''') = 0$ gilt. Bei $z_M(E''') \leq 1$ ist das wegen $z_C(E''') \in \mathbb{N}$ der Fall. Sei $1 < z_M(E''') \leq 1,75$. Wegen der Ungleichung (3.31) ist dann $1 < z_C(E''') < 2,1$, also $z_C(E''') = 2$. Angenommen, es gäbe eine unzulässige 3-Teile-Variante \mathbf{a} , d. h. $\mathbf{e}^T \mathbf{a} = 3 \wedge \mathbf{1}^T \mathbf{a} > w$. Zusammen mit den drei anderen Teilen ergäbe das mehr Material als $w + 3 * (w/4)$, Widerspruch zu $z_M(E''') \leq 1,75$. Damit sind in E''' alle 3-Teile-Varianten zulässig, und es folgt $\Delta(E''') = 0$, also IRUP für E .

Zu zeigen ist nur noch der zweite Teil der Behauptung (3.28); der erste Teil gilt für jede Instanz des 1CSPs, also insbesondere auch für residuale Instanzen. Sei $E^{(r)}$ eine residuale Instanz zu E . Dann ist $\Delta(E^{(r)}) < 2$ oder

$$z_D(E^{(r)}) < z_C(E^{(r)}) + \frac{z_M(E^{(r)}) + 2}{3} \leq \frac{4z_C(E^{(r)}) + 2}{3}.$$

Nun kann Lemma 1, S. 19, mit $p := 4/3$ und $q := 2/3$ angewendet werden. Das ergibt zunächst $\Delta(E^{(r)}) < 2$ oder $\Delta(E^{(r)}) < (m + 2)/4$. Aus $\Delta(E) \leq \Delta(E^{(r)})$ folgt die Behauptung. \square

Folgerung: Bei $z_C \in [0, 4,75] \cup (5, 5,5] \cup (6, 6,25]$ gilt MIRUP.

Beweis: Die Intervalle sind passend gewählt, z. B. ist $z_D \leq 8$ erlaubt, falls $6 < z_C \leq 6,25$. Wegen $z_C \geq z_M$ ergibt Satz 3 die Abschätzung $z_D < \max\{8,25, (4*6,25+2)/3\} = 9$, also $z_D \leq 8$. Die Behauptung kann für die kleineren z_C analog gezeigt werden. \square

Kapitel 4

Nicht-IRUP-Instanzen

In [30] wird das MAXGAP-Problem formuliert: Man finde Instanzen des 1CSPs mit möglichst großem Gap. Das ist das Thema dieses Kapitels.

4.1 Der Teilbarkeitsfall

1990 fand FIELDHOUSE [8] die Instanz $E_F = (3; 30; (15, 10, 6)^T; (1, 2, 4)^T)$, die wie die von SCHEITHAUER/TERNO [28] angegebene $E_{ST} = (3; 132; (44, 33, 12)^T; (2, 3, 6)^T)$ zu einer von NICA [19] untersuchten Familie von Nicht-IRUP-Instanzen im Teilbarkeitsfall gehört. Da NICA sein allgemeines Gegenbeispiel zur IRUP-Hypothese nicht veröffentlicht hatte, wurde sein Satz (Aussage 11) einschließlich Beweis nochmals in [26] angegeben. Da es sich um den Teilbarkeitsfall handelt, sind bei Vorgabe von $w > 0$ alle Teilleängen ℓ_i , $i \in I$ mit den Typen k_i der betreffenden Teile festgelegt, nämlich $\ell_i = w/k_i \forall i \in I$.

Aussage 11: Seien k_1, k_2, \dots, k_{m-1} paarweise teilerfremde ganze Zahlen mit $1 < k_1 < \dots < k_{m-1}$, $m \geq 3$ und $k_m := \prod_{i=1}^{m-1} k_i - 1$. Für alle $i \in I \setminus \{m\}$ sei $b_i = k_i - 1$, und es gebe keine Lösung der ganzzahligen Aufgabe (1.3), in der diese Teile (mit den Bedarfswerten b_i) in höchstens $m - 2$ Varianten untergebracht werden. Ferner sei $b_m := \lfloor k_m * \sum_{i=1}^{m-1} (1/k_i) \rfloor$. Die so festgelegte Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ hat dann ein Gap

$$\Delta = 1 + \frac{1}{k_m} * \left(\left\lceil \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{k_i} \right\rceil - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{k_i} \right) > 1.$$

Aufgrund der Festlegung von k_m geht dieses Gap von weniger als $1 + 1/k_m$ für wachsende k_i sehr schnell gegen 1. Außerdem erfordert die Voraussetzung die Prüfung, daß die Teile 1 bis $m - 1$ tatsächlich nicht in $m - 2$ Varianten gepackt werden können. Im folgenden werden zwei andere Familien von Nicht-IRUP Instanzen im Teilbarkeitsfall angegeben.

Aussage 12: Sei $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Sei w das kleinste gemeinsame Vielfache von

$3p, 3p + 1, 9p + 2$ (oder ein Mehrfaches davon). Dann besitzt die Instanz

$$E := (3; w; (\frac{w}{3p}, \frac{w}{3p+1}, \frac{w}{9p+2})^T; (3p-1, 3p, 6)^T)$$

ein Gap $\Delta > 1$, vgl. [26].

Beweis: Für $p = 1$ ergibt sich mit E_{ST} eine schon bekannte Instanz mit Gap $137/132$. Sei also $p \geq 2$. Zur Abkürzung wird $q := 3p$ und $Q := q * (q + 1) * (3q + 2)$ gesetzt. Angenommen, es gäbe eine eigentliche Variante \mathbf{a} mit

$$1 - \frac{q+2}{Q} \leq \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q+1} + \frac{a_3}{3q+2} \leq 1. \quad (4.1)$$

Dies wäre genau dann der Fall, wenn $\Delta(E) < 1$ wäre, denn

$$z_C = \frac{q-1}{q} + \frac{q}{q+1} + \frac{6}{3q+2} = 2 - \frac{q+2}{Q},$$

und nach Abspaltung von \mathbf{a} bliebe nur Material übrig, das in eine einzige Variante, nämlich $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, gepackt werden könnte. Da es sich um den Teilbarkeitsfall handelt, wäre $\sum_{i \in I} \frac{a_i}{k_i} \leq 1$, also $(q+1)a_1 + qa_2 \leq q^2 + q - \frac{q^2+q}{3q+2}a_3$. Wegen

$$\frac{q}{3} + \frac{1}{9} > \frac{q^2+q}{3q+2} = \frac{q}{3} + \frac{1}{9} - \frac{2}{9(3q+2)} > \frac{q}{3} \quad (4.2)$$

gälte

$$(q+1)a_1 + qa_2 < q^2 + q - \frac{q}{3}a_3. \quad (4.3)$$

Aus dem jeweils linken Teil der Ungleichungsketten (4.1) und (4.2) folgt

$$(q+1)a_1 + qa_2 \geq q^2 + q - \frac{q^2+q}{3q+2}a_3 - \frac{q+2}{3q+2} > q^2 + q - (\frac{q}{3} + \frac{1}{9})a_3 - \frac{q+2}{3q+2},$$

und wegen $\frac{q+2}{3q+2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{3(3q+2)}$ erfüllte \mathbf{a} auch die Ungleichung

$$(q+1)a_1 + qa_2 > q^2 + q - (\frac{q}{3} + \frac{1}{9})a_3 - \frac{1}{3} - \frac{4}{3(3q+2)}.$$

Zusammen mit der Ungleichung (4.3) bedeutet das, daß wenn IRUP für E zuträfe, eine eigentliche Variante \mathbf{a} mit

$$(q+1)a_1 + qa_2 - q^2 - q \in \left(-(\frac{q}{3} + \frac{1}{9})a_3 - \frac{1}{3} - \frac{4}{3(3q+2)}, -\frac{q}{3}a_3 \right)$$

existierte. Die linke Seite ist ganzzahlig. Das offene Intervall auf der rechten Seite kann wegen $q = 3p$ in der Form

$$\left(-pa_3 - \frac{a_3}{9} - \frac{1}{3} - \frac{4}{3(9p+2)}, -pa_3 \right)$$

geschrieben werden. Bei $p \geq 2$ und $a_3 \leq 5$ besitzt das Intervall eine Länge von höchstens $\frac{5}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} < 1$, so daß es keine ganze Zahl enthält. Folglich gibt es keine eigentliche Variante \mathbf{a} mit $a_3 \leq 5$, die das Ungleichungssystem (4.1) erfüllt. Auch $a_3 = 6$ kann keine derartige Variante ergeben, denn sonst wäre das System (4.1) auch von $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ erfüllt worden. \square

Die Bedingung $3|q$ ist wesentlich, denn

- bei $p \in \mathbb{N}$ und $q = 3p + 1$ wäre $\mathbf{a} = (p, 2p + 1, 2)^T$
- bei $p \in \mathbb{N}$ und $q = 3p + 2$ wäre $\mathbf{a} = (2p + 1, p + 1, 1)^T$

eine eigentliche Variante, die die Ungleichungskette (4.1) erfüllt.

Aussage 12 zeigt unzweifelhaft die Existenz unendlich vieler paarweise nichtäquivalenter Nicht-IRUP-Instanzen im Teilbarkeitsfall des 1CSPs, wobei alle vorkommenden Teile beliebig klein im Vergleich zum Ausgangsmaterial sein können. Die folgende Familie zeichnet sich dadurch aus, daß die beteiligten Teiletypen besonders nah beieinander sind.

Aussage 13: Sei $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Sei $w := (6p + 2) * (6p + 3) * (6p + 5)$. Dann gilt $\Delta > 1$ für die Instanz

$$(3; w; (\frac{w}{6p+2}, \frac{w}{6p+3}, \frac{w}{6p+5})^T; (6p+1, 3p+3, 3p+2)^T).$$

Beweis: Es gilt $z_C = z_M = 2 - 3/w$. Angenommen, es wäre $z_D = 2$. Dann müßte es eine eigentliche Variante \mathbf{a} mit Verschnitt 0 oder 1 geben. Da die Teiletypen $6p + 2$, $6p + 3$ und $6p + 5$ paarweise teilerfremd sind, wäre Verschnitt 0 nur mit elementaren Varianten möglich, aber die Bedarfszahlen b_i sind dafür zu klein, so daß $\mathbf{I}^T \mathbf{a} = w$ ausscheidet. Aber auch $\mathbf{I}^T \mathbf{a} = w - 1$ ist unmöglich, denn Rechnung mit Kongruenzen modulo $6p + 5$ ergäbe

$$\begin{aligned} w - 1 &= (6p + 3)(6p + 5)a_1 + (6p + 2)(6p + 5)a_2 + (6p + 2)(6p + 3)a_3 \\ -1 &\equiv (-2) * 0 * a_1 + (-3) * 0 * a_2 + (-3) * (-2) * a_3 \pmod{6p + 5} \\ -6p - 6 &\equiv 6a_3 \pmod{6p + 5} \quad | : 6 \quad (\text{möglich, da } \text{ggT}(6, 6p + 5) = 1) \\ a_3 &\equiv -p - 1 \pmod{6p + 5} \end{aligned}$$

Wegen $a_3 \in \mathbb{N}$ ist die kleinste diese Kongruenz erfüllende Zahl $5p + 4$, doch wegen $b_3 = 3p + 2 < 5p + 4$ ergibt das keine eigentliche Variante. \square

C. NITSCHKE untersuchte systematisch Instanzen des Teilbarkeitsfalles mit Rechnerhilfe [20] und fand dabei auch Instanzen wie $(3; 154; (77, 22, 14)^T; (1, 4, 10)^T)$ und $(3; 520; (104, 65, 40)^T; (4, 7, 4)^T)$, die zu keiner der oben genannten Familien gehören und ein Gap $\Delta > 1$ haben. Manche solche Instanz kann durch Zusammenfassung mehrerer Teile in einer Nicht-IRUP-Instanz zu einem größeren Teil erhalten werden, solange der Teilbarkeitsfall weiterhin gilt. Entgegengesetzt dazu ist die Aufspaltung einiger Teile in kleinere, ohne das Gap zu ändern. Andere Nicht-IRUP-Instanzen mit mehr Teiletypen können durch Verkürzung einzelner Teile erhalten werden, wobei das Gap zunimmt, z. B. besitzt die Instanz $(4; 840; (280, 168, 120, 105)^T; (1, 4, 5, 1)^T)$ gegenüber der Nicht-IRUP-Instanz $(3; 840; (280, 168, 120)^T; (1, 4, 6)^T)$ ein deutlich größeres Gap. Dieses Beispiel ist [20] entnommen.

4.2 $(k, k + 1)$ -Instanzen

In Kapitel 3 wurden die $(k, k + 1)$ -Instanzen vorgestellt und auf MIRUP untersucht. In diesem Abschnitt werden $(k, k + 1)$ -Instanzen mit Gap $\Delta = 1$ aufgestellt. Diese können als Baustein für weitere Konstruktionen dienen.

4.2.1 Instanzen mit $z_C = z_M = 3$

Aussage 14: Für $t \in \mathcal{Q} \setminus \{-12, -11, -9\}$, $t > -13$ hat die Instanz

$$E(t) := (7; 51 + 3t; (23 + t, 19 + t, 17 + t, 16 + t, 15 + t, 14 + t, 13 + t)^T; (1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)^T) \quad (4.4)$$

ein Gap $\Delta = 1$, und für $t > -1$ ergeben sich durchweg äquivalente $(2, 3)$ -Instanzen, vgl. [26]. (Bei $t \in \{-12, -11, -9\}$ gäbe es verschnittfreie 2-Teile-Varianten, die auf IRUP führten.)

Beweis: Zuerst wird die behauptete Äquivalenz gezeigt. Bei $t > -1$ ist $51 + 3t - 2 * (23 + t) = 5 + t > 4$ und $51 + 3t - 4 * (13 + t) = -1 - t < 0$, so daß tatsächlich eine $(2, 3)$ -Instanz vorliegt. Daher müssen nur noch die 3-Teile-Varianten untersucht werden; bei anderen Varianten ist die (Un-)Zulässigkeit klar. Wenn drei Teile zusammen zulässig sind, ändert sich am Verschnitt nichts, wenn t variiert. Damit bleibt auch die (Un-)Zulässigkeit der Variante unverändert.

Bei $t \leq -1$ liegt keine $(2, 3)$ -Instanz mehr vor, so daß auch die Äquivalenz hinfällig wird. Im folgenden wird noch $\Delta = 1 \forall t \in \mathcal{Q} \setminus \{-12, -11, -9\}$, $t > -13$ nachgewiesen. Wegen $z_M = 3$ gilt $z_C \geq 3$. Da die nachstehenden Varianten zulässig sind und

$$\frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt, folgt $z_C = 3$. Wäre $z_D = 3$, dann dürfte in den für (1.3) verwendeten Varianten Verschnitt nicht auftreten. Folglich entfallen alle Varianten mit weniger als zwei Teilen. Wegen $t \notin \{-12, -11, -9\}$ gibt es auch keine eigentliche verschnittfreie 2-Teile-Variante. Varianten mit vier oder mehr Teilen entfallen ebenfalls, weil wegen $\mathbf{e}^T \mathbf{b} = 9$ Varianten mit höchstens zwei Teilen doch verwendet werden müßten.

Die einzige eigentliche verschnittfreie Variante \mathbf{a} mit $a_1 = 1$ und $\mathbf{e}^T \mathbf{a} = 3$ ist $\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^5 + \mathbf{e}^7$. Dann aber kann Teil 2 nicht mehr verschnittfrei gepackt werden, da Teil 5 schon benutzt wurde. \square

Aussage 15: Seien $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $t \geq \max\{3k^3 - k^2 - 3k, 3k^2 + 3k + 1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} &(9; (k + 1)(t + 3k); \\ &(t + 3k^2 + 2k, t + 2k^2 + k, t + 6k, t + 1, t + k + 2, t + 3k - 3, t, t + k, t + 3k)^T; \\ &(1, 1, 1, k - 1, k - 1, k - 1, 1, 1, 1)^T) \end{aligned}$$

eine $(k, k + 1)$ -Instanz mit $z_M = z_C = 3$ und $z_D = 4$. (Um die innewohnende zyklische Struktur zu verdeutlichen, wurden die Teile *nicht* nach der Größe sortiert, vgl. [26].)

Beweis: Es gilt $z_M = z_C = 3$ wegen $\frac{1}{k} \times (\mathbf{e}^1 + (k-1)\mathbf{e}^7 + \mathbf{e}^8) + \frac{1}{k} \times (\mathbf{e}^2 + (k-1)\mathbf{e}^8 + \mathbf{e}^9) + \frac{1}{k} \times (\mathbf{e}^3 + (k-1)\mathbf{e}^9 + \mathbf{e}^7) + \frac{k-1}{k} \times (\mathbf{e}^1 + k\mathbf{e}^4) + \frac{k-1}{k} \times (\mathbf{e}^2 + k\mathbf{e}^5) + \frac{k-1}{k} \times (\mathbf{e}^3 + k\mathbf{e}^6) = \mathbf{b}$, denn alle diese Varianten sind zulässig und verschnittfrei.

Wegen $k \geq 2$ ist Teil 7 das kürzeste und Teil 1 das längste. Wegen $w - k\ell_1 = t - 3k^3 + k^2 + 3k \geq 0$ und $w - (k+2)\ell_7 = 3k^2 + 3k - t \leq -1$ liegt tatsächlich eine $(k, k + 1)$ -Instanz vor, und jede verschnittfreie Variante enthält genau $k + 1$ Teile. Um $z_D > 3$ zu zeigen, werden eigentliche Varianten \mathbf{a} mit $a_1 = 1$ betrachtet. Ist $k = 2$, dann ist $\mathbf{a} = \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^7 + \mathbf{e}^8$ die einzige derartige, verschnittfreie Variante. Dann aber können die Teile 2 und 3 nicht mehr verschnittfrei gefertigt werden, was $z_D > 3$ ergibt. Ist $k > 2$, dann gibt es wegen $\ell_7 < \ell_4 < \ell_8 < \ell_i < \ell_1 \forall i \in \{2, 3, 5, 6, 9\}$ und $\ell_1 + k\ell_4 = \ell_1 + (k-1)\ell_7 + \ell_8 = w$, aber $b_4 < k$ und $b_7 < k - 1$ keine eigentliche verschnittfreie Variante, die Teil 1 enthält, d. h. $z_D > 3$. \square

Den Instanzen aus Aussage 15 wohnt eine zyklische Struktur mit der Zykluslänge 3 inne. Entsprechende Instanzen mit $z_D > z_C = z_M > 3$ und $z_C \in \mathbb{N}$ können mit größeren Zykluslängen leicht aufgestellt werden, siehe auch Abschnitt 5.2. Alternativ sind mehrere Zyklen zu kombinieren, solange verhindert wird, daß unerwünschte verschnittfreie Varianten hinzukommen.

Die Häufigkeiten x_j in der Optimallösung der stetigen Relaxation (1.6) können in den zyklisch aufgebauten Nicht-IRUP-Instanzen auch $1/3$ und $2/3$ statt $1/2$ sein, z. B. in der Instanz $E = (24; 1347; (616, 608, 593, 561, 547, 519, 505, 498, 488, 484, 461, 448, 414, 400, 394, 393, 388, 379, 375, 351, 340, 339, 338, 337)^T; \mathbf{e})$ mit $z_C = 8$ und $z_D = 9$.

