

**Rechenschwächen in der Hauptschule – Eine Studie zu den  
Rechenleistungen in den Klassen 7 und 8**

Vom  
FACHBEREICH ERZIEHUNGSWISSENSCHAFTEN  
der  
UNIVERSITÄT HANNOVER

zur Erlangung des Grades eines

DOKTORS DER PHILOSOPHIE  
– DR. PHIL. –

genehmigte Dissertation

von  
**Axel Mittelberg**  
geboren am 15. März 1971 in Georgsmarienhütte

2004

---

## Zusammenfassung

Die schulischen Leistungen deutscher Schüler nehmen in der aktuellen politischen und gesellschaftlichen Diskussion einen breiten Raum ein. Was aber sagen PISA und andere Untersuchungen über die inhaltlichen Stärken und Schwächen deutscher Schüler tatsächlich aus?

Die vorliegende Studie untersucht Leistungen von Hauptschülern in ausgewählten