4.2.2 Komplementäre Varianten — komplementäre Instanzen

Zunächst werden nur $(2, 3)$ -Instanzen behandelt; $(k, k + 1)$ -Instanzen folgen danach, vgl. [27]. Sei $\mathbf{a} = \mathbf{e}^{i_1} + \mathbf{e}^{i_2} + \mathbf{e}^{i_3}$ eine $(2, 1)$ -Variante mit $\frac{5}{12}w > \ell_{i_1} \geq \ell_{i_2} > w/3 > \ell_{i_3} > w/4$. Für $i \in \{i_1, i_2, i_3\}$ werde $\ell'_i := \frac{2}{3}w - \ell_i$ festgelegt. Dann gilt $\frac{5}{12}w > \ell'_{i_3} > w/3 > \ell'_{i_2} \geq \ell'_{i_1} > w/4$. Galt $\ell_{i_1} + \ell_{i_2} + \ell_{i_3} = w$, dann ist $\ell'_{i_1} + \ell'_{i_2} + \ell'_{i_3} = w$, d. h. aus der zulässigen, verschnittfreien $(2, 1)$ -Variante entstand eine zulässige, verschnittfreie $(1, 2)$ -Variante. Diese soll *komplementäre Variante* zu \mathbf{a} heißen. Wird von ihr entsprechend nochmals zur komplementären Variante übergegangen, dann entsteht wieder die ursprüngliche Variante \mathbf{a} .

Ist eine $(2, 3)$ -Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ gegeben, die eine Optimallösung der Relaxation (1.6) besitzt, in der nur $(2, 1)$ -Varianten in positiver Häufigkeit benutzt werden, dann kann mit $\ell'_i := \frac{2}{3}w - \ell_i$ für alle $i \in I$ eine *komplementäre Instanz* $E' = (m; w; \mathbf{l}'; \mathbf{b})$ zu E aufgestellt werden. Auf deren Optimallösungen von (1.3) und (1.6) kann aber nicht geschlossen werden, weil verschnittbehafteten Varianten in E unzulässige in E' entsprechen und umgekehrt.

Gegeben sei eine $(k, k + 1)$ -Instanz $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$, die eine Optimallösung der

Relaxation (1.6) besitzt, welche nur verschnittsfreie $(k + 1)$ -Teile-Varianten in positiver Häufigkeit verwendet. Dann kann mit der Festlegung $\ell'_i := \frac{2w}{k+1} - \ell_i$ für alle $i \in I$ eine komplementäre Instanz $E' = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ erklärt werden. Alle zulässigen, verschnittsfreien $(k + 1)$ -Teile-Varianten von E gehen in solche von E' über, d. h. $z_C(E) = z_C(E') = z_M(E) = z_M(E')$. Jedoch kann das Gap sich ändern, weil E oder E' auch eine ganzzahlige Optimallösung besitzen kann, in welcher alle verwendeten Varianten verschnittsfrei sind, aber nicht alle genau $k + 1$ Teile beinhalten.

Um das genauer zu illustrieren, sei $t \in \mathbb{R}$, $t > -\ell_m$ gewählt, wobei $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_m$ sei. Dann hat die Instanz $E(t) := (m; w + (k + 1)t; \mathbf{1} + t\mathbf{e}; \mathbf{b})$ unabhängig von t den optimalen Zielfunktionswert z_C in (1.6), denn jede in $E(0)$ zulässige, verschnittsfreie $(k + 1)$ -Teile-Variante ist auch so eine in $E(t)$. Für

$$t > \max\{w - (k + 2)\ell_m, k\ell_1 - w\} \quad (4.5)$$

ist $E(t)$ eine $(k, k+1)$ -Instanz, denn $w \geq (k+1)\ell_m$ und $t > (k+1)\ell_m - (k+2)\ell_m = -\ell_m$, $w + (k+1)t - k(\ell_1 + t) = w + t - k\ell_1 > 0$ sowie $w + (k+1)t - (k+2)(\ell_m + t) = w - t - (k+2)\ell_m < 0$. Jede Variante mit höchstens k Teilen hat Verschnitt in $E(t)$. Das bedeutet entweder die Ganzzahl-Eigenschaft $z_C = z_D$ für alle $t > -\ell_m$ oder Nicht-IRUP ($\Delta \geq 1$) für alle t , die (4.5) genügen, und damit für fast alle $t > -\ell_m$, denn es gibt nur endlich viele Kombinationen von höchstens k Teilen, und jede ist für höchstens ein $t > -\ell_m$ verschnittsfrei. Im ersten Fall hat auch $E'(t) := (m; w + (k + 1)t; (\frac{2w}{k+1} + t)\mathbf{e} - \mathbf{1}; \mathbf{b})$ immer IRUP, während im zweiten Fall für fast alle $t > -\ell'_m = \ell_1 - 2w/(k + 1)$ das Gap $\Delta(E'(t)) \geq 1$ ist. Dabei ist in jedem Falle $t > \ell_1 - 2w/(k + 1)$ zu fordern, damit in $E'(t)$ keine Teile mit nicht positiver Länge auftreten. Diese Forderung ist automatisch erfüllt, wenn die Ungleichung (4.5) gilt.

Beispiel: Die Instanz (4.4) hat für $t > -13$, $t \notin \{-12, -11, -9\}$ ein Gap $\Delta(E(t)) = 1$. Für $t > -11$ existiert die komplementäre Instanz $E'(t) = (7; 51 + 3t; (21 + t, 20 + t, 19 + t, 18 + t, 17 + t, 15 + t, 11 + t)^T; (1, 1, 1, 1, 2, 2, 1)^T)$ mit $z_C(E'(t)) = z_M(E'(t)) = 3$. Für $t > 7$ ist dies auch eine $(2, 3)$ -Instanz, und für alle $t > -11$, $t \neq -10$ gilt $\Delta(E'(t)) = 1$, weil es keine zulässige, verschnittsfreie 2-Teile-Variante gibt. \triangleleft

4.2.3 Instanzen mit $z_C = 2$

Bis hierher wurden Nicht-IRUP- $(k, k + 1)$ -Instanzen nur mit $z_C = z_M \geq 3$ angegeben. Bei $z_C = 2$ ändert sich die Situation etwas, obwohl Lemma 10 auch bei $z_C = 2$ ein Gap $\Delta \geq 1$ zulässt. Gemäß Aussage 10, S. 56, gibt es keine Nicht-IRUP- $(2, 3)$ -Instanz mit $z_C = z_M = 2$.

Aussage 16: Folgende $(k, k + 1)$ -Instanzen E_k haben $z_C = z_M = 2$ und $z_D = 3$:

$$\begin{aligned} E_k &:= (7; 7k^2 + 26k + 23; (7k + 29, 7k + 27, 7k + 21, 7k + 19, \\ &\quad 7k + 17, 7k + 16, 7k + 12)^T; (1, 1, 1, 2k - 4, 1, 1, 1)^T) \quad \text{bei } 3 \leq k \leq 7 \quad \text{und} \\ E_k &:= (7; 10k^2 + 6k; (10k + 6, 10k + 4, 10k - 2, 10k - 4, \\ &\quad 10k - 6, 10k - 7, 10k - 11)^T; (1, 1, 1, 2k - 4, 1, 1, 1)^T) \quad \text{bei } k \geq 8. \end{aligned}$$

Beweis: Es handelt sich tatsächlich um $(k, k + 1)$ -Instanzen, denn

- bei $3 \leq k \leq 7$ ist $7k^2 + 26k + 23 - k * (7k + 29) = 23 - 3k \geq 0$ und $7k^2 + 26k + 23 - (k + 2) * (7k + 12) = -1 < 0$;
- bei $k \geq 8$ ist $\ell_7 = 10k - 11 > 0$, $w = k\ell_1$ und $10k^2 + 6k - (k + 2) * (10k - 11) = 22 - 3k < 0$.

Außerdem ist $z_C = z_M = 2$, denn die folgenden Varianten sind auch zulässig und verschnittfrei:

$$\frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ k-3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ k-2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ k-2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ k-1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2k-4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Nachweis von $z_D > 2$ kann für $3 \leq k \leq 7$ mit der Relaxation (1.7) erfolgen. Sei $k \geq 8$. Wenn eine eigentliche, verschnittfreie Variante \mathbf{a} mit $a_6 = 1$ existierte, müßte auch $a_7 = 1$ sein, da ℓ_6 und ℓ_7 die einzigen ungeraden Längen sind und $b_6 = b_7 = 1$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} w - \mathbf{1}^T \mathbf{a} &= 10k^2 - 14k + 18 - \sum_{i=1}^5 a_i \ell_i \\ &= (10k - 4) * (k - 1 - \sum_{i=1}^5 a_i) + 14 - 10a_1 - 8a_2 - 2a_3 + 2a_5, \end{aligned}$$

also muß $10k - 4$ Teiler von $10a_1 + 8a_2 + 2a_3 - 2a_5 - 14$ sein. Dabei gilt $a_1, a_2, a_3, a_5 \in \{0, 1\}$, somit $-16 \leq 10a_1 + 8a_2 + 2a_3 - 2a_5 - 14 \leq 20$. Wegen $10k - 4 \geq 76$ heißt das $10a_1 + 8a_2 + 2a_3 - 2a_5 - 14 = 0$, also $10a_1 + 8a_2 + 2a_3 \geq 14$, $a_1 = a_2 = 1$ und $4 + 2a_3 - 2a_5 = 0$, Widerspruch. Es existiert keine eigentliche, verschnittfreie Variante, d. h. $z_D > 2$. \square

Aussage 17: Die folgenden $(k, k + 1)$ -Instanzen mit nur fünf verschiedenen Teilleängen haben $z_M < z_C = 2 < z_D$, vgl. [27]:

$$\begin{aligned} k = 2: & \quad E_2 = (5; 75; (29, 28, 25, 23, 19)^T; (1, 1, 2, 1, 1)^T) \\ k = 3: & \quad E_3 = (5; 94; (29, 28, 25, 23, 19)^T; (1, 1, 2, 1, 3)^T) \\ k \geq 4: & \quad E_k = (5; 10k^2 - 8k; (10k - 8, 10k - 9, 10k - 12, 10k - 14, 10k - 18)^T; \\ & \quad (1, 1, 2, 1, 2k - 3)^T) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Beweis für $k \geq 4$: Wegen $2k - 3 \geq 0$, $10k - 18 > 0$, $w = k\ell_1$ und $10k^2 - 8k - (k + 2) * (10k - 18) = 36 - 10k < 0$ sind tatsächlich $(k, k + 1)$ -Instanzen gegeben. Wegen $\mathbf{e}^T \mathbf{b} = 2k + 2$ heißt das $z_C \geq 2$. Andererseits gilt $z_C \leq 2$ wegen

$$\frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ k-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ k-2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ k-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ k-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2k-3 \end{pmatrix},$$

und alle diese Varianten sind zulässig. Nur die erste hat Verschnitt. Wegen $2w - \mathbf{1}^T \mathbf{b} = 1$ dürfte der Gesamtverschnitt nur 1 sein, falls $z_D = 2$ gälte. Weil $10k - 9$ die einzige ungerade Länge und $b_2 = 1$ ist, müßte es eine eigentliche, verschnittfreie Variante ohne Teil 2 geben. Sei $\mathbf{a} = (a_1, 0, a_3, a_4, a_5)^T$ diese Variante. Verschnittfreiheit verlangt $0 = w - \mathbf{a}^T \mathbf{1} = (10k - 8) * (k - a_1 - a_3 - a_4 - a_5) + 4a_3 + 6a_4 + 10a_5$, so daß $4a_3 + 6a_4 + 10a_5$ durch $10k - 8$ teilbar sein muß, wobei $a_3 = a_4 = a_5 = 0$ entfällt. Wegen $a_3 \leq 2$ und $a_4 \leq 1$ heißt das $10a_5 \geq 10k - 22$, also $a_5 \geq k - 2$ und $w - a_5 \ell_5 \leq 10k^2 - 8k - (k - 2) * (10k - 18) = 30k - 36$. Wegen $30k - 36 - 4 * (10k - 18) = 36 - 10k < 0$ kann dieser Rest mit höchstens drei Teilen belegt werden. Nur zwei Teile ergeben Verschnitt von wenigstens $30k - 36 - (10k - 8) - (10k - 12) = 10k - 16 \geq 24$, doch auch mit genau drei Teilen kann die Restlänge $30k - 36$ für kein k vollständig belegt werden. Daraus folgt $z_D > 2$. \square

4.2.4 Allgemeinere Instanzen als Folgerung

Die Instanz (4.4) wird für $-13 < t < -12$ betrachtet, vgl. [26]. Dann ergeben sich unendlich viele, paarweise nichtäquivalente Instanzen, denn der Typ des Teils 7 durchläuft fast alle natürlichen Zahlen. Wird dieses kleinste Teil weggelassen, dann ändert sich (bei $-13 < t < -12$) an $z_D(E(t))$ nichts. Der Beweis kann analog zu Aussage 14 geführt werden. Wird $t = p/q - 13$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, $0 < p < q$ substituiert, dann ergibt die Multiplikation aller Längen in (4.4) mit q die Instanz

$$(6; 12q + 3p; (10q + p, 6q + p, 4q + p, 3q + p, 2q + p, q + p)^T; (1, 2, 2, 1, 1, 1)^T);$$

$$p, q \in \mathbb{N}, 0 < p < q$$

mit $z_M < z_C = 3 < z_D$. Nun wird das kleinste Teil auf $q + 1$ verkürzt.

Aussage 18: Es gilt $z_C \leq 3 < z_D$ für die Instanz

$$(6; 12q + 3p; (10q + p, 6q + p, 4q + p, 3q + p, 2q + p, q + 1)^T; (1, 2, 2, 1, 1, 1)^T);$$

$$p, q \in \mathbb{N}, 0 < p < q.$$

Beweis: $z_C \leq 3$ ist klar, so daß nur $z_D = 4$ zu zeigen ist. Angenommen, es wäre $z_D = 3$. Wegen $\mathbf{1}^T \mathbf{b} = 36q + 7p + 1 = 3w - (2p - 1)$ wäre der Gesamtverschnitt einer Lösung von (1.3) dann $2p - 1$. Eine Variante müßte dann mit Teil 1 auch Teil 5 enthalten, was den Verschnitt p ergibt. (Varianten wie $\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^6$ entfallen aus Dominanzgründen.) Doch nun kann Teil 2 nur noch mit weiterem Verschnitt p (oder mehr) gepackt werden, weil Teil 5 schon verbraucht wurde. Der Gesamtverschnitt ist somit mindestens $2p$, Widerspruch. \square

Bei $q \leq 2p + 3$ wird auch die Variante $\mathbf{e}^1 + 3\mathbf{e}^6$ zulässig und damit $z_C \leq 3 - 1/36$, weil folgender Plan als zulässige Lösung von (1.6) aufgestellt werden kann:

$$\frac{2}{3} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{12} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{9} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3 (1, k)-Instanzen

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Eine Instanz des 1CSPs, in der nur Teile der Typen 1 und k vorkommen, soll $(1, k)$ -Instanz heißen. Jede $(1, 2)$ - und $(1, 3)$ -Instanz hat IRUP. Für $(1, k)$ -Instanzen mit $k \geq 4$ gilt das nicht mehr, vgl. [26, 27].

Aussage 19: Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leq q$. Dann sind die ersten drei Teile der folgenden Instanz $E_0(p, q)$ vom Typ 1, und es gilt $z_M(E_0(p, q)) = z_C(E_0(p, q)) = 3$ und $z_D(E_0(p, q)) = 4$:

$$E_0(p, q) := (9; 37 + 3p + q; (25 + p + q, 21 + p + q, 19 + p + q, 11 + p, 9 + p, 8 + p, 7 + p, 6 + p, 5 + p)^T; \mathbf{e}) \quad (4.7)$$

Der Beweis ähnelt dem von Aussage 14: $w - 2\ell_3 = p - q - 1 < 0$, so daß die Teile 1–3 vom Typ 1 sind. Es ist $z_M = z_C = 3$, denn $\frac{1}{2} \times (\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^7 + \mathbf{e}^9) + \frac{1}{2} \times (\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^8) + \frac{1}{2} \times (\mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^4 + \mathbf{e}^9) + \frac{1}{2} \times (\mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^6) + \frac{1}{2} \times (\mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^4 + \mathbf{e}^7) + \frac{1}{2} \times (\mathbf{e}^3 + 2\mathbf{e}^5) = \mathbf{e}$, und alle diese Varianten sind verschnittfrei. Es ist aber $z_D > 3$, denn die einzige eigentliche, verschnittfreie Variante mit Teil 1 enthält auch die Teile 7 und 9, doch dann kann Teil 2 nicht mehr ohne Verschnitt gepackt werden. \square

Seien $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $0 < r < 1/4$, $r < s$ gegeben. Dann können in $E_0(p, q)$ die Parameter p und q so festgelegt werden, daß die Teile 5–9 durchweg Längen zwischen $r * w$ und $s * w$ haben und $p \leq q$ gilt, d. h.

$$r * (37 + 3p + q) < 5 + p \wedge 9 + p < s * (37 + 3p + q) \wedge p \leq q. \quad (4.8)$$

Auflösung nach q ergibt

$$\frac{p + 9}{s} - 3p - 37 < q < \frac{p + 5}{r} - 3p - 37 \wedge p \leq q \quad (4.9)$$

und damit die notwendige Bedingung

$$p > \frac{9r - 5s}{s - r} \quad (4.10)$$

an p . Für festes s steigt diese Schranke streng monoton mit $r \in (0, s)$. Das für q angegebene Intervall in (4.9) enthält für hinreichend großes $p \in \mathbb{N}$ mindestens eine ganze Zahl, denn $\frac{p + 5}{r} - \frac{p + 9}{s} = \frac{p * (s - r) + 5s - 9r}{rs}$ wächst für festes $r, s \in \mathbb{Q}$, $s > r > 0$ linear mit p . Wegen $0 < r < 1/4$ ist $(p + 5)/r - 3p - 37 > p - 17$, und $q \geq p$ kann eingehalten werden. Folglich besitzt das Ungleichungssystem (4.8) stets Lösungen $p, q \in \mathbb{N}$. Somit kann für festes $r \in (0, 1/4)$ mit geeigneten $p, q \rightarrow \infty$ in Aussage 19 jeweils $\ell_i/w \rightarrow r \forall i \in \{4, \dots, 9\}$ erreicht werden. Im Kontrast dazu ergibt sich in Aussage 14 $\lim_{t \rightarrow \infty} \ell_i/w = 1/3 \forall i \in I$.

Soll auch Teil 4 eine Länge von höchstens $s * w$ haben, dann ist die Bedingung (4.8) um $11 + p \leq s * (37 + 3p + q)$ zu verschärfen, d. h. (4.8) geht in die ebenfalls stets erfüllbare Bedingung

$$r * (37 + 3p + q) < 5 + p \wedge 11 + p \leq s * (37 + 3p + q) \wedge p \leq q \quad (4.11)$$

über. Die Lösbarkeit kann wie für das System (4.8) gezeigt werden. Wird $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$ vorgegeben, dann kann $s := 1/k$ und $r := 1/(k+1)$ gesetzt werden, um die Instanz E_0 als Schablone für $(1, k)$ -Instanzen mit Gap 1 zu verwenden. Die zu (4.10) analoge notwendige Bedingung für p wird dann $p > (11r - 5s)/(s - r) = 6k - 5$, und die (4.9) entsprechenden Ungleichungen für q werden zu $q \geq p \wedge (p + 1) * k \leq q + 3p + 37 < (p + 5) * (k + 1)$. Diese und damit die Bedingungen (4.11) werden mit $p := 6k - 4$ und $q := 6k^2 - 11k - 25$ befriedigt. Daraus ergeben sich folgende $(1, k)$ -Instanzen mit $z_M = z_C = 3$, $z_D = 4$:

$$(9; 6k^2 + 7k; (6k^2 - 5k - 4, 6k^2 - 5k - 8, 6k^2 - 5k - 10, 6k + 7, 6k + 5, 6k + 4, 6k + 3, 6k + 2, 6k + 1)^T; \mathbf{e}), \quad k \geq 4$$

Aussage 20: Für $k \geq 6$ besitzen auch die folgenden $(1, k)$ -Instanzen $z_M = z_C = 3$, $z_D = 4$:

$$(8; 10k^2 + 11k; (10k^2 - 19k - 15, 10k + 11, 10k + 7, 10k + 5, 10k + 4, 10k + 3, 10k + 2, 10k + 1)^T; (3, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)^T)$$

Beweis: Wegen $2 * (10k^2 - 19k - 15) - 10k^2 - 11k = 10k^2 - 49k - 30 \geq 36$, $w = k\ell_2$ und $10k^2 + 11k - (k + 1) * (10k + 1) = -10$ sind tatsächlich $(1, k)$ -Instanzen gegeben. Aus $b_1 = 3$ folgt $z_C \geq 3$. Wegen $w - \ell_1 - 4\ell_8 = 11 - 10k < 0$ passen zum Teil 1 jeweils höchstens drei weitere Teile. Wird w durch $w - \ell_1 = 30k + 15$ ersetzt und danach Teil 1 gestrichen, dann entsteht genau die in Aussage 14 behandelte Instanz (4.4) mit $t = 10k - 12 > 0$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Der Beweis von Aussage 20 weist einen Weg zur Konstruktion von Nicht-IRUP- $(1, k)$ -Instanzen aus beliebigen Nicht-IRUP- $(p, p + 1)$ -Instanzen $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$, wobei $k \geq 2p + 2$ vorausgesetzt wird. Dazu wird ein hinreichend großes t gewählt und $E' := (m; w + (p + 1)t; \mathbf{l} + t\mathbf{e}; \mathbf{b})$ gesetzt, d. h. alle Längen werden in dieser Weise vergrößert. Jede in E zulässige Variante \mathbf{a} mit $\mathbf{e}^T \mathbf{a} \leq p + 1$ ist auch für E' zulässig, und jede für E unzulässige Variante $\tilde{\mathbf{a}}$ mit $\mathbf{e}^T \tilde{\mathbf{a}} \geq p + 1$ ist auch für E' unzulässig. Das heißt aber nicht, E' sei eine zu E äquivalente Instanz. Es wird $\lim_{t \rightarrow \infty} (w'/\ell'_i) = p + 1 \forall i \in I$. Sei ℓ'_0 geeignet groß. Hinzufügen von $\lceil z_C(E) \rceil$ Teilen der Länge ℓ'_0 zu E' und Vergrößerung von w' um ℓ'_0 ergibt $k \leq (w' + \ell'_0)/\ell'_i < k + 1 \forall i \in I$, also eine $(1, k)$ -Instanz mit $m + 1$ Teillängen.

4.4 Ein Ansatz für den allgemeinen Fall

Das Wesen vieler Nicht-IRUP-Instanzen, insbesondere im Teilbarkeitsfall, besteht darin, daß eine bestimmte (Rest-)Länge nicht verschnittfrei oder -arm mit eigentlichen Varianten belegt werden kann, wohl aber mit uneigentlichen Varianten. Zum Beispiel ergab sich am Ende des Abschnitts 4.2.4 eine uneigentliche Variante, bestehend aus einem Typ-1-Teil und dreimal einem kleinen Teil. Diese Idee kann weitergeführt werden.

Sei $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ gegeben. Bei Verwendung eines Typ-1-Teils bleibe die Restlänge $p * (p + 1)$ übrig. Diese kann mit p Teilen der Länge $p + 1$ oder $p + 1$ Teilen der Länge

p genutzt werden, aber gerade diese Varianten seien uneigentlich. Dann entsteht in eigentlichen Varianten mit dem Typ-1-Teil mindestens der Verschnitt $p - 1$. Dieser Ansatz führte auf folgende Familie von Nicht-IRUP-Instanzen [26]:

$$E(p) := (5; 4p^2 + 4p + 2; (2p^2 + 2p + 2, 2p^2 + 2p + 1, 2p^2 + 2, 2p + 2, 2p)^T; (1, 1, 1, 1, p)^T)$$

Aussage 21: Für $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ besitzt obige Instanz $E(p)$ ein Gap $\Delta > 1$.

Beweis: Sei $Q := (p + 1) * (2p + 1)$. Es gilt $z_C(E(p)) \leq 2 - \frac{p-1}{2Q}$, denn $\frac{1}{2} \times 2\mathbf{e}^2 + \frac{p}{p+1} \times (\mathbf{e}^1 + (p+1)\mathbf{e}^5) + \frac{p-1}{Q} \times (\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^3) + \frac{p^2+p+1}{Q} \times (2\mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^4) + \frac{p+2}{Q} \times (\mathbf{e}^1 + p\mathbf{e}^4) = \mathbf{b}$, und alle diese Varianten sind zulässig. Nur die dritte und vierte

Variante haben Verschnitt, nämlich $2p - 2$ und $2p - 4$. Wäre $z_D = 2$, dann dürfte wegen $\mathbf{1}^T \mathbf{b} = 8p^2 + 6p + 7 = 2w - (2p - 3)$ der Gesamtverschnitt nicht mehr als $2p - 3$ betragen. Die eigentlichen Varianten, die Teil 1 mit dem geringstem Verschnitt zuschneiden, sind $\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^3$ und $\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^4 + (p-1)\mathbf{e}^5$. Weil sie aber jeweils den Verschnitt $2p - 2$ produzieren, ist $z_D(E(p)) > 2$. \square

Wegen $z_M(E(p)) = 2 - O(p^{-1})$ ist $\lim_{p \rightarrow \infty} z_C(E(p)) = 2$, jedoch ist $z_C(E(p))$ nicht monoton. Das größte Gap ergibt sich für $p = 3$ zu $\Delta(E(3)) = 29/28$.

Sei $p \geq 5$. Das Zusammenfassen einiger Teile der Länge ℓ_5 zu größeren Einheiten ändert $z_M(E(p))$ und $z_D(E(p))$ nicht. Gilt das auch für $z_C(E(p))$, dann entstehen weitere nichtäquivalente Instanzen mit Gap größer als 1. Sei etwa $p \geq \sum_{i=1}^q \beta_i p_i$ mit $\beta_i, p_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für $i = 1, \dots, q$ und $p_1 > \dots > p_q > 1$. Außerdem seien alle p_i ($i = 1, \dots, q$) Teiler von $p + 1$. Sei $p_{q+1} := 1$ und $\beta_{q+1} := p - \sum_{i=1}^q \beta_i p_i$. Die von $E(p)$ abgeleitete Instanz $E'(p) = (m'; w; \mathbf{1}'; \mathbf{b}')$ wird dann

$$E'(p) := (q + 5; w; (\ell_1, \ell_2, \ell_3, p_1 \ell_5, \dots, p_q \ell_5, \ell_4, \ell_5)^T; (1, 1, 1, \beta_1, \dots, \beta_q, 1, \beta_{q+1})^T),$$

wobei $b'_{m'}$ auch null werden kann. In dem im Beweis zu Aussage 21 angegebenen Schnittplan sind anstelle $p/(p+1)$ -mal der Variante $(1, 0, 0, 0, p+1)^T$ genau $q+1$ Varianten zu schneiden, nämlich für $i = 1, \dots, q+1$ jeweils $\beta_i p_i / (p+1)$ -mal die Variante, die genau ein Teil 1 sowie $(p+1)/p_i$ Teile der Länge $\ell'_{i+3} = p_i \ell_5$ enthält. Für die Instanz E' wird damit eine Lösung der stetigen Relaxation (1.6) mit dem gleichen Zielfunktionswert $z_C(E'(p)) = z_C(E(p))$ erhalten.

Beispiel: Sei $p = 5$. Mit $q = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ wird aus

$$E(5) = (5; 122; (62, 61, 52, 12, 10)^T; (1, 1, 1, 1, 5)^T)$$

die Instanz

$$E'(5) = (6; 122; (62, 61, 52, 30, 20, 12)^T; \mathbf{e}),$$

nachdem das in der Anzahl 0 zu fertigende Teil der Länge 10 gestrichen wurde. Es gilt $\Delta(E(5)) = \Delta(E'(5)) = 34/33 \approx 1,0303$. \triangleleft

Ist p ungerade, aber kein Vorgänger einer Zweierpotenz, d. h. $2 \nmid p \wedge \log_2(p+1) \notin \mathbb{N}$, dann gibt es die Möglichkeit, $p = \sum_{i=1}^q \beta_i p_i$ so zu setzen, daß $z_C(E'(p)) = z_C(E(p))$

ist und trotz anschließender Verkürzung des Teils 3 um zwei Längeneinheiten auf $2p^2$ keine neue eigentliche Variante hinzukommt. Andererseits können neue uneigentliche Varianten hinzukommen, die zu einem geringeren optimalen Zielfunktionswert der Relaxation (1.6) führen. Im obigen Beispiel wird

$$E''(5) = (6; 122; (62, 61, 50, 30, 20, 12)^T; \mathbf{e})$$

mit dem relativ großen Gap $\Delta(E''(5)) = 37/35 \approx 1,0571$ erhalten. Das ermutigt zur Suche nach noch größeren Gaps, indem der Bedarfsvektor variiert wird. Eine Verdopplung auf $2\mathbf{e}$ ist uninteressant, weil dann mit der eigentlich gewordenen Variante $2\mathbf{e}^2$ das Teil 2 komplett zugeschnitten werden kann. Auch eine Verdreifachung des Bedarfsvektors auf $3\mathbf{e}$ ergibt IRUP. Wird aber noch ein Teil der Länge 12 hinzugefügt, dann entsteht eine Instanz mit Gap $38/35 \approx 1,0857$, nämlich

$$E'''(5) = (6; 122; (62, 61, 50, 30, 20, 12)^T; (3, 3, 3, 3, 3, 4)^T).$$

Die Überprüfung von $z_D(E'''(5)) = 7$ kann mit Hilfe von Schnittebenenverfahren [17] erfolgen. Die zugehörige residuale Instanz zu E''' besitzt das selbe Gap und ist

$$E^{(r)} = (6; 122; (62, 61, 50, 30, 20, 12)^T; (2, 1, 1, 1, 2, 4)^T). \quad (4.12)$$

Die Bedarfszahlen „ $\dots, 1, 2, 4$ “ erinnern an $E_F = (3; 30; (15, 10, 6)^T; (1, 2, 4)^T)$ von FIELDHOUSE [8], und die vorkommenden Längen 30, 20, 12 sind genau doppelt so groß wie die in E_F . Kann diese Erkenntnis verallgemeinert werden? — Ja!

4.5 Konstruktionsprinzipien für große Gaps

4.5.1 Der erste Konstruktionssatz für große Gaps

Im Abschnitt 4.4 wurde eine interessante Feststellung beim Vergleich einer Instanz mit hohem Gap mit einer bekannten Nicht-IRUP-Instanz getroffen, und am Ende des Abschnitts 4.3 wurde angedeutet, wie mit Typ-1-Teilen aus einer Nicht-IRUP-Instanz eine neue konstruiert werden kann. Beides war die Idee für den unten folgenden Satz [26].

$$E' = (m'; w'; (\ell'_1, \dots, \ell'_{m'})^T; (b'_1, \dots, b'_{m'})^T)$$

sei eine Instanz mit $w', \ell'_1, \dots, \ell'_{m'} \in \mathcal{Q}$, $w' > \ell'_1 > \dots > \ell'_{m'} > 0$, $b'_1, \dots, b'_{m'} \geq 1$ und Gap $\Delta(E') \geq 1$. Ferner seien $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ und $q \in \mathcal{Q}$, $q \geq 2/\ell'_{m'}$ gegeben. Mit

$$\begin{aligned} m &:= m' + 3 \\ w &:= p * (qw' + 1) \\ \mathbf{l} &:= (w - qw', qw' + 1, qw' + 2 - q\ell'_{m'}, q\ell'_1, \dots, q\ell'_{m'})^T \\ \mathbf{b} &:= (\lceil z_C(E') \rceil, p - 1, 1, b'_1, \dots, b'_{m'})^T \end{aligned}$$

wird eine neue Instanz $E = (m; w; (\ell_1, \dots, \ell_m)^T; (b_1, \dots, b_m)^T)$ definiert.

SATZ 4: Wenn für beliebige $\mathbf{a}' \in \mathbb{N}^m$ mit $\mathbf{l}^T \mathbf{a}' > w'$ und $\mathbf{a}' \leq \mathbf{b}'$ immer

$$q * \left(\sum_{i=1}^{m'} a'_i \ell'_i - w' \right) > 1 \quad (4.13)$$

gilt, dann hat obige Instanz E ein Gap $\Delta(E) \geq 1 + (\lceil z_C(E') \rceil - z_C(E'))/p \geq 1$.

Bemerkung 10: Bei $\mathbf{I}' \in \mathcal{N}^{m'}$ und $w' \in \mathcal{N}$ ist die Bedingung (4.13) mit $q \geq 2$ immer erfüllt, denn jede für E' unzulässige Variante \mathbf{a}' ist um mindestens eine Einheit zu lang, so daß die linke Seite der Ungleichung (4.13) mindestens q ergibt.

Beweis des ersten Konstruktionssatzes (Satz 4): Zuerst wird $z_C(E)$ abgeschätzt. Dazu sei eine Optimallösung \mathbf{x}' der Relaxation (1.6) zu den (für E' jeweils zulässigen) Varianten $\mathbf{a}^j \in J'$ gegeben, d. h. $x'_j \geq 0 \forall j \in J'$, $z_C(E') = \sum_{j \in J'} x'_j$ und $\sum_{j \in J'} a'_{ij} x'_j = b'_i$ für $i = 1, \dots, m'$.

Eine für E zulässige, nicht notwendig optimale, Lösung der Relaxation (1.6) wird konstruiert, indem zu jeder Variante \mathbf{a}^j , $j \in J'$ eine Variante $\mathbf{a}^j \in \mathcal{N}^m$ zugeordnet wird, nämlich $a_{1j} := 1$, $a_{2j} := a_{3j} := 0$ und $a_{ij} := a'_{i-3,j}$ für $i = 4, \dots, m$. Diese \mathbf{a}^j sind zulässige Varianten für E , und für $i = 4, \dots, m$ gilt $\sum_{j \in J'} a_{ij} x'_j = b_i$. Nun werden noch

die Varianten $\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^3$, $p\mathbf{e}^2$ und $p\mathbf{e}^3$ in den Häufigkeiten $\lceil z_C(E') \rceil - z_C(E')$, $(p-1)/p$ und $(z_C(E') + 1 - \lceil z_C(E') \rceil)/p$ ergänzt. Wegen $\lceil z_C(E') \rceil - z_C(E') + \sum_{j \in J'} a_{1j} x'_j = b_1$ liegt

eine zulässige Lösung der Relaxation (1.6) vor. (Bei $\ell'_{m'-1} \leq p * \ell'_{m'} - p/q$ ist auch die Variante $p\mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^{m'+2}$ zulässig und die angegebene Lösung i. allg. nicht optimal.) Es folgt

$$\begin{aligned} z_C(E) &\leq z_C(E') + (\lceil z_C(E') \rceil - z_C(E')) + (p-1)/p + (z_C(E') + 1 - \lceil z_C(E') \rceil)/p \\ &= \lceil z_C(E') \rceil + 1 - (\lceil z_C(E') \rceil - z_C(E'))/p. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nun wird $z_D(E) > \lceil z_C(E') \rceil + 1$ gezeigt. Wegen $\ell_1 + \ell_2 > w$ sind $\lceil z_C(E') \rceil$ Varianten \mathbf{a}^j mit $a_{1j} = 1$, $a_{2j} = 0$ erforderlich, um b_1 -mal Teil 1 zu schneiden. Angenommen, es wäre $z_D(E) = \lceil z_C(E') \rceil + 1$, dann müßten alle $p-1$ Teile der Länge ℓ_2 in einer einzigen Variante $\bar{\mathbf{a}}$ ohne Teil 1 untergebracht werden. Die noch nicht belegte Länge in $\bar{\mathbf{a}}$ ist $qw' + 1$. Wegen $\Delta(E') \geq 1$ können nicht alle Teile der Längen ℓ_4, \dots, ℓ_m in den Anzahlen b_4, \dots, b_m in den $\lceil z_C(E') \rceil$ Varianten \mathbf{a}^j untergebracht worden sein. Wenigstens ein Teil mit einer Länge von mindestens $q\ell'_{m'}$ blieb ungepackt. Wegen

$$\ell_3 + q\ell'_{m'} = qw' + 2 - q\ell'_{m'} + q\ell'_{m'} = qw' + 2 > qw' + 1$$

können dieses Teil und das Teil 3 nicht gemeinsam mit den $p-1$ Teilen der Länge ℓ_2 in der Variante $\bar{\mathbf{a}}$ vorkommen. Folglich ist mindestens eine weitere Variante erforderlich, d. h. $z_D(E') \geq \lceil z_C(E') \rceil + 2$. Wegen $\Delta(E) = z_D(E) - z_C(E)$ ergibt das zusammen mit (4.14) die Behauptung. \square

Beispiel 1: Es wird $E' := E'_G$ gesetzt, also die Instanz (1.10), S. 13, zugrunde gelegt. Satz 4 wird mit $p = q = 2$ angewendet. Das ergibt die Instanz

$$E = (8; 242; (122, 121, 98, 60, 44, 40, 38, 24)^T; (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)^T) \quad (4.15)$$

mit $z_C(E) = 26/9$ und dem deutlich größeren Gap $\Delta(E) = 10/9$. Die Anwendung des ersten Konstruktionssatzes mit $p = 3, 4, 5, 6$ und $q = 2$ brachte kleinere Gaps, und zwar ca. 1,0741, 1,0556, 1,0444 und 1,0394. Auch die mehrfache Anwendung von Satz 4 ergab nur noch abnehmende Gaps. \triangleleft

Im Beweis zu Satz 4 konnte das Teil 3 in E nur schlecht verwendet werden, in E'_G das Teil 2 (Länge 22). In diesem Falle aber können beide Teile hervorragend kombiniert

werden, denn $2 * 98 + 44 = 240 \approx w$. Damit ist die deutliche Erhöhung des Gaps von $16/15$ in E'_G auf $10/9$ bei Verwendung der Parameter $p = q = 2$ zu erklären. In anderen Fällen kann ggf. in geeigneter Weise nachgeholfen werden.

Beispiel 2: Satz 4 soll mit $p = q = 2$ angewandt werden. Dazu wird die Instanz (4.4) mit $t = 0$ vorgegeben, also $E'_1 = (7; 51; (23, 19, 17, 16, 15, 14, 13)^T; (1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)^T)$. Die mit Satz 4 konstruierte Instanz

$$E_1 = (10; 206; (104, 103, 78, 46, 38, 34, 32, 30, 28, 26)^T; (3, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)^T)$$

besitzt das Gap $\Delta(E_1) = 1 + 1/14$. Aus E'_1 entsteht bei Hinzunahme eines Teiles der Länge 25, welches genau zweimal gefordert wird, eine Instanz

$$E'_2 = (8; 51; (25, 23, 19, 17, 16, 15, 14, 13)^T; (2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)^T),$$

die wie E'_1 das Gap 1 aufweist. Die Anwendung von Satz 4 auf E'_2 ergibt die Instanz

$$E_2 = (11; 206; (104, 103, 78, 50, 46, 38, 34, 32, 30, 28, 26)^T; (4, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)^T)$$

mit dem Gap $\Delta(E_2) = 1 + 1/10$, weil nun das dritte Teil (Länge 78) wesentlich günstiger kombiniert werden kann, nämlich $206 = 2 * 78 + 50$, während das Teil der Länge 50 für die mit den kleineren Teilen aufgebaute Struktur von Varianten ohne Bedeutung ist. ◁

4.5.2 Zusammengesetzte Instanzen

Im vorigen Unterabschnitt wurde darüber gesprochen, daß zu einer Instanz noch weitere Teile hinzugenommen werden. Dies soll verallgemeinert und etwas formalisiert werden [27].

Wenn zwei Instanzen $E' := (m'; w'; \mathbf{l}'; \mathbf{b}')$ und $E'' := (m''; w''; \mathbf{l}''; \mathbf{b}'')$ mit $w' = w''$ gegeben sind, dann kann gefordert werden, daß alle Teile der Längen ℓ'_i und ℓ''_i in den jeweils geforderten Anzahlen b'_i und b''_i aus einheitlichem Ausgangsmaterial der Länge $w := w' = w''$ geschnitten werden sollen. Damit ist eine neue Instanz $E := (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ entstanden. Zur Abkürzung dieses Sachverhalts wird die Notation

$$E := E' \oplus E''$$

eingeführt. Dies kann folgendermaßen auch auf den Fall verallgemeinert werden, daß $w' \neq w''$ war. Dann sind alle Längen geeignet zu vervielfachen, nämlich alle Längen aus E' mit w'' und alle Längen aus E'' mit w' , so daß anstelle E' und E'' mit den in dieser Weise erhaltenen äquivalenten Instanzen gearbeitet wird. Sind w' und w'' ganzzahlig, dann ist auch das kleinste gemeinsame Vielfache für die neue Länge w geeignet. In diesem Sinne ist die Notation $E := E' \oplus E''$ etwas allgemeiner erklärt.

Offensichtlich ist die Verknüpfung \oplus bis auf äquivalente Formulierungen der selben Instanz kommutativ und assoziativ. Außerdem gilt stets

$$z_M(E) = z_M(E') + z_M(E''), \quad z_C(E) \leq z_C(E') + z_C(E'') \quad \text{und} \quad z_D(E) \leq z_D(E') + z_D(E''),$$

aber nicht $\Delta(E' \oplus E'') \leq \Delta(E') + \Delta(E'')$, z. B. für $E' = (1; 5; 1; 5)$ und $E'' = (1; 5; 2; 1)$, denn $z_C(E') = z_D(E') = z_D(E'') = 1$, $z_C(E'') = 1/2$, also $\Delta(E') + \Delta(E'') = 1/2$,

während $E = (2; 5; (2, 1)^T; (1, 5)^T)$ auf $z_C(E) = 7/5$ und $z_D(E) = 2$, also $\Delta(E) = 3/5 > 1/2$ führt.

Das Gap würde subadditiv, wenn man $z_M(E') = z_C(E')$ und $z_M(E'') = z_C(E'')$ forderte, z. B. indem noch einige Teile der Länge 1 hinzugefügt werden, falls alle Längen ganzzahlig sind. Diese Veränderung führt jedoch auf völlig andere Instanzen und wird deshalb nicht weiter verfolgt.

4.5.3 (2, 3)-Instanzen mit $\Delta > 1$

Bis hierher wurden nur (2, 3)-Instanzen mit Gap $\Delta \leq 1$ angegeben. In diesem Unterabschnitt wird gezeigt, daß das Gap auch etwas größer sein kann. Ausgangspunkt für die folgenden bereits in [27] angegebenen Betrachtungen ist die Instanz (4.4) mit $t > -1$. Seien $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die Substitution $t := q/p - 1$ liefert eine äquivalente Instanz

$$\begin{aligned} E' := & (7; 48p + 3q; (22p + q, 18p + q, 16p + q, 15p + q, 14p + q, 13p + q, 12p + q)^T; \\ & (1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)^T). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Wird eine andere (2, 3)-Instanz E'' mit dem selben Ausgangsmaterial der Länge $w = 48p + 3q$ gewählt, dann können beide Instanzen verknüpft werden. War E'' geeignet gewählt, dann kann die zusammengesetzte (2, 3)-Instanz E ein Gap $\Delta > 1$ haben. Um dies zu erreichen, scheint die Forderung zweckmäßig zu sein, daß E'' ein kleines Gap, aber in Optimallösungen von (1.3) keinen großen Verschnitt aufweist, d. h. $z_M(E'') \approx z_D(E'') \wedge z_C(E'') < z_D(E'')$. Dazu eignen sich Instanzen, wie sie im Abschnitt 3.2 vorgestellt wurden.

Sei $u \in \mathbb{N}$. Für die mit (3.4), S. 39, festgelegte Instanz $E_0 = (2u + 1; 2^{2u+1} + 3; \mathbf{1}; \mathbf{e})$ gilt $z_C(E_0) = (6u + 4 + 2^{-2u-1})/9$. Vervielfachung des Bedarfsvektors mit 9 führt auf $E_1 := (2u + 1; 2^{2u+1} + 3; \mathbf{1}; 9\mathbf{e})$ mit $z_C(E_1) = 6u + 4 + 2^{-2u-1} = \lfloor z_C(E_1) \rfloor + 2^{-2u-1}$. Um $z_C \approx z_D$ zu erreichen, ist folglich $\mathbf{b} = (2^{2u+1} - 9)\mathbf{e}$ zu wählen. Die entstehende Instanz ergibt eine residuale Instanz E_2 mit $z_D(E_2) - z_M(E_2) = 2/(2^{2u+1} + 3)$. Da $48p + 3q$ für alle $p, q \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist, werden in E_2 noch alle Längen verdreifacht, um auf gleiche Längen w für das Ausgangsmaterial zu kommen. Das erfordert $16p + q = 2^{2u+1} + 3$.

Sei $u \geq 3$. In $E := E' \oplus E_2$ kommt die Eigenschaft $\Delta(E') = 1$ der Instanz (4.16) am besten zur Geltung, wenn $p = 2^{2u-3}$ und $q = 3$ gewählt wird, denn dann werden für festgelegtes w in E' alle Längen mit den größten möglichen Zahlen multipliziert, so daß eine um nur eine Einheit zu lange (unzulässige) oder zu kurze (verschnittreiche) Variante in E' um 2^{2u-3} Einheiten zu lang bzw. zu kurz wird. Für $u = 3$ ergibt sich $E_2 = (7; 131; (65, 49, 45, 44, 43, 41, 33)^T; (2, 2, 2, 1, 2, 1, 1)^T)$, also $E = (11; 393; (195, 179, 147, 135, 132, 131, 129, 123, 115, 107, 99)^T; (2, 1, 4, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 2)^T)$ mit dem Gap $1 + 1/128$. Die verschnittfreie Variante $2\mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^m$ kann einmal abgetrennt werden. Außerdem kann das größte Teil durch das zweitgrößte ersetzt werden, ohne IRUP zu erreichen. Dabei nimmt der optimale Zielfunktionswert von (1.6) ab, also das Gap zu. Nun können auch alle Teile um 2 und w um 6 verkürzt werden, ohne z_C und z_D zu beeinflussen. Das ergibt für $u = 3$ folgende (2, 3)-Instanz mit Gap $1 + 1/96$: $E_3 = (10; 387; (177, 145, 133, 130, 129, 127, 121, 113, 105, 97)^T; (3, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)^T)$

Im Falle $u < 3$ versagt die Konstruktion. Bei $u > 3$ können sogar noch größere Gaps gefunden werden, indem $\mathbf{b} := (2^{2u+1} - 3 * 4^{u-2} + 3)\mathbf{e} = (29 * 4^{u-2} + 3)\mathbf{e}$ in E_1 anstelle von $\mathbf{b} = (2^{2u+1} - 9)\mathbf{e}$ gesetzt wird. Die weiteren Konstruktionsschritte sind analog. Für $u = 4, 5, 6$ ergibt das die Nicht-IRUP-Instanzen

$$\begin{aligned} E_4 &= (12; 1539; (705, 577, 529, 517, 514, 513, 511, 505, 481, 449, 417, 385)^T; \\ &\quad (3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)^T); \\ E_5 &= (14; 6147; (2817, 2305, 2113, 2065, 2053, 2050, 2049, 2047, 2041, 2017, 1921, \\ &\quad 1793, 1665, 1537)^T; (3, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)^T); \\ E_6 &= (16; 24579; (11265, 9217, 8449, 8257, 8209, 8197, 8194, 8193, 8191, 8185, 8161, \\ &\quad 8065, 7681, 7169, 6657, 6145)^T); (3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)^T) \end{aligned}$$

mit $z_C(E_4) = 7 - 5/384$, $z_C(E_5) = 8 - 7/512$ und $z_C(E_6) = 9 - 85/6144$. Das sieht nach $\Delta(E_u) = 1 + (4^{u-2} - 1)/(18 * 4^{u-1})$ und $\lim_{u \rightarrow \infty} \Delta(E_u) = 1 + 1/72$ aus. Allerdings fehlt der Beweis für $u > 6$.

Ungerade Nenner wie in den Instanzen (3.5) können ebenfalls auf (2, 3)-Instanzen mit $\Delta > 1$ führen, z. B. $\Delta = 1 + 1/376$, aber der Aufwand ist erheblich und der Erfolg gering, weil $w - 2\ell_1 \approx w/6$ wird. Dieser Verschnitt ist zu groß.

Ist $3 * z_C \notin \mathbb{N}$, dann ist gemäß der Teilebilanz (3.6), S. 41, die Summe der Häufigkeiten aller 2-Teile-Varianten in einer Optimallösung von (1.3) für die (2, 3)-Instanz genau $y_C = 3 * z_C - \mathbf{e}^T \mathbf{b} > 0$. Ist der gebrochene Teil von z_C , also $\text{frac}(z_C)$, nahe 1, dann ist auch $\text{frac}(y_C) \approx 1$. Deshalb kann die Einführung noch größerer Teile des Typs 2 keinen Beitrag zur Reduktion des großen Verschnitts leisten, weil diese größten Teile ebenfalls in (2, 0)-Varianten geschnitten würden. Das Hinzufügen passender Typ-3-Teile mit der selben Absicht ist analog zur ausschließlichen Benutzung der Zweierpotenz-Nenner in z_C .

4.5.4 Gap 1,1 ohne Teile des Typs 1

Der erste Konstruktionssatz für große Gaps (Satz 4) ergab sehr große Gaps (bis zu $1 + 1/9$), wobei das erste Teil vom Typ 1 war. In diesem Unterabschnitt wird gezeigt, wie ein Gap $1 + 1/10$ auch ohne Typ-1-Teile konstruiert werden kann.

Analog zur Instanz (4.4), S. 66, wird in der Instanz (4.6) ein Parameter t eingeführt. Für $t > -17 \vee t \in (-19, -18)$ gilt dann auch $z_C(E_2(t)) = 2$ und $z_D(E_2(t)) = 3$ für die Instanz

$$E_2(t) := (5; 75 + 3t; (29 + t, 28 + t, 25 + t, 23 + t, 19 + t)^T; (1, 1, 2, 1, 1)^T). \quad (4.17)$$

Bei $t \in (-19, -18)$ kann das kleinste Teil weggelassen werden, ohne z_C und z_D zu beeinflussen. Bei $t = -19$ ergibt sich die Instanz $(4; 18; (10, 9, 6, 4)^T; (1, 1, 2, 1)^T)$ mit dem selben Gap 1. Für $t \rightarrow \infty$ gehen in den Instanzen (4.4) und (4.17) alle Teilleängen gegen $w/3$.

Die ganzzahlige Zuschnittaufgabe (1.3) besitzt u. a. eine Optimallösung, in der eins der Teile gesondert geschnitten wird, während in einer anderen Variante ein Verschnitt bleibt, der fast genau so groß ist wie das gesondert zugeschnittene Teil. Für große t

bedeutet das, daß in einer Variante noch ungefähr $w/3$ und in einer anderen etwa $2w/3$ frei sind. Ob das größte oder das kleinste Teil von $E(t)$ bzw. $E_2(t)$ abgesondert wurde, ist nicht festgelegt, so daß das Wort „ungefähr“ im vorigen Satz Abweichungen in beide Richtungen zuläßt. Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wenn es gelingt, eine andere Instanz E' mit positivem Gap zu finden, in welcher Restlängen von $w * (\varepsilon + 1/3)$ und $w * (\varepsilon + 2/3)$ nur schlecht ausgenutzt werden können, dann besteht die Chance, daß für die zusammengesetzte Instanz $E(t) \oplus E'$ bzw. $E_2(t) \oplus E'$ das Gap $1 + \Delta(E')$ wird.

Beispiel: $E' := (2; 1; (1/2, 1/5)^T; (1, 2)^T)$ ergibt Gap 0,1, aber es ist nicht möglich, die Teile in je einer Restlänge $1/3$ bzw. $2/3$ unterzubringen, denn $0,5 > 1/3$, $2 * 0,2 > 1/3$ und $0,5 + 0,2 > 2/3$. Es kommt also nur noch darauf an, den Parameter t in (4.4) bzw. (4.17) so groß zu wählen, daß tatsächlich keine derartige Variante zulässig wird. Wird $30|w$ verlangt, dann ist $t = 33$ in (4.4) bzw. $t = 45$ in (4.17) der kleinste geeignete Wert, so daß folgende zusammengesetzte Instanzen des 1CSPs ohne Typ-1-Teile mit Gap $\Delta = 1,1$ und $z_M = z_C = 3,9$ bzw. $z_M < z_C = 2,9$ entstehen:

$$\begin{aligned} & (9; 150; (75, 56, 52, 50, 49, 48, 47, 46, 30)^T; (1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2)^T) \quad \text{bzw.} \\ & (7; 210; (105, 74, 73, 70, 68, 64, 42)^T; (1, 1, 1, 2, 1, 1, 2)^T) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Man kann sich überzeugen, daß wenn $\ell_1 + \ell_{m-1} + \ell_m > w$ falsch wäre, diese angegebenen Instanzen IRUP hätten und deshalb t nicht kleiner gewählt werden durfte. \triangleleft

Die Anwendung des ersten Konstruktionssatzes für große Gaps (Satz 4) mit $p = q = 2$ auf beide Beispiele ergab für das Gap mehr als die bisher mit diesem Satz in [26] angegebenen $10/9$, nämlich jeweils $39/35 \approx 1,1143$, z. B. in der Instanz

$$(10; 842; (422, 421, 338, 210, 148, 146, 140, 136, 128, 84)^T; (3, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 2)^T). \quad (4.19)$$

Restlängen von $w/3$ bzw. $2w/3$ mit vorgegebenen Teilen nicht gut ausnutzen zu können, ergibt sich auch, wenn man sich vorstellt, zweimal die Restlänge $2w/3$ zur Verfügung zu haben und daß in einer Nicht-IRUP-Instanz mit $z_C < 2$, die ein Teil der Länge $w/2$ enthält, alle Längen mit $2/3$ multipliziert werden, aber das führte auf schlechtere Gaps.

Eine andere Aufteilung als $1/3$ und $2/3$ zur Konstruktion großer Gaps kann mit Instanzen wie (4.7) vorgenommen werden, wobei in (4.7) auch $p > q$ erlaubt sei. Angenommen, das kürzeste Teil in (4.7) hätte die Länge $s * w$ mit $0 < s < 1/3$ bei sehr großen p und q . Es gibt einen Zuschnittplan, in dem dieses kleinste Teil separat geschnitten wird (Verschnitt $(1 - s) * w$) und dafür in einer anderen Variante etwa die Restlänge $s * w$ frei bleibt. Alternativ können zwei der kleinen Teile in eine Variante gepackt werden (Verschnitt etwa $(1 - 2s) * w$), während das größte Teil separat geschnitten wird (Verschnitt etwa $2s * w$). Somit sind zwei unterschiedliche Aufteilungen zu beachten: $1 - s$ und s oder $1 - 2s$ und $2s$. Aus diesem Grunde waren die erreichten Gaps doch nicht größer.

4.5.5 Der zweite Konstruktionssatz für große Gaps

In diesem Unterabschnitt wird auf der Grundlage zusammengesetzter Instanzen ein weiterer Konstruktionssatz für große Gaps erarbeitet, mit dem noch bedeutend größe-

re Gaps als mit Satz 4 erreicht werden können, allerdings unter einer sehr strengen Voraussetzung, vgl. [27]. Als Ausgangspunkt dient dazu die Instanz (4.7), S. 71, die mit einer weiteren Instanz $E_1 = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ verknüpft werden soll, so daß $\Delta(E_0(p, q) \oplus E_1) = 1 + \Delta(E_1)$ wird, wenn p und q geeignet gewählt werden.

Beispiel: $E_1 := (2; w; (w/2, w/5)^T; (1, 2)^T)$ besitzt das Gap 0,1. Mit der Schablonen-Instanz (4.7) wird nun eine (1, 5)-Instanz konstruiert, indem $r := 1/6$ und $s := 1/5$ in (4.11) gesetzt wird. Die kleinsten $p, q \in \mathbb{N}$, die das System (4.11) erfüllen und auf eine durch 10 teilbare Länge $w = 37 + 3p + q$ führen, sind $p = 27$ und $q = 72$. Somit ergibt $E_0(27, 72) \oplus E_1$ die Instanz

$$(10; 190; (124, 120, 118, 95, 38, 36, 35, 34, 33, 32)^T; (1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1)^T) \quad (4.20)$$

mit $z_C = z_M = 3,9$ und $z_D = 5$. Obwohl die Teile der Länge $w/5$ mit den Typ-1-Teilen kombiniert werden können, nützt das für die Aufgabe (1.3) gar nichts, denn alle kleinen Teile haben den Typ 5, so daß drei beliebige von ihnen nicht mit einem Teil der Länge $w/2$ kombiniert werden können. Außerdem ist $w/5 \geq \ell'_i$ für $i > 4$, so daß es keine besseren Kombinationsmöglichkeiten mit den Teilen der Typen 1 und 2 gibt. Im allgemeinen ergibt sich aber bei derartigen Konstruktionen dennoch IRUP. Man kann übrigens zur Instanz (4.20) drei Teile der Länge $w/3$ hinzufügen und danach den ersten Konstruktionssatz mit $p = 2$ und $q = 6$ anwenden, was wie im vorigen Unterabschnitt ein Gap 39/35 ergibt, allerdings mit mehr Teilen. \triangleleft

Um IRUP für $E_0(p, q) \oplus E_1$ zu verhindern, werden in E_1 Teile, die mit einem der Typ-1-Teile von $E_0(p, q)$ kombinierbar sind, verboten. Hinreichend dafür ist $\ell'_i \geq 2s * w$ für alle Teile ℓ'_i von E_1 . Außerdem wird gefordert, daß bei Hinzufügung eines beliebigen Teils aus $E_0(p, q)$ zu E_1 der optimale Zielfunktionswert von (1.3) für E_1 zunimmt.

Für eine beliebige Instanz E ist

$$J_D(E) := \{j \in J \mid \exists \text{ Optimallösung } \mathbf{x}^D \text{ des Problems (1.3) mit } \mathbf{x}_j^D > 0\}$$

die Indexmenge der für Optimallösungen von (1.3) relevanten Varianten. Der größtmögliche Verschnitt in einer Variante, die in einer Optimallösung von (1.3) für E_1 in positiver Häufigkeit verwendet werden kann, ist dann

$$V(E) := w - \min_{j \in J_D(E)} \{\mathbf{l}^T \mathbf{a}^j\}, \quad (4.21)$$

d. h. wenn ein Teil der Länge $V(E)$ zu E hinzugefügt wird, ändert sich der optimale Zielfunktionswert von (1.3) für E nicht. Das gilt aber nicht mehr, sobald $V(E)$ überschritten wird.

Damit ergibt sich die weitere Bedingung $V(E_1) < r * w$. Das kürzeste Teil von E_1 besitze die Länge ℓ'_m . Zusammen mit der Bedingung $\ell'_m \geq 2s * w$ und $r < s$ ergibt das $V(E_1) < r * w < s * w \leq \ell'_m/2$, eine sehr einschneidende Forderung. Es folgt der zweite Konstruktionssatz für große Gaps.

SATZ 5: In der Instanz $E_1 = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ besitze das kürzeste Teil die Länge $\ell'_m \leq w/2$, und es gelte $V(E_1) < \ell'_m/2$. Es werden $r := V(E_1)/w$ und $s := \ell'_m/(2w)$ gesetzt. Dann gibt es $p, q \in \mathbb{N}$, die das System (4.8), S. 71, befriedigen, und für jede derartige Wahl von p und q besitzt die Instanz $E := E_0(p, q) \oplus E_1$ das Gap $\Delta(E) = 1 + \Delta(E_1)$. Dabei ist $E_0(p, q)$ die Instanz (4.7).

Beweis: Wegen $V(E_1) < \ell'_m/2 \leq w/4$ gilt $r < 1/4$. Die Existenz der entsprechenden p und q wurde bereits im Abschnitt 4.3 gezeigt. Es sind nur noch $z_C(E)$ und $z_D(E)$ zu diskutieren.

In $E_0(p, q)$ gilt $\ell_3 = w - 2\ell_5 > w - 2*s*w = w - \ell'_m$ wegen der Bedingungen (4.8), so daß in E die drei größten Teile von $E_0(p, q)$ mit keinem der Teile aus E_1 kombiniert werden können. Nähme man aus $E_0(p, q)$ ein Teil heraus, welches nicht vom Typ 1 ist, dann bliebe weiterhin $z_C(E_0(p, q)) = 3$, denn es gab drei Typ-1-Teile. Es folgt $z_C(E) = 3 + z_C(E_1)$. Aufgrund der Voraussetzung an $V(E_1)$ kann kein Teil aus $E_0(p, q)$ zu E_1 hinzugefügt werden, ohne den optimalen Zielfunktionswert von (1.3) für E_1 zu erhöhen. Da aber $E_0(p, q)$ selbst keine IRUP-Instanz ist, folgt $z_D(E) = 4 + z_D(E_1)$. Aus $\Delta = z_D - z_C$ folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 11: Die Voraussetzung $\ell'_m \leq w/2$ kann auch durch $\ell'_m \leq 2w/3$ ersetzt, aber nicht gestrichen werden. Jedoch wären in E_1 alle Teile vom Typ 1, wenn $\ell'_m > w/2$ wäre, und E_1 hätte das Gap 0. Dieser Fall ist uninteressant.

Beispiel: Sei $E_1 := (7; 131; (65, 49, 45, 44, 43, 41, 33)^T; (2, 2, 1, 1, 2, 1, 2)^T)$ mit $z_C(E_1) = 4 - 13/128$ und $V(E_1) = 13 < 33/2$ gegeben. Es werden $r := 13/131$ und $s := 33/262$ gesetzt. Aus der notwendigen Bedingung (4.10) folgt $p > 69/7$, also $p \geq 10$. Das System (4.8) besitzt u. a. die Lösung $p = 22$, $q = 159$, welche auf eine durch 131 teilbare Länge w führt. Das ergibt

$$E = (16; 262; (206, 202, 200, 130, 98, 90, 88, 86, 82, 66, 33, 31, 30, 29, 28, 27)^T; \\ (1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)^T), \quad \Delta = 1 + 13/128.$$

Die Längen können noch verkürzt werden, ohne das Gap zu ändern. \triangleleft

Wird E_1 mit höheren Zweierpotenzen im Nenner von $z_C(E_1)$ gewählt, vereinfacht sich die Wahl von p und q . Dies gilt z. B. für die Instanz

$$(22; 8195; (6157, 6153, 6151, 4097, 3073, 2817, 2753, 2737, 2733, 2732, \\ 2731, 2729, 2721, 2689, 2561, 2049, 1024, 1022, 1021, 1020, 1019, 1018)^T; \\ (1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)^T), \quad \Delta = 9/8 - 2^{-13} \approx 1,1249.$$

Auf diese Weise können Gaps nahe $9/8$ erzielt werden. E_1 kann selbst wieder eine zusammengesetzte Instanz sein, etwa aus einer Nicht-IRUP-(2, 3)-Instanz und einer IRUP-(2, 3)-Instanz, die das Gap erhöhen soll. Für diesen Zweck sind Instanzen analog denen aus dem Unterabschnitt 4.5.3 geeignet, z. B.

$$E_1 := (17; 24579; (12289, 11265, 9217, 8449, 8257, 8209, 8197, 8194, 8193, 8191, 8185, \\ 8161, 8065, 7681, 7169, 6657, 6145)^T; (2, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 3)^T),$$

$z_C(E_1) = 9,875 - 85/8192 \approx 9,8646$. Diese Instanz wurde aus (4.16) mit $p = 512$ und $q = 1$ sowie einer Instanz analog (3.4) für $u = 6$, aber mit dem Bedarfsvektor $(2, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2)^T$, zusammengesetzt. Satz 5 ergibt

$$E = (26; 24579; (18447, 18443, 18441, 12289, 11265, \dots, 6657, \\ 6145, 3071, 3069, 3068, 3067, 3066, 3065)^T; \\ (1, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1)^T)$$

mit $z_C(E) \approx 12,8646$ und $z_D(E) = 14$, also $\Delta(E) = 9/8 + 85/8192 \approx 1,1354$. Um noch größere Gaps zu erzeugen, werden die Teile geeignet verkürzt, während Teil 4 gestrichen wird. Dies muß geschehen, weil sonst die Variante $2\mathbf{e}^4$, die in der Optimallösung von (1.6) benutzt worden war, unzulässig würde. Es entsteht die Instanz

$$(25; 22308; (16928, 16924, 16922, 10508, 8460, 7692, 7500, 7452, 7440, 7437, 7436, 7434, 7428, 7404, 7308, 6924, 6412, 5900, 5388, 2695, 2693, 2692, 2691, 2690, 2689)^T; (1, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T)$$

mit $z_C = 11 + 6571/7680 \approx 11,8556$ und $z_D = 13$, also $\Delta = 1 + 1109/7680 \approx 1,1444$. Das sieht nach $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta = 1 + 13/90 = 1,1\bar{4}$ für diese spezielle Familie aus.

Im Gegensatz zum ersten Konstruktionssatz für große Gaps kann Satz 5 auf eine vorgegebene Instanz kaum wiederholt angewendet werden. Die Voraussetzung $V(E_1) < \ell'_m/2$ ist sehr schwer zu erfüllen, sobald größere Gaps angestrebt werden, denn wenn ein kleines Teil aus einer Variante \mathbf{a}^1 in eine andere Variante \mathbf{a}^2 verschoben werden kann, wird der Verschnitt in der Variante \mathbf{a}^1 etwa die Größe des verschobenen Teils haben, wenn nicht noch mehr.

4.5.6 Konstruktion eines Gaps 7/6

Im vorigen Unterabschnitt wurde schon angedeutet, wie eine Instanz E_1 gefunden werden kann, die die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt. Dies wird auch hier praktiziert [27]. Dazu werden zu einer Nicht-IRUP-(2, 3)-Instanz $E_2 = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ mit $\ell_1 > \dots > \ell_m$ noch zwei Teile mit den Längen $w/2$ und $w/3$, beide Teile jeweils in der Bedarfszahl 1, hinzugefügt. Wenn es eine verschnittfreie Variante $2\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^m$ gibt, dann erscheint die Instanz ungeeignet, denn die Variante, die nur aus den Teilen der Längen ℓ_i und $w/2$ besteht, ergibt den Verschnitt $\ell_m/2$ und nicht weniger. Es ist nicht zu erwarten, daß diese Variante für Optimallösungen von (1.3) irrelevant ist. Aussichtsreich wird die Konstruktion, wenn in Optimallösungen von (1.6) für E_2 nur (1, 2)-Varianten benutzt werden. So eine Instanz ist z. B.

$$(9; 75; (35, 31, 29, 25, 23, 22, 21, 20, 19)^T; \mathbf{e}); \quad z_M = z_C = 3, \quad z_D = 4.$$

Wegen $75/2 - 35 = 5/2$; $75 - 31 - 25 - 19 = 0$; $75 - 29 - 25 - 21 = 0$ und $75 - 23 - 22 - 20 = 10 \geq 19/2$ ist diese Instanz nicht als E_2 verwendbar. Eine kleine Änderung wird betrachtet:

$$E_1 := (11; 75+t; (w/2, 35+t, 31+t, 29+t, 25, w/3, 23, 22, 21, 20, 19)^T; \mathbf{e}), \quad -2 < t < -\frac{1}{2}$$

mit $z_M(E_1) = z_C(E_1) = 4 - 1/6$ und $z_D = 4$. Hier ergibt sich als größter Verschnitt $V(E_1) = \max\{10+t, 8,5-t/2\} < 19/2$, so daß Satz 5 angewendet werden kann. $V(E_1)$ wird für $t = -1$ minimal. Wird Teil 5 auf $w/3$ verkürzt, ändert sich $V(E_1)$ nicht. Es wird $t := -1$, $r := 9/74$ und $s := 19/148$ gesetzt. Aus der notwendigen Bedingung (4.10) folgt $p > 67$ und $w = 37 + 3p + q \geq 309$. Die nächste durch 74 teilbare Zahl ist 370, so daß alle Längen in E_1 verfünffacht werden sollten, jedoch reicht das nicht zur Erfüllung des Systems (4.8). Wenigstens der Faktor 11 ist erforderlich. Die Wahl von

$p := 95$ ergibt nach Abrundung der Länge $w/3$ auf 271 die Instanz

$$E = (19; 814; (612, 608, 606, 407, 374, 330, 308, 271, 253, 242, 231, 220, 209, 106, 104, 103, 102, 101, 100)^T; (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T)$$

mit $z_C(E) = 6 + 5/6$ und $z_D = 8$. Eine andere Instanz mit nur 18 verschiedenen Teilen, sehr „glatten“ Längen, $z_M = z_C = 6 + 5/6$ und $z_D = 8$ entstand ausgehend von $t = -9/7$ mit ein wenig mehr Arbeit und einigem Probieren:

$$(18; 1500; (1110, 1106, 1104, 750, 680, 600, 580, 500, 460, 450, 420, 410, 200, 198, 197, 196, 195, 194)^T; (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1)^T) \quad (4.22)$$

Man kann auch $w = 600$ erreichen, ohne z_M , z_C oder z_D zu ändern, indem alle Längen mit 0,4 multipliziert und anschließend alle Längen ℓ_i mit $i \in \{1, 2, 3, 14, 15, \dots, 18\}$ entsprechend angepaßt werden. Eine andere Möglichkeit, die Längen ohne Beeinflussung von z_M , z_C und z_D zu variieren, besteht darin, eine (ggf. auch negative) Zahl $u \in \mathbb{Z}$ zu wählen und $6u$ zu w sowie $u * (4, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ zu 1 zu addieren. u darf aber nicht zu klein sein, sonst entsteht IRUP.

4.5.7 Konstruktion eines Gaps 1,2

Anstelle einer Herleitung sei zuerst eine Instanz mit $z_M < z_C = 11,8$ und $z_D = 13$, also $\Delta = 6/5$ angegeben:

$$(32; 1500; (1214, 1210, 1208, 910, 906, 904, 774, 770, 768, 504, 503, 500, 498, 494, 368, 366, 365, 364, 363, 362, 300, 298, 297, 296, 295, 294, 148, 146, 145, 144, 143, 142)^T; \mathbf{e} + \mathbf{e}^{12} + 4\mathbf{e}^{21}) \quad (4.23)$$

Der optimale Zielfunktionswert z_E der Relaxation (1.7) beträgt für diese Instanz $11 + 13/15$. Wird der Vektor der Bedarfszahlen durch $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 3, 2, 1, 3, 3, 1, 3, 1, 5, 3, 3, 1, 3, 1, 1, 3, 3, 1, 3, 1)^T$ ersetzt, dann ergibt sich $z_C = z_E = 23,8$, $z_D = 25$.

Die Instanz (4.23) entstand durch Zusammensetzung von vier Teilen der Länge $w/5$, mehreren Teilinstanzen der Form (4.7), S. 71, und einer Instanz (4.17), S. 78, mit $t = 475$. Ohne die Teile 1–3 und 27–32 hätte die Instanz (4.23) das Gap 0,2 und erfüllte die Verschnittbedingung von Satz 5. Dies nachzuweisen, ist nur mit Rechnerhilfe möglich, z. B. mit Schnittebenenverfahren. Eine Plausibilitätsüberprüfung von Hand kann jedoch wie folgt vorgenommen werden:

Die Teile 7–9 und 15–20 stammen aus einer Instanz (4.7) mit $p : w \approx 11 : 45$, während die Teile 4–6 und 21–26 in einer Instanz (4.7) mit $p : w \approx 9 : 45$ vorkommen. Die Längen der Teile 10–14 verhalten sich zur Länge des Ausgangsmaterials annähernd wie $15 : 45$. Wenn nun alle annähernd gleich langen Teile als tatsächlich gleich betrachtet werden, entsteht eine Modellinstanz

$$E_M = (5; 45; (27, 23, 15, 11, 9)^T; (3, 3, 6, 6, 10)^T)$$

mit der Zusatzbedingung, daß die Variante $3\mathbf{e}^3$ höchstens einmal und die ebenfalls verschnittfreien Varianten $\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^5$ und $\mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^4$ jeweils höchstens zweimal benutzt

werden dürfen. Wegen $V(E_M) = 4 < 9/2$ versprechen hinreichend große Parameter in den Instanzen (4.7) und (4.17) bei Einhaltung der Verhältnisse aus E_M Erfolg.

Mit diesem Ansatz entstand auch die Instanz

$$(34; 2700; (2180, 2176, 2174, 1640, 1632, 1628, 1392, 1384, 1380, 912, 904, 900, 898, 896, 894, 892, 664, 660, 658, 656, 654, 652, 540, 536, 534, 532, 530, 528, 265, 263, 262, 261, 260, 259)^T; \mathbf{e} + \mathbf{e}^{11} + \mathbf{e}^{12} + 4\mathbf{e}^{23})$$

mit $z_M = z_C = 12,8$ und $z_D = 14$, wobei die Teilinstanz (4.4), S. 66, anstelle (4.17) als Baustein diene.

Die Konstruktion noch größerer Gaps gelang bisher nicht. Falls es überhaupt Instanzen des 1CSPs mit Gap $4/3$ gibt, scheint ein anderer Ansatz erforderlich zu sein, denn der Verschnitt von etwa $w/3$, der aus einer Teilinstanz resultierte, würde zumindest teilweise mit einem kleineren Teil, etwa mit der Länge $w/4$, ausgefüllt werden. Dieses hinterlässe in einer der ursprünglich für eine andere Teilinstanz geplanten verschnittfreien oder -armen Varianten eine Lücke, die wieder mit einem etwas kleineren Teil, z. B. mit der Länge $w/5$, genutzt werden könnte usw., so daß $V(E_1)$ fast so groß wäre wie das kleinste in E_1 vorhandene Teil. Damit wäre die Verschnittbedingung von Satz 5 grob verletzt.

4.5.8 Eine Modifikation des zweiten Konstruktionssatzes

Die Verschnitt-Voraussetzung von Satz 5 ist oft nur schwer zu erfüllen. Unter Benutzung der Schablonen-Instanz (4.7), S. 71, wird in diesem Unterabschnitt noch eine alternative Konstruktion angegeben. Dazu sei eine Instanz $E_1 = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ mit $\ell_1 > \ell_2 > \dots > \ell_{m-1} > 2\ell_m$ und $\ell_m \leq w/4$ gegeben. Erhöht man b_m in E_1 um 1, dann soll der optimale Zielfunktionswert von (1.3) zunehmen. Es wird gezeigt, daß es geeignete $p, q \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $E := E_0(p, q) \oplus E_1$ das Gap $1 + \Delta(E_1)$ hat.

Beispiel: Die Instanz $E_{ST} = (3; 132; (44, 33, 12)^T; (2, 3, 6)^T)$ aus [28] besitzt das Gap $1 + 5/132$. Wird einmal das kleinste Teil weggenommen, dann erfüllt die erhaltene Instanz $E_1 = (3; 132; (44, 33, 12)^T; (2, 3, 5)^T)$ die Voraussetzungen des ersten Absatzes, und es gilt $\Delta(E_1) = 17/132$ sowie $V(E_1) = 11$ mit der Bezeichnung (4.21). Alle Längen werden mit 7 vervielfacht. Wird nun $p := 7 * 12 - 11 = 73$ in der Instanz (4.7) eingesetzt, so hat das kürzeste Teil in $E_0(73, 7 * 132 - 37 - 3 * 73)$ die Länge $p+5 = 78 > 7*V(E_1)$, so daß keins der Teile aus $E_0(73, 668)$ zu E_1 hinzugefügt werden könnte, ohne für E_1 den optimalen Zielfunktionswert von (1.3) zu erhöhen. Obwohl es einige zulässige Varianten gibt, die auf einem Austausch der kürzesten Teile zwischen $E_0(73, 668)$ und E_1 beruhen, hat das für die ganzzahlige Optimierungsaufgabe (1.3) keinen Nutzen. Die entstehende Instanz

$$E = (11; 924; (766, 762, 760, 308, 231, 84, 82, 81, 80, 79, 78)^T; (1, 1, 1, 2, 3, 6, 1, 1, 1, 1, 1)^T) \quad (4.24)$$

hat ein Gap $\Delta(E) = 1 + 17/132 \approx 1,1288$ sowie $z_D(E) = 6$. Dieses Konstruktionsprinzip, das auch der Instanz (4.20) zugrunde lag, kann verallgemeinert werden. <

Aussage 22: Für jede Instanz $E_1 = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ des 1CSPs, die die Voraussetzungen des ersten Absatzes erfüllt, gibt es $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\Delta(E_0(p, q) \oplus E_1) = 1 + \Delta(E_1)$.

Beweis: Es gibt ein $\lambda \in (0, \ell_m)$, so daß E_1 bei Ersetzung von ℓ_m durch λ in eine äquivalente Instanz übergeht. Es werden $s := \ell_m/w$ und $r := \lambda/w < 1/4$ gesetzt. Laut Abschnitt 4.3 gibt es $p, q \in \mathbb{N}$, die das System (4.11), S. 71, erfüllen. Nach Voraussetzung an E_1 kann keins der Teile 1 bis $m-1$ von E_1 mit den Typ-1-Teilen von $E_0(p, q)$ kombiniert werden, denn diese sind länger als $w*(1-2s) = w-2\ell_m > w-\ell_{m-1}$. Obwohl Teil m von E_1 mit den langen Teilen von $E_0(p, q)$ kombinierbar ist, bringt das für die Aufgabe (1.3) nichts, denn Teil m ist mindestens so lang wie jedes der kurzen Teile von $E_0(p, q)$. Umgekehrt kann kein Teil aus $E_0(p, q)$ zu E_1 hinzugefügt werden, ohne den optimalen Zielfunktionswert von (1.3) zu erhöhen. Selbst ein Austausch mehrerer Teile von $E_0(p, q)$ durch gleich viele Teile m aus E_1 , sofern diese überhaupt in ausreichender Anzahl vorhanden sind, ändert daran nichts, denn alle Teile aus $E_0(p, q)$ sind länger als λ , und λ war so festgelegt worden, daß auch bei kompletter Ersetzung des Teils m durch Teile der Länge λ keine Variante hinzukommt. Daraus folgt $\Delta(E) \geq \Delta(E_1) + 1$. Da die Austauschmöglichkeiten der kürzesten Teile zwischen $E_0(p, q)$ und E_1 auch für die relaxierte Optimierungsaufgabe (1.6) keinen Nutzeffekt haben, ist das Gap wie behauptet. \square

Bemerkung 12: 1. Wird $b_m = 0$ zugelassen, dann werden genau die Voraussetzungen des zweiten Konstruktionssatzes von E_1 gefordert. In diesem Sinne stellt Aussage 22 eine Verallgemeinerung von Satz 5 dar, allerdings ist hier nur die Existenz geeigneter p und q für die Instanz (4.7) gezeigt worden, nicht deren praktische Bestimmung.

2. Es kann vorkommen, daß jedes mögliche λ , das im Beweis von Aussage 22 verwendet werden kann, größer ist als $V(E_1)$. Das liegt an den Austauschmöglichkeiten der kürzesten Teile zwischen $E_0(p, q)$ und E_1 .

3. Die Voraussetzung $\ell_m \leq w/4$ kann in $\ell_m \leq w/3$ abgeschwächt werden, wenn im Falle $1/4 < \ell_m/w \leq 1/3$ die Instanz (4.4) oder (4.17) anstelle (4.7) benutzt wird. Dabei ist t hinreichend groß zu wählen. Wegen $\ell_1 > \dots > \ell_{m-1} > 2\ell_m$ müßten aber die Teile 1 bis $m-1$ vom Typ 1 sein, und E_1 hätte das Gap 0. Dieser Fall ist uninteressant.

Obige Idee kann auch mit der Zusammensetzung von Teilinstanzen kombiniert werden:

$$E := (15; 1320; (1090, 1086, 1084, 444, 443, 440, 438, 434, 330, 120, 118, 117, 116, 115, 114)^T; \mathbf{e} + \mathbf{e}^6 + 2\mathbf{e}^9 + \mathbf{e}^{10}) \quad (4.25)$$

mit $z_M < z_C = 5 + 37/44$, $z_D = 7$ und $\Delta = 51/44 \approx 1,1591$ entstand, indem zunächst in E_{ST} einzelne Teile ersetzt wurden. Dort war $2*44+4*12 > 132$. Wird anstelle dieser Teile die Instanz (4.17) verwendet, wobei zuvor sämtliche Längen mit einer hinreichend großen Zahl multipliziert wurden, dann erhöht sich das Gap von $137/132$ auf $47/44$. Entfernt man einmal das kürzeste Teil, dann sind die Voraussetzungen von Aussage 22 erfüllt. Die weiteren Konstruktionsschritte sind dann analog zur Instanz (4.24) durchzuführen. In diesem Sinne kann auch die Instanz (4.18) aus der FIELDHOUSE-Instanz E_F konstruiert werden, obwohl dort die Voraussetzungen von Aussage 22 nicht erfüllt sind.

Die Fortführung des Gedankens zur Konstruktion der Instanz (4.25) führte auf die nachstehende Instanz E mit $z_M < z_C = 97/11$, $z_D = 10$ und $\Delta = 13/11 \approx 1,1818$. Dabei wurden zur Instanz E_{ST} zunächst noch 11 Teile der Länge $w/11$ hinzugefügt und anschließend die Teile der Länge $w/4$ und drei Teile der Länge $w/11$ durch solche

Teile ersetzt, die denen der Instanz (4.7), S. 71, ähneln.

$$E = (23; 1815; (1495, 1491, 1489, 913, 909, 907, 609, 608, 605, 603, 599, 456, 454, 453, 452, 451, 450, 165, 163, 162, 161, 160, 159)^T; \mathbf{e} + \mathbf{e}^9 + 9\mathbf{e}^{18}) \quad (4.26)$$

4.6 Früher bekannte Beispiele mit großen Gaps

Im folgenden werden einige Instanzen des 1CSPs mit Gap größer als 1 angegeben, die schon früher gefunden worden waren. Die Aufstellung erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit:

1. $(3; 30; (15, 10, 6)^T; (21, 32, 54)^T)$, $z_C = z_M = 32 - 1/30$, $\Delta = 1 + 1/30 \approx 1,0333$, [8];
2. $(3; 132; (44, 33, 12)^T; (2, 3, 6)^T)$, $z_C = z_M = 2 - 5/132$, $\Delta = 1 + 5/132 \approx 1,0379$, [28]. Keine Instanz des Teilbarkeitsfalls mit noch größerem Gap ist bisher bekannt.
3. $(6; 10000; (4500, 4350, 4325, 3250, 1350, 1175)^T; (3, 1, 2, 2, 3, 1)^T)$, $z_C = 4 - 5/96$, $\Delta = 1 + 5/96 \approx 1,0521$, [40];
4. $(5; 10000; (5000, 4100, 3950, 1960, 1100)^T; (1, 1, 1, 2, 2)^T)$, $z_C = 2 - 1/18$, $\Delta = 1 + 1/18 \approx 1,0556$, [20]. Diese Instanz fand C. NITSCHKE ebenso wie die folgende, als er für seine Diplomarbeit Testrechnungen zu den Relaxationen (1.6) und (1.7) bzw. der um zusätzliche obere Schranken für verwendete Varianten verschärften Relaxation durchführte.
5. $(6; 10000; (5000, 4075, 4050, 3250, 1900, 1000)^T; (1, 2, 1, 2, 2, 1)^T)$, $z_C = 3 - 2/33$, $\Delta = 1 + 2/33 \approx 1,0606$, [20];
6. $(5; 10000; (5000, 3750, 3250, 3001, 2000)^T; (1, 1, 1, 1, 2)^T)$, $z_C = 29/15$, $\Delta = 1 + 1/15 \approx 1,0667$, [40]

Zusammen mit den Instanzen (4.12), (4.18), (4.15), (4.19), (4.24), (4.25), (4.22), (4.26) und (4.23) ergibt sich die folgende Tabelle der größten bisher gefundenen Gaps bei beschränkter Anzahl m verschiedener Teilleängen:

m	1	3	5	6	7	8	10	11	15	18	23	32
$\Delta - 1$	< 0	$5/132$	$1/15$	$3/35$	$1/10$	$1/9$	$4/35$	$17/132$	$7/44$	$1/6$	$2/11$	$1/5$

4.7 Beispiele mit ganzzahligen Daten und besonders kurzer Ausgangslänge

Dieser Abschnitt enthält eine Zusammenstellung von Nicht-IRUP-Instanzen mit besonders kleinen ganzzahligen Längen, um noch einmal zu zeigen, daß durchaus derartige Beispiele in der Praxis vorkommen können:

$$E_F = (3; 30; (15, 10, 6)^T; (1, 2, 4)^T), \quad z_M = z_C = 59/30, \quad z_D = 3;$$

$$\begin{aligned}
E_1 &= (4; 18; (9, 7, 6, 4)^T; (1, 1, 2, 2)^T), & z_M = z_C = 2, & z_D = 3; \\
E_2 &= (4; 18; (10, 9, 6, 4)^T; (1, 1, 2, 1)^T), & z_M = 35/18, & z_C = 2, z_D = 3; \\
E_3 &= (5; 16; (10, 8, 7, 3, 2)^T; (1, 1, 1, 1, 2)^T), & z_M = z_C = 2, & z_D = 3.
\end{aligned}$$

E_1 kann aus der Nicht-IRUP-Instanz $E_4 = (5; 36; (18, 14, 12, 11, 8)^T; (1, 1, 1, 1, 2)^T)$ mit $z_C(E_4) = z_M(E_4) = 2 - 1/36$ erhalten werden, indem man alle Längen halbiert und dabei aufrundet. E_F ist von FIELDHOUSE [8]. Für vorgegebenes $m \in \mathbb{N}$ sind bis jetzt keine Nicht-IRUP-Instanzen $(m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ mit $\mathbf{l} \in \mathbb{N}^m$ und kleinerem $w \in \mathbb{N}$ bekannt.

Aussage 23: Ist $E = (m; w; \mathbf{l}; \mathbf{b})$ eine Nicht-IRUP-Instanz des Teilbarkeitsfalls mit $\mathbf{l} \in \mathbb{N}^m$, dann ist $w \geq 30$.

Beweis: Sei $w = \text{kgV}(\ell_1, \dots, \ell_m)$. Angenommen, es wäre $w < 30$. Ohne Besorgnis darf angenommen werden, daß E eine residuale Instanz ist, in der keine eigentliche, verschnittsfreie Variante abgetrennt werden kann und keine Zusammenfassung mehrerer Teile zu einem größeren unter Beibehaltung des Teilbarkeitsfalls möglich ist. Wegen $2 * 3 * 5 = 30$ dürften höchstens zwei verschiedene Primfaktoren p_1, p_2 in w auftreten. Sei $w = p_1^{q_1} * p_2^{q_2}$ mit $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ und den Primzahlen $p_1 < p_2$, ggf. mit $q_2 = 0$.

1. Fall: $w = p_1^{q_1}$. Aus der Annahme bezüglich E folgt $b_i < p_1 \ \forall i \in I$ und $z_M \leq \sum_{i=0}^{q_1-1} \frac{p_1 - 1}{w} * p_1^i = \frac{p_1^{q_1} - 1}{w} < 1$, also IRUP.

2. Fall: $w = p_1^{q_1} * p_2^{q_2}$ mit $q_1, q_2 > 0$. Die Argumentation aus dem Beweis von Satz 1, S. 29 ff, bezüglich Produkten zweier Primzahlpotenzen kann nun entsprechend wiederholt werden. Diese ergibt $z_D \leq 2$, folglich IRUP. \square

E_2 ist eine Nicht-IRUP-Instanz mit minimaler Anzahl $\mathbf{e}^T \mathbf{b}$ insgesamt zuzuschneidender Teile, wie folgendermaßen gezeigt wird. $\mathbf{e}^T \mathbf{b} = z_D$ hieße, daß kein Teil mit einem anderen kombinierbar wäre, also $z_C = z_D$. Ist $z_D \leq 2$, dann folgt auch IRUP. Seien $\mathbf{e}^T \mathbf{b} = m = 4$ und $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_4$. Bei $\ell_1 + \ell_4 > w$ ist \mathbf{e}^1 die einzige zulässige Variante, um Teil 1 zuzuschneiden, also die Instanz reduzierbar. Bei $\ell_1 + \ell_4 \leq w \wedge z_D = 3$ müßte $\ell_2 + \ell_3 > w$ gelten. Damit wären die Teile 1–3 paarweise nicht miteinander kombinierbar, somit $z_C > 2$ und $\Delta < 1$.

Wird in E_2 der Bedarfsvektor durch $3\mathbf{e}$ ersetzt, dann ergibt auch die Relaxation (1.7) den optimalen Zielfunktionswert $z_E = z_C = 5$, während $z_D = 6$ wird.

Kapitel 5

d -dimensionales Vektorpackproblem

In diesem Kapitel werden insbesondere die Unterschiede des d -VPPs (bei $d > 1$) zum 1CSP aufgezeigt. Ohne Einschränkung gelten die Aussagen 1 und 2, S. 11 bzw. 19, sowie das Lemma 1, S. 19. Wie im ersten Kapitel bezeichnet J die Indexmenge aller zulässigen Varianten, $|J| = n$. Ferner wurde $D := \{1, \dots, d\}$ in (1.1) definiert. Allgemein gültig ist auch

Aussage 24: Seien $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $\sum_{j=1}^n x_j \leq 1$ und $\mathbf{a} := \sum_{j \in J} x_j \mathbf{a}^j$. Gilt $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^m$, dann ist \mathbf{a} zulässige Variante.

Beweis: Für alle $r \in D$ gilt $\sum_{i=1}^m a_i \ell_{ir} = \sum_{i=1}^m \sum_{j \in J} x_j a_{ij} \ell_{ir} = \sum_{j \in J} x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \ell_{ir} \leq \sum_{j \in J} x_j w_r \leq w_r$. \square

Folgerung: Sei $E := (m; \mathbf{w}; \mathbf{L}; \mathbf{b})$ eine Instanz des d -VPPs mit $z_C > 0$, und sei $\mathbf{a} := \frac{1}{\lceil z_C \rceil} \mathbf{b}$ ganzzahlig. Dann gilt $\Delta(E) < 1$.

Beweis: Wird $\lceil z_C \rceil$ mal \mathbf{a} gepackt, dann wird der Bedarf erfüllt. \mathbf{A} ist die Zuschnittmatrix. \mathbf{x}^C sei Optimallösung von (1.6). Wegen $\mathbf{A}\mathbf{x}^C = \mathbf{b}$ ist $\mathbf{a} = \frac{1}{\lceil z_C \rceil} \mathbf{A}\mathbf{x}^C$ zulässig, denn $\mathbf{x} := \frac{1}{\lceil z_C \rceil} \mathbf{x}^C \geq \mathbf{0}$ und $\sum_{j \in J} x_j = z_C / \lceil z_C \rceil \leq 1$. \square

5.1 Unbeschränktheit des Wertes einer Variante für $d \rightarrow \infty$

Sei $E := (m; \mathbf{w}; \mathbf{L}; \mathbf{b})$ eine Instanz des d -VPPs. Analog zum Abschnitt 2.2 wird der Typ des i -ten Teils als $k_i := \min_{r \in D} \lfloor w_r / \ell_{ir} \rfloor$ definiert. Der Wert einer zulässigen Variante \mathbf{a} ist dann wie im eindimensionalen Fall $v := \sum_{i \in I} a_i / k_i$.

Beispiel 1: Sei $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2d})$ und $E := (d; \mathbf{e}; \mathbf{L}; \mathbf{b})$ mit $\ell_{ii} = 1 - (d-1)\varepsilon$ sowie $\ell_{ij} = \varepsilon$ für $i \neq j$. Dann ist jedes Teil vom Typ 1, aber die Variante \mathbf{e} ist zulässig und besitzt den

Wert d .

Zwei Teile p und q heißen unvergleichbar, wenn weder $\ell_{pi} \leq \ell_{qi} \forall i \in D$ noch $\ell_{qi} \leq \ell_{pi} \forall i \in D$ gilt. Auch wenn keine unvergleichbaren Teile vorkommen, gibt es keine feste Schranke für den Wert einer (eigentlichen) Variante.

Beispiel 2: Sei $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4d^2 * (2d + 1)}]$. In $E = (2d; (1, 1, \dots, 1)^T; \mathbf{L}; \mathbf{e})$ sei $\ell_{ir} = \varepsilon$ bei $i > 2r$, $\ell_{ir} = \varepsilon + 1/(2r)$ bei $i < 2r$ und $\ell_{ir} = \varepsilon + 1/(2r + 1)$ bei $i = 2r$, d. h.

$$\mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \varepsilon & \frac{1}{3} + \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ \frac{1}{4} + \varepsilon & \frac{1}{4} + \varepsilon & \frac{1}{4} + \varepsilon & \frac{1}{5} + \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ \frac{1}{6} + \varepsilon & \frac{1}{7} + \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2d} + \varepsilon & \dots & \frac{1}{2d} + \varepsilon & \frac{1}{2d+1} + \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Variante \mathbf{e} zulässig und besitzt den Wert $1 + 1/2 + \dots + 1/(2d)$. \triangleleft

Trotz dieser Negativbeispiele gibt es auch gewisse von d abhängige obere Schranken für den Wert zulässiger Varianten und damit für das Gap. In Lemma 3, S. 34, wurde der Wert einer Variante im 1CSP mit $\hat{v} < 1,7$ abgeschätzt. Im d -VPP können, wie Beispiel 1 zeigt, jeweils d Teile eines bestimmten Typs kombiniert werden, so daß der erreichte Wert fast $d * \hat{v}$ wird. Größer werden kann er jedoch nicht. Das ist wie folgt zu begründen. In der Zulässigkeitsbedingung (1.2), S. 5, für eine Variante \mathbf{a} werden alle ℓ_{ir} , die kleiner sind als $\max_{r \in D} \ell_{ir}$ durch 0 ersetzt. In jeder Zeile r mußte $\sum_{i \in I} \ell_{ir} \leq w_r$ gelten. Es werden nur diejenigen Teile betrachtet, bei denen $\ell_{ir} > 0$ ist, also keine Ersetzung erfolgte. Diese Teile tragen weniger als \hat{v} zum Wert v der Variante \mathbf{a} bei. Für die Betrachtung der anderen Zeilen werden diese Teile, also die betreffenden Spalten, gestrichen. Werden so alle d Zeilen abgearbeitet, dann ist der Gesamtwert v weniger als $d * \hat{v}$. Analog zum Abschnitt 2.4 kann nun gefolgert werden, daß für das d -VPP folgende Abschätzungen gelten:

$$z_D < \frac{7}{5} + d * \hat{v} * z_C, \text{ also } \Delta < \frac{7}{5} + (d * \hat{v} - 1) * z_C \text{ und } \Delta < (1 - \frac{1}{d * \hat{v}}) * m + \frac{7}{5d * \hat{v}}$$

Begründung: Wird für alle $i \in I$ und alle $r \in D$ jeweils ℓ_{ir} durch den nicht kleineren Wert $w_r / [\min_{s \in D} w_s / \ell_{is}]$ ersetzt, dann liegt der Teilbarkeitsfall des 1CSPs vor, da sämtliche Zeilen der Zulässigkeitsbedingung (1.2) durch Multiplikation mit einer positiven Konstanten auseinander hervorgehen. Die weiteren Überlegungen geschehen wie im Abschnitt 2.4. \square

Weil hier der Term $d * \hat{v}$ vorkommt, war es angebracht, \hat{v} in Lemma 3 so genau abzuschätzen. Schön wäre auch eine genaue Abschätzung des Wertes einer zulässigen Variante im d -VPP, falls keine unvergleichbaren Teile vorkommen, doch da ergeben sich zu unübersichtliche Fallunterscheidungen, z. B. sind Summen wie $\sum_{i \in I} \max_{r \in D} \ell_{ir}$ bei $d \geq 2$ schlecht nach oben abzuschätzen.

5.2 Unbeschränktes Gap im Fall $d = 2$

Zur Motivation der Konstruktionen in diesem Abschnitt, welche zeigen, daß das Gap affin-linear mit der Anzahl m zu packender Teile zunehmen kann, dient das folgende

Beispiel: Für $E_1 := (7; \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 13 & 9 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}^T; (1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)^T$) gilt $z_M(E_1) = z_C(E_1) = 8/3$. Mit den zulässigen Varianten $\mathbf{a}^1 = 3\mathbf{e}^3$, $\mathbf{a}^2 = \mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^6$, $\mathbf{a}^3 = \mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^4$, $\mathbf{a}^4 = 2\mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^7$, $\mathbf{a}^5 = \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^5 + \mathbf{e}^7$ und $\mathbf{a}^6 = \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^5$ ergibt sich als Optimallösung der stetigen Relaxation (1.6) $x_1 = 1/6$, $x_2 = \dots = x_6 = 1/2$ und $x_j = 0$ für $j > 6$. Die einzigen eigentlichen 3-Teile-Varianten sind \mathbf{a}^4 , \mathbf{a}^5 und \mathbf{a}^6 . Allerdings kann von diesen Varianten nur genau eine ausgewählt und gepackt werden, ohne Überproduktion zu erzielen. Da mehr als drei Teile nicht in eine Variante passen, folgt $z_D \geq 1 + (8 - 3)/2$ und schließlich $z_D = 4$, also $\Delta = 4/3$. \triangleleft

Daß im Beispiel $w_1 = w_2$ und für $i = 1, \dots, m$ jeweils $\ell_{i1} + \ell_{i2} = w_1 * 2/3$ gilt, ist kein Zufall. Gilt für irgendwelche $i, j, k \in I$ nämlich $\ell_{i1} + \ell_{j1} + \ell_{k1} < w_1$, dann folgt $\ell_{i2} + \ell_{j2} + \ell_{k2} = 2 * w_1 - (\ell_{i1} + \ell_{j1} + \ell_{k1}) > w_2$, so daß die Variante $\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^k$ unzulässig wird. Dieses Komplementaritätsprinzip wurde schon im Unterabschnitt 4.2.2 angesprochen.

Um Instanzen des 2-VPPs mit großem Gap zu konstruieren, reicht es also aus, Instanzen des 1CSPs zu konstruieren, in denen in einer Optimallösung von (1.6) alle in positiver Häufigkeit gepackten Varianten verschnittfrei sind und je genau drei Teile enthalten. Von diesen Varianten sollen so wenig wie möglich für (1.3) verwendet werden können. Außerdem soll es keine weiteren eigentlichen 3-Teile-Varianten ohne Verschnitt geben.

Für $6|m$, $\mathbf{b} = \mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$ sieht ein Schema für die optimalen Varianten von (1.6) wie in nachstehender Tabelle aus. Jede Spalte bedeutet eine verschnittfreie Variante mit der Häufigkeit $x = 1/2$. Die Einträge i, j, k in der Spalte bedeuten, daß die Variante $\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^k$ zu packen ist, d. h. sie ist genau dann eigentlich, wenn i, j, k paarweise voneinander verschieden sind. Den ersten $m/3$ Spalten wohnt eine zyklische Struktur mit der Zyklenlänge $m/3$ inne, während die Varianten $m/3 + 1$ bis $2m/3$ durchweg uneigentlich sind.

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \dots & m/3 \\ m & 2m/3 + 1 & 2m/3 + 2 & \dots & m - 1 \\ 2m/3 + 1 & 2m/3 + 2 & 2m/3 + 3 & \dots & m \end{array} \right| \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & m/3 \\ m/3 + 1 & m/3 + 2 & \dots & 2m/3 \\ m/3 + 1 & m/3 + 2 & \dots & 2m/3 \end{array} \right|$$

Addiert man die Längen der Teile in den Spalten 1, 3, \dots , $m/3 - 1$ oder (gesondert) in den Spalten 2, 4, \dots , $m/3$, dann erfordert die Verschnittfreiheit dieser je $m/6$ Varianten die Gültigkeit von $\sum_{i=1}^{m/6} (\ell_{2i-1} - \ell_{2i}) = 0$. Außer den ersten $m/3$ Varianten soll es keine anderen eigentlichen 3-Teile-Varianten ohne Verschnitt geben. Daraus folgt, wenn $\ell_{m+1} := \ell_{2m/3+1}$ gesetzt wird, die Forderung

$$\forall i, j, k \in \{2m/3 + 1, \dots, m\} : j < k \wedge (i, i + 1) \neq (j, k) \implies \ell_i + \ell_{i+1} \neq \ell_j + \ell_k.$$

Dies ist schwächer als die Forderung

$$\forall i, j, k, r \in \{2m/3 + 1, \dots, m\} : i < j \wedge (i, j) \neq (k, r) \implies \ell_i - \ell_j \neq \ell_k - \ell_r,$$

die bei den sogenannten GOLOMB-Linealen [35] gestellt wird. Da aber auch die Teile $m/3 + 1$ bis $2m/3$ berücksichtigt werden müssen, reichte auch die strenge Golomb-Forderung nicht aus, um zu verhindern, daß andere als die angegebenen eigentlichen verschnittfreien 3-Teile-Varianten existieren.

Wurden w und $\ell_{2m/3+1}$ bis ℓ_m festgelegt, dann sind auch die übrigen Teile eindeutig bestimmt. Wie können geeignete Werte gefunden werden? Wenn darauf verzichtet wird, möglichst kleine natürliche Zahlen zu finden, dann bietet sich an, mit reellen Zahlen, speziell mit Logarithmen von Primzahlen zu arbeiten. Anschließend kann immer eine äquivalente Instanz mit natürlichen Zahlen gefunden werden. Allerdings werden diese dann oft sehr groß. Außerdem erfordert das Runden besondere Sorgfalt oder Nachbearbeitung sowie Überprüfung der Zahlen, ob tatsächlich z_C und z_D unverändert sind.

Sei $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$. Bezeichne (p_n) die Folge der Primzahlen, $p_2 = 2$, wobei zusätzlich $p_1 := 1$ sei. Es wird gesetzt: $m := 3q$; $\mathbf{b} := \mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$; $p_0 := p_q$. Um zu erreichen, daß $\ell_i < 2w/3$ für alle $i \in I$ wird, wird ein $t \in \mathbb{R}$ mit $t > (\ln p_q + \ln p_{q-1})/2 - \ln 2$ gewählt. Nun kann $w := 1,5 * (\ln p_q + \ln p_{q-1}) + 3t$ und für $i = 1, \dots, q$ jeweils $\ell_i := w - \ln p_i - \ln p_{i-1} - 2t$; $\ell_{i+q} := (\ln p_i + \ln p_{i-1})/2 + t$ und $\ell_{i+2q} := \ln p_i + t$ festgesetzt werden. Wegen $\ell_q = (\ln p_q + \ln p_{q-1})/2 + t = \ell_{2q} = w/3$ können die beiden Teile Nr. q und $2q$ zusammengefaßt werden, so daß $m = 3q - 1$ wird. Ansonsten haben alle Teile unabhängig von t unterschiedliche Längen, da $q > 2$ vorausgesetzt wurde.

Gemäß Konstruktion ist $z_C = q$, da je $1/2$ -mal (verschnittfrei) die Varianten $\mathbf{e}^i + 2\mathbf{e}^{i+q}$ (für $i = 1, \dots, q$) sowie $\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^{i+2q} + \mathbf{e}^{i+2q-1}$ (für $i = 2, \dots, q$) und $\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^{3q} + \mathbf{e}^{2q+1}$ gepackt werden können, um den Bedarf zu decken. Aufgrund der Logarithmengesetze und der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung für positive ganze Zahlen sind die angegebenen 3-Teile-Varianten die einzigen verschnittfreien, und von diesen können nur $\lfloor q/2 \rfloor$ für (1.3) verwendet werden. Das bedeutet wegen des Komplementaritätsprinzips $z_D \geq (3q - \lfloor q/2 \rfloor)/2$ und somit $\Delta \geq (q - \lfloor q/2 \rfloor)/2 \geq q/4$. Die Teile Nr. q und $2q$ wurden zu einem (mit Bedarf 2) zusammengefaßt; $m := 3q - 1$. Ist der Rest von q bei Division durch 4 genau 0 oder 3, dann kann von den gleich großen Teilen eins gestrichen werden, ohne z_D zu ändern: Sei $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Mit $m := 3q - 1$ und $\mathbf{b} = \mathbf{e}$ wird dann $z_C = q - 1/3$, und es ergeben sich folgende Fälle:

1. $q = 4s$: $m = 12s - 1$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}$, $z_D = 5s$, $\Delta = s + 1/3 = (m + 5)/12$;
2. $q = 4s + 1$: $m = 12s + 2$, aber $\mathbf{e}^T \mathbf{b} = 12s + 3$, $z_D = 5s + 2$, $\Delta = s + 1 = (m + 10)/12$;
3. $q = 4s + 2$: $m = 12s + 5$, aber $\mathbf{e}^T \mathbf{b} = 12s + 6$, $z_D = 5s + 3$, $\Delta = s + 1 = (m + 7)/12$;
4. $q = 4s + 3$: $m = 12s + 8$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}$, $z_D = 5s + 4$, $\Delta = s + 4/3 = (m + 8)/12$.

Wegen der Zulässigkeit der uneigentlichen 3-Teile-Varianten müssen je zwei beliebige der Teile Nr. $q + 1$ bis $2q$ miteinander als 2-Teile-Varianten (mit Verschnitt) kombinierbar sein, so daß das konstruierte Gap nicht größer wird als angegeben.

Folgende Beispielinstanzen wurden nach obiger Methode konstruiert, wobei die Teile nach fallenden ℓ_{i1} umsortiert wurden (überall $d = 2$):

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 52 & 42 & 40 & 32 & 30 & 28 & 25 & 24 & 22 & 19 & 16 \\ 8 & 18 & 20 & 28 & 30 & 32 & 35 & 36 & 38 & 41 & 44 \end{pmatrix}^T, \quad w_1 = w_2 = 90, \quad m = 11, \\ \mathbf{b} = \mathbf{e}, \quad z_D = 5, \quad \Delta = 4/3;$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 324 & 268 & 262 & 222 & 188 & 180 & 172 & 159 & 146 & 139 & 136 & 126 & 108 & 90 \\ 36 & 92 & 98 & 138 & 172 & 180 & 188 & 201 & 214 & 221 & 224 & 234 & 252 & 270 \end{pmatrix}^T,$$

$w_1 = w_2 = 540, m = 14, \mathbf{b} = \mathbf{e} + \mathbf{e}^6, z_D = 7, \Delta = 2.$

Obiges Konstruktionsprinzip ergibt $\Delta = m/12 + \mathcal{O}(1)$. Im folgenden werden Instanzen mit $\Delta = m/8 + \mathcal{O}(1)$ konstruiert. Ausgangspunkt ist das am Anfang gegebene Einführungsbeispiel, in welchem statt Teil 3 zwei unterschiedliche Teile, und zwar ungleich $\frac{1}{3}\mathbf{w}$, gefordert werden:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 13 - 2t & 9 - 2t & 7 + 4t & 7 - 2t & 6 + t & 5 - 2t & 4 + t & 3 + 4t \\ 1 + 2t & 5 + 2t & 7 - 4t & 7 + 2t & 8 - t & 9 + 2t & 10 - t & 11 - 4t \end{pmatrix}^T$$

und $E_2 := (8; (21, 21)^T; \mathbf{L}; (1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)^T)$ mit $t \in (0, 1/4)$. Die Teile sind nach fallenden ℓ_{i1} geordnet. Es gilt $z_M(E_2) = z_C(E_2) = 3$ und $z_D(E_2) = 4$.

Die Instanz E_1 vom Beginn dieses Abschnitts wird mit $r \in \mathbb{N}$ Instanzen E_2 zu einer Instanz E zusammengesetzt. Dabei werden für t nur die Werte $1/7, 1/8, 1/9$ sowie die Reziproken von Primzahlen ab 11 verwendet. Somit kann ausgeschlossen werden, daß verschnittfreie Varianten vorkommen, die in der vorgesehenen Optimallösung der Relaxation (1.6) keine Verwendung finden. ($t = 1/5$ ist wegen $13 + (4 + \frac{1}{5}) + (3 + \frac{4}{5}) = 21$ ungeeignet.) Da nur $r + 1$ unkorrelierte eigentliche 3-Teile-Varianten existieren, folgt $z_M(E) = z_C(E) = 3r + 8/3, m = 8r + 7, \mathbf{e}^T \mathbf{b} = 9r + 8, z_D(E) = 4r + 4$ und $\Delta(E) = r + 4/3$. Zusammengefaßt ergibt sich

Aussage 25: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es Instanzen des 2-VPPs mit Gap $\Delta \geq m/8 - 7/24$.

Beweis: Für $m < 7$ ist die Behauptung offensichtlich. Sei $m \geq 7$. Läßt m bei Division durch 8 nicht Rest 6, dann wird, wie oben angegeben, E_1 mit mehreren Instanzen E_2 zusammengesetzt. Gegebenenfalls sind, ohne das Gap zu ändern, noch einige Teile hinzuzufügen, damit die Anzahl m erreicht wird. Im anderen Fall wird obige Beispielinstanz mit vierzehn Teilen mit entsprechend vielen Instanzen E_2 zu einer geeigneten Instanz zusammengesetzt, so daß die Behauptung gilt. \square

5.3 Instanzen ohne unvergleichbare Teile

Viele Aussagen zum 1CSP verlieren bei Verallgemeinerung auf das d -VPP ihren Sinn, weil keine Sortierung der Teile möglich ist. Ähnlich steht es mit Begriffen wie „Dominanz“. Treten keine unvergleichbaren Teile auf, dann können sämtliche Teile nach ihrer Größe sortiert und Dominanz und andere Begriffe analog zum eindimensionalen Fall definiert werden. An die Stelle der Ungleichung (2.1), S. 22, tritt dann die Bedingung

$$(\forall r \in D : \ell_{1r} \geq \ell_{2r} \geq \dots \geq \ell_{mr} > 0) \wedge (\forall i \in I \setminus \{m\} \exists r \in D : \ell_{ir} > \ell_{i+1,r}). \quad (5.1)$$

Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Treten in einer Instanz E des d -VPPs nur Teile der Typen $k_i \in \{k, k + 1\}$ ($i \in I$) auf, dann soll E analog zum eindimensionalen Fall $(k, k + 1)$ -Instanz genannt werden. Unter der Sortierbarkeitsvoraussetzung (5.1) bedeutet das, daß alle Teile größer oder gleich Teil m sind und folglich jeweils höchstens $k + 1$ Teile

in einen Container passen. Umgekehrt sind alle Teile kleiner oder gleich Teil 1, so daß je k beliebige Teile in einem Container Platz finden. Insbesondere gibt es eine bestimmte Richtung $r \in D$ mit $k \leq k_1 \leq \lfloor w_r/\ell_{1r} \rfloor \leq \dots \leq \lfloor w_r/\ell_{mr} \rfloor = k_m \leq k + 1$. Die detaillierte Prüfung der Beweise von Satz 2 und der Lemmata 4–11, S. 41–60, ergibt, daß sie beinahe wörtlich auf das d -VPP übertragen werden können, solange die Bedingung (5.1) erfüllt ist. Hier wurde nur die Struktur zulässiger Lösungen von (1.3) bzw. (1.6) ausgenutzt, nicht jedoch die Materialschranke z_M . Leider gilt das für den Beweis von Satz 3, S. 61, trotz der Sortierbarkeitsbedingung (5.1) nicht, so daß die Gültigkeit von Satz 3 im d -VPP mit $d \geq 2$ offen bleibt. Außerdem ist im 2-VPP die Materialschranke trotz der Bedingung (5.1) nicht mehr additiv, sondern nur noch subadditiv.

Beispiel 1: Sei $d = 2$. In der Instanz $E := (3; \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 98 & 35 & 1 \\ 48 & 48 & 26 \end{pmatrix}^T; (1, 2, 1)^T)$ gilt $z_M = 1,7$ und $z_D = 2$. Bei einzelner Betrachtung der Teile wäre die Materialschranke 2,2. Obwohl nur die Typen 1, 2, 3 auftreten, kann Lemma 11 nicht angewendet werden, da Teil 1 (Typ 1) im Gegensatz zum eindimensionalen Fall mit zwei Typ-3-Teilen (Teil 3) in einer Variante kombinierbar ist. Die einzige Lösung von (1.3) mit dem Zielfunktionswert 2 ist $x_1 = x_2 = 1$ bei Benutzung der Varianten $\mathbf{a}^1 = (1, 0, 1)^T$ und $\mathbf{a}^2 = (0, 2, 0)^T$. Damit ist der erste Container zu 99% (in der 1. Richtung), der zweite zu 96% (in der 2. Richtung) ausgelastet. Dennoch ist z_M/z_D nur 0,85. Folglich ist auch das Argument der hohen Materialausnutzung im Beweis von Satz 3 nicht mehr ausreichend stichhaltig. \triangleleft

Beispiel 2: Sei $d = 2$. Das kleinste Teil (Teil 8) dient in der Instanz

$$E := (8; \begin{pmatrix} 708 \\ 708 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 571 & 148 & 148 & 147 & 144 & 142 & 138 & 1 \\ 295 & 295 & 148 & 147 & 144 & 142 & 138 & 1 \end{pmatrix}^T; (1, 2, 1, 1, 2, 1, 5, 1)^T)$$

nur dazu, Lemma 11 für E unbrauchbar zu machen. Bis auf die Dimension entsprechen der Container und die Teile 3–7 einer (4, 5)-Instanz aus Aussage 17, S. 69, in der alle Teilleängen um 116 und der Container um 580 vergrößert wurden. Teil 2 kann weder mit Teil 1 noch mit dreimal Teil 7 in einen Container gepackt werden, während Teil 1 nicht mit Teil 7 kombinierbar ist. Damit wird $z_D(E) = 5$ und die Argumentation im Beweis von Satz 3 für E offensichtlich falsch, denn $z_M(E) = 13/4$, also $z_M - 3 \cdot 0,75 = 1$, steht im Widerspruch zum linken Teil der Ungleichung (3.30). Trotzdem ist Satz 3 damit für das d -VPP unter der Bedingung (5.1) noch nicht widerlegt.

Daß in einer $(k, k + 1)$ -Instanz E des d -VPPs unter der Voraussetzung (5.1) die Lemmata 4–6 weiterhin gelten, kann in der unten angegebenen und im Abschnitt 1.7 angekündigten Heuristik ausgenutzt werden. Eine Verallgemeinerung auf beliebige Instanzen ohne unvergleichbare Teile wird danach diskutiert. Zuerst werden die größten Teile von E in einer entsprechenden Anzahl k -Teile-Varianten gepackt und abgetrennt, ohne Nichtoptimalität zu erreichen. Außerdem ist damit eine untere Schranke für $z_D(E)$ gegeben.

Eine relativ erfolgreiche Heuristik besteht darin, zuerst die Relaxation (1.6) oder (1.7), S. 8, zu lösen, den ganzzahligen Teil von \mathbf{x} abzuspalten und die residuale Instanz dem gleichen Verfahren zu unterziehen, bis die revidierte Simplexmethode nur ein $\mathbf{x}_B \leq \mathbf{e}$ liefert. Danach kann von den in der Lösung der Relaxation enthaltenen Varianten ei-

ne mit maximaler Häufigkeit x ausgewählt, ggf. etwas modifiziert und danach einmal gefertigt werden. Mit der gleichen Prozedur werden weitere Varianten bestimmt und abgetrennt, bis der Auftrag bearbeitet ist. Da auch bei Auswahl einer der in (1.7) gefundenen Varianten bereits einige für diese ehemals eigentliche Variante benötigte Teile mit einer anderen Variante gepackt werden konnten, muß immer eine Anpassung an die aktuell verbliebenen Bedarfszahlen erfolgen. Dies war die zweite Grundidee für den unten folgenden Algorithmus. Das Unterprogramm UP überführt eine Packvariante \mathbf{a}^i in eine eigentliche, nichtdominierte Variante, packt sie in der als Parameter angegebenen Anzahl und streicht die betreffenden Teile aus dem Bedarfsvektor \mathbf{b} . Veränderungen von \mathbf{b} werden berücksichtigt.

Algorithmus $(k, k + 1)$ -Heuristik

Eingabe: $(k, k + 1)$ -Instanz $E = (m; \mathbf{w}; \mathbf{L}; \mathbf{b})$, die die Bedingung (5.1) erfüllt.

Ausgabe: zulässige, heuristische Lösung von (1.3).

1. Bestimme eine optimale Basislösung $\bar{\mathbf{x}}$ der Relaxation (1.7), S. 8, sowie deren optimalen Zielfunktionswert z_E . Setze $Z := \lceil z_E \rceil$ und $z := 0$ (aktueller Zielfunktionswert).
2. Sei $y_E := y(\bar{\mathbf{x}}, \{j \in J : \mathbf{e}^T \mathbf{a}^j \leq k\})$ unter Benutzung der Bezeichnung (3.2), S. 38. Packe die $\min\{\mathbf{e}^T \mathbf{b}, \lceil y_E \rceil * k\}$ größten Teile mittels k -Teile-Varianten und streiche sie aus dem Bedarfsvektor \mathbf{b} . Erhöhe z um die Anzahl dieser Varianten.
3. Für alle $i \in I$: Bei $\mathbf{e}^T \mathbf{a}^i > k$ rufe untenstehendes Unterprogramm UP mit dem Parameter $\lfloor \bar{x}_i \rfloor$ auf.
4. Sortiere die Varianten \mathbf{a}^i so, daß für ihre Häufigkeiten \bar{x}_i gilt:
 $\text{frac}(\bar{x}_1) \geq \text{frac}(\bar{x}_2) \geq \dots \geq \text{frac}(\bar{x}_m)$.
5. Setze $i := 1$. Falls in den Schritten 2 und 3 keine Variante gepackt wurde, dann rufe UP mit dem Parameter 1 auf und setze $i := 2$.
6. Fixiere den bis hierher aufgestellten Plan einschließlich \mathbf{b} und z , so daß ggf. die im folgenden Punkt durchgeführten Änderungen rückgängig gemacht werden können.
7. Für $i = i, \dots, m$: Bei $\mathbf{e}^T \mathbf{a}^i > k$ rufe UP mit dem Parameter 1 auf.
8. Ist $z \leq Z$, dann halt.
9. Mache die Änderungen des vorletzten Schrittes rückgängig, bestimme eine optimale Basislösung $\bar{\mathbf{x}}$ der Relaxation (1.7) für die Restinstanz (Zielfunktionswert z') und setze $Z := z + \lceil z' \rceil$. Gehe zum Punkt 2.

Unterprogramm UP (Parameter $p \in \mathbb{N}$) zur Nachbearbeitung der Variante \mathbf{a}^i :

- Bei $p = 0$ kehre zurück.
- Bei $\mathbf{a}^i \not\leq \mathbf{b}$ ersetze \mathbf{a}^i durch die lexikographisch nächstkleinere zulässige, eigentliche Variante.

- Setze $\mathbf{v} := \mathbf{w} - \mathbf{L}^T \mathbf{a}^i$ (Verschnitt).
- Solange ein $j \in I$ mit $(\forall r \in D : v_r \geq \ell_{jr}) \wedge (b_j \neq a_{ij})$ existiert, füge das Teil j in die Variante \mathbf{a}^i ein (d. h. $a_{ij} := a_{ij} + 1$) und ersetze v_r durch $v_r - \ell_{jr}$ für alle $r \in D$.
- Bei $\mathbf{a}^i = \mathbf{o}$ kehre zurück. Dann ist nichts mehr zu packen.
- Ersetzung eines Teiles t durch ein größeres Teil s , solange es möglich ist: Solange es $s, t \in I$ mit $s < t \wedge b_s \neq a_{is} \wedge a_{it} \neq 0 \wedge (\forall r \in D : v_r \geq \ell_{sr} - \ell_{tr})$ gibt, setze $a_{is} := a_{is} + 1$; $a_{it} := a_{it} - 1$ und $v_r := v_r - \ell_{sr} + \ell_{tr} \forall r \in D$. Damit ist die Variante \mathbf{a}^i zulässig, eigentlich und nicht dominiert.
- Sei $q := \min\{p, \min_{j \in I; a_{ij} \neq 0} \lfloor b_j / a_{ij} \rfloor\}$. Setze $z := z + q$; $p := p - q$ und $\mathbf{b} := \mathbf{b} - q * \mathbf{a}^i$. Packe q mal die Variante \mathbf{a}^i . Bei $p \neq 0$ gehe zum zweiten Punkt von UP zurück.
- Kehre zum Aufrufer zurück.

Sofern Z nicht erhöht werden brauchte, ist die heuristisch erhaltene Lösung von (1.3) optimal.

Der Algorithmus kann auch für beliebige Instanzen des d -VPPs ohne unvergleichbare Teile benutzt werden, allerdings können ggf. mehr Teile in eine Variante eingefügt werden. Außerdem ist im Punkt 2 mit $\lfloor y_E \rfloor$ statt $\lceil y_E \rceil$ zu arbeiten, sonst sind Störungen sehr wahrscheinlich, z. B. in der Instanz $(5; 36; (18, 14, 12, 11, 8)^T; (3, 3, 3, 3, 6)^T)$ des 1CSPs, vgl. Bemerkung 3, S. 42. Die so abgeänderte Heuristik erzielt im allgemeinen gute Ergebnisse.

Zur Erprobung der Heuristik wurden mehrere Instanzen des d -VPPs mittels eines Zufallszahlengenerators erzeugt. Wurden beliebig große Teile zugelassen, dann waren mehrere besonders große Teile mit keinem anderen verträglich, und es ergab sich als Basismatrix in der stetigen Relaxation oft beinahe eine Diagonalmatrix. Um dies zu verhindern, wurde bei den weiteren Tests, außer bei der Erzeugung von $(k, k + 1)$ -Instanzen, die Einschränkung $\ell_{ir}/w_r \leq 17/30 \forall i \in I$ und $r \in D$ vorgenommen.

Bei sämtlichen Instanzen mit $m = 9$ und $b_i \leq 10 \forall i \in I$ ergab sich IRUP, und es wurden jeweils weniger als 30 Austauschschritte in der revidierten Simplexmethode gebraucht, so daß die Lösungen innerhalb kürzester Zeit gefunden wurden. Das änderte sich, als auch die Anzahl m der Teile „zufällig“ im Bereich $1 \leq m \leq 120$ festgelegt wurde. Die Bedarfswerte wurden nun mit $1 \leq b_i \leq 1000 \forall i \in I$ vom Zufallszahlengenerator gewählt, und z_C stimmte jeweils mit dem optimalen Zielfunktionswert z_E der Relaxation (1.7) überein. z_H ist der heuristisch ermittelte Zielfunktionswert der ganzzahligen Aufgabe (1.3), also $z_D \leq z_H$. Die Anzahl der Austauschschritte zur Ermittlung von z_C bzw. z_H sei $A1$ bzw. $A2$. Außer für die generierten $(k, k + 1)$ -Instanzen sind die konkreten Ergebnisse in den nachfolgenden Tabellen enthalten. Der Hauptteil der Rechenzeit entfiel auf die Ermittlung von z_C . Dabei schwankte die Zeit sehr stark, was nicht nur an den unterschiedlichen m und d liegt.

unvergleichbare Teile erlaubt						unvergleichbare Teile nicht erlaubt					
d	m	z_C	z_H	$A1$	$A2$	d	m	z_C	z_H	$A1$	$A2$
2	75	11347,54	11351	274	367	2	14	2935,83	2936	27	27
	92	13766,48	13770	320	399		83	11622,80	11623	328	328
	41	5823,27	5824	124	124		31	4198,96	4199	78	78
	79	12069,83	12144	296	301		100	12561,60	12562	488	488
	28	3825,12	3826	84	84		49	9074,88	9075	142	142
	97	11953,30	11954	457	457		117	14617,41	14618	552	552
	45	5826,99	5829	155	188		36	5070,40	5071	128	128
	76	10292,58	10300	350	465		15	1613,99	1614	30	30
	24	3557,10	3558	63	63		53	7073,01	7074	190	190
	93	11958,30	11962	439	548		32	5318,92	5321	114	134
9	40	6255,06	6256	92	92	9	17	2449,25	2450	20	20
	58	10734,20	10735	128	128		34	5156,62	5157	91	91
	79	13591,78	13599	196	216		103	14565,32	14566	458	458
	66	11128,06	11134	150	174		52	8452,16	8453	167	167
	15	3286,83	3287	25	25		120	16966,43	16967	585	585
	114	17280,45	17291	325	391		69	12089,73	12090	257	257
	101	15833,15	15834	248	248		17	2440,91	2441	30	30
	49	7901,33	7902	120	120		56	8930,29	8931	179	179
	118	20433,05	20442	312	364		4	1402,00	1402	3	3
	67	12529,09	12530	143	143		22	4593,61	4594	29	29

Eine genauere Untersuchung der zehnten Instanz in der rechten Tabelle ergab, daß auch dort $z_D < z_C + 2$ ist, die MIRUP-Hypothese für das d -VPP bei Abwesenheit unvergleichbarer Teile also noch aufrechterhalten werden kann. Bei den erzeugten $(k, k + 1)$ -Instanzen war jeweils $z_D = \lceil z_C \rceil$. Somit bestätigen die Tests, daß bei Abwesenheit unvergleichbarer Teile in der Regel $z_D = \lceil z_C \rceil$ gilt.

5.4 Offene Fragen

Die Hauptfrage bleibt, in welcher Weise das Gap im d -VPP unter der Sortierbarkeitsbedingung (5.1) und im 1CSP beschränkt ist. Gibt es z. B. im 1CSP eine feste obere Schranke für das Gap oder könnte zumindest $\Delta < \mathcal{O}(\ln m)$ gezeigt werden?

In [36] sind zwei Unvollständigkeitssätze K. GÖDELS (1906–1978) von 1931 angegeben, die den Agnostikern Argumente liefern könnten:

1. Wenn die axiomatische Mengentheorie widerspruchsfrei ist, gibt es Sätze, die weder bewiesen noch widerlegt werden können.
2. Es gibt kein konstruktives Verfahren, mit dem zu beweisen wäre, daß die axiomatische Theorie widerspruchsfrei ist.

Solange aber nicht feststeht, daß ein Sachverhalt nicht beweisbar ist, wie z. B. die Kontinuumshypothese der Mengenlehre, hat die Behauptung „Ignoramus et ignorabimus“ (Wir wissen nicht, und wir werden nicht wissen) keine Berechtigung. Schließen wir uns also der Forderung von D. HILBERT (1862–1943) an: „Für uns gibt es kein Ignorabimus. Wir müssen wissen, wir werden wissen.“

Literaturverzeichnis

- [1] S. Baum, L. E. Trotter: Integer rounding for polymatroid and branching optimization problems. *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* 2 (4) (1981) 416–425.
- [2] G. Bieß, H. Erfurth, G. Zeidler: *Optimale Prozesse und Systeme*. 2. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1980.
- [3] I. N. Bronstein†, K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, 24. Aufl., Gemeinschaftsausgabe Verlag Nauka, Moskau und BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1989.
- [4] A. Caprara, P. Toth: Lower bounds and algorithms for the 2-dimensional vector packing problem. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 111 (3) (2001) 231–262.
- [5] E. G. Coffman, jr., M. R. Garey, D. S. Johnson, R. E. Tarjan: Performance bounds for level oriented two-dimensional packing algorithms. *SIAM J. Comput.* 9 (1980) 808–826.
- [6] A. Diegel: Integer LP solution for large trim problems. Manuskript, Universität Natal, Südafrika 1988.
- [7] H. Dyckhoff, G. Scheithauer, J. Terno: Cutting and Packing. in: *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, herausgegeben von M. Dell’Amico, F. Maffioli und S. Martello, John Wiley & Sons Ltd., 1997, S. 393–412.
- [8] M. Fieldhouse. The duality gap in trim problems. *SICUP-Bulletin* No. 5, 1990.
- [9] P. C. Gilmore, R. E. Gomory: A linear programming approach to the cutting-stock problem (Part I). *Oper. Res.* 9 (1961) 849–859.
- [10] R. E. Gomory: Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. *Bulletin of the American Mathematical Society* 64 (1958) 275–278.
- [11] U. Hebisch: Escher-Parkette.
www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/mce/flaechenauf.html.
- [12] G. Grosche, V. Ziegler, D. Ziegler (Herausgeber): *Ergänzende Kapitel zu I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik*. 6. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1990.

- [13] O. B. G. Madsen, K. E. Kægård: An application of traveling salesman routines to solve pattern allocation problems, Teil II. Forschungsbericht Nr. 24/1981, Institut für Mathematische Statistik und Operationsforschung, Technische Universität Lyngby (Dänemark) 1981.
- [14] O. Marcotte: Topics in combinatorial packing and covering. Forschungsbericht 568, School of Oper. Res. and Ind. Eng., Cornell University (Ithaca, NY) 1982.
- [15] O. Marcotte: The cutting stock problem and integer rounding. *Mathematical Programming* 33 (1985) 82–92.
- [16] O. Marcotte: An instance of the cutting stock problem for which the rounding property does not hold. *Operations Research Letters* 4/5 (1986) 239–243.
- [17] A. Müller: Anwendung des Schnittebenenverfahrens auf das eindimensionale Zuschnittproblem. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden 1998.
- [18] G. L. Nemhauser, L. A. Woolsey: *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, New York 1988.
- [19] V. Nica: A general counterexample to the Integer Round-Up property. (Unveröffentlichtes) Manuskript, Abteilung für Ökonomische Kybernetik, Ökonomische Akademie, Bukarest 1994.
- [20] C. Nitsche: Theoretische Untersuchungen zur Integer Round-Up Property beim Eindimensionalen Zuschnittproblem. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden 1996.
- [21] C. Nitsche, G. Scheithauer, J. Terno: New cases of the cutting stock problem having MIRUP. *Math. Meth. Oper. Res.* 48 (1998) 105–115.
- [22] Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Aufgaben 271036 und 281214 (1988); Nachdruck in *alpha* 3 (1988), S. 65 und *alpha* 4 (1988), S. 96.
- [23] M. A. Osorio, F. W. Glover, P. L. Hammer: Cutting and surrogate constraint analysis for improved multidimensional knapsack solutions. Manuskript, Autonome Universität Puebla, Puebla 2001.
- [24] M. Padberg: *Linear Optimization and Extensions*. Springer, Berlin u. Heidelberg 1995.
- [25] J. Piehler: *Algebraische Methoden in der ganzzahligen Optimierung*. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1983.
- [26] J. Rietz, G. Scheithauer, J. Terno: Families of non-IRUP instances of the one-dimensional cutting stock problem. *Discrete Applied Mathematics* 121 (2002) 229–245.
- [27] J. Rietz, G. Scheithauer, J. Terno: Tighter bounds for the gap and non-IRUP constructions in the one-dimensional cutting stock problem. *Optimization* 51 (2002) 927–963.

- [28] G. Scheithauer, J. Terno: About the gap between the optimal values of the integer and continuous relaxation in the one-dimensional cutting stock problem. In: Operations Research Proceedings 1991, Springer-Verlag Berlin 1992.
- [29] G. Scheithauer, J. Terno: Theoretical investigations on the Modified integer Round-Up Property for the one-dimensional cutting stock problem. Forschungsbericht MATH-NM-12-1993, Technische Universität Dresden 1993; Oper. Res. Lett. 20 (1997) 93–100.
- [30] G. Scheithauer, J. Terno: The Modified Integer Round-Up Property of the One-Dimensional Cutting Stock Problem. European Journal of Operational Research 84 (1995) 562–571.
- [31] G. Scheithauer, J. Terno: Facet-defining inequalities for the cutting stock problem. Forschungsbericht MATH-NM-10-1997, Technische Universität Dresden 1997; Pesquisa Operational 19/2 (2000) 131–144.
- [32] G. Scheithauer, J. Terno, A. Müller, G. Belov: Solving one-dimensional cutting stock problems exactly with a cutting plane algorithm. Forschungsbericht MATH-NM-06-1999, Technische Universität Dresden 1999; Journal of the Operational Research Society 52 (2001) 1390–1401.
- [33] R. Sedgewick: Algorithmen. Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
- [34] E. Seiffart, K. Manteuffel: Lineare Optimierung. 4. Aufl., BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1988.
- [35] J. B. Shearer: Optimal Golomb ruler table.
<http://www.research.ibm.com/people/s/shearer/gropt.html>.
- [36] S. Singh: Fermats letzter Satz. 5. Aufl., Deutscher Taschenbuchverlag GmbH & Co. KG, München 2000.
- [37] F. C. R. Spieksma: A Branch-and-Bound Algorithm for the Two-Dimensional Vector Packing Problem. Computers and Operations Research 21 (1994) 19–25.
- [38] M. M. Sysło, N. Deo, J. S. Kowalik: Discrete Optimization Algorithms with PASCAL programs. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1983.
- [39] J. Terno, R. Lindemann, G. Scheithauer: Zuschnittprobleme und ihre praktische Lösung. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1987.
- [40] G. Wäscher, T. Gau: Heuristics for the Integer One-dimensional Cutting Stock Problem: a computational study. OR Spektrum 18 (1996) 131–144.

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Prof. Dr. sc. nat. (Prof. Dr. rer. nat. habil.) Johannes Terno für seine Unterstützung in der ersten Hälfte des Projektes Promotion bedanken. Das

gilt insbesondere für die Auswahl der Thematik „Eindimensionales Zuschnittproblem und MIRUP“ sowie für die durch ihn möglich gewordene mehrjährige Beschäftigung als wissenschaftliche Hilfskraft an der TU Dresden. Leider erlag er am 10. 5. 2000 seiner schweren, tückischen Erkrankung, die er mehr als ein Jahrzehnt niederhalten konnte.

Dr. rer. nat. Guntram Scheithauer gilt mein Dank für die sehr fruchtbare Zusammenarbeit beim Schreiben zweier Preprints und deren Veröffentlichung als Artikel in Fachzeitschriften [26, 27]. Das gilt insbesondere für die Verbesserung von Ausdruck und Stil sowie für wertvolle inhaltliche Anregungen, etwa die Erarbeitung des Einführungsbeispiels zu Lemma 8. Außerdem hätte ich ohne Dr. Scheithauer nicht die Kontakte nach Freiberg und Jena bekommen. Ferner hatte er mir das zur Lösung des relaxierten eindimensionalen Zuschnittproblems von Christoph Nitsche geschriebene PASCAL-Programm im Quelltext zur Verfügung gestellt, so daß ich es verbessern und in C umschreiben konnte.

Prof. Dr. rer. nat. habil. Stephan Dempe hatte zusammen mit Herrn Dr. Schreier und Herrn Dr. Vogel im Jahr 2000 in Holzhau eine Konferenz zur diskreten Optimierung organisiert, an der ich teilnehmen durfte. Prof. Dempe gilt mein besonderer Dank dafür, daß er sich dafür eingesetzt hatte, daß ich in das Graduiertenkolleg „Räumliche Statistik“ an der TU Bergakademie Freiberg aufgenommen wurde, und er meine Betreuung übernommen hat. Außerdem hat er einen wesentlichen Anteil an der Verbesserung der Gestaltung der Dissertation und dem Aufspüren und Beseitigen mehrerer Fehler und Unklarheiten im Text.

Prof. Dr. rer. nat. habil. Ingo Althöfer von der Friedrich-Schiller-Universität Jena danke ich für seine Empfehlung, auch das mehrdimensionale Vektorpackproblem zu beleuchten, sowie seine Zusage, das zweite Gutachten anzufertigen.

Prof. Dr. rer. nat. habil. Dietrich Stoyan, TU Bergakademie Freiberg, danke ich für die Aufnahme ins Graduiertenkolleg, auch wenn die Dissertation mit räumlicher Statistik nichts zu tun hat. Leider konnte ich seinem Wunsch, Näherungslösungen mittels simulierter Abkühlung zu bestimmen, nicht entsprechen.

Dipl.-Math. Gleb Belov, Promotionsstudent an der TU Dresden, danke ich für die Bereitstellung des Programms zur Bestimmung des optimalen Zielfunktionswertes z_D des ganzzahligen Problems (1.3) im eindimensionalen Fall mittels Schnittebenenverfahren. Dieses Programm hatte mir sehr oft geholfen, Trugschlüsse bei der Konstruktion großer Gaps zu entlarven. Außerdem wäre die Kontrolle, ob z. B. in den Instanzen (4.23) und (4.25) tatsächlich $\Delta > 1$ ist, sehr schwierig geworden, weil die Relaxation (1.7) diese Aussage nicht liefert.

Gudrun Seifert, Koordinatorin im Graduiertenkolleg, lobe ich für ihr ausgezeichnetes Organisationstalent. Gleiches gilt für Frau I. Metz an der TU Dresden. Herrn Dr. rer. nat. Werner Queck, TU Bergakademie Freiberg, danke ich für seine schnelle und unkomplizierte Hilfestellung bei Fragen zu IRIX. Meine Mutter, Sára Rietz, hatte mir geduldig viele Jahre den Rücken frei gehalten und mir stets moralische Unterstützung gegeben. Dafür bin ich ihr zu lebenslangem Dank verpflichtet. Meinem Bruder, Peter Rietz, danke ich für die Ausrüstung mit Hardware und deren Wartung. Wer hier nicht genannt ist, ist dennoch nicht vergessen und möge mir die Nichtnennung nicht nachtragen.

Versicherung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Bei der Auswahl und Auswertung des Materials sowie bei der Herstellung des Manuskripts habe ich Unterstützung von folgenden Personen erhalten:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Johannes Terno†, Betreuer bis zu seinem Tod am 10. 5. 2000

Dr. rer. nat. Guntram Scheithauer, TU Dresden, Co-Betreuer

Prof. Dr. rer. nat. habil. Stephan Dempe, TU BA Freiberg, Betreuer seit 1. 3. 2001

Weitere Personen waren an der Abfassung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt. Die Hilfe eines Promotionsberaters habe ich nicht in Anspruch genommen. Weitere Personen haben von mir keine geldwerten Leistungen für Arbeiten erhalten, die nicht als solche kenntlich gemacht worden sind.

Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.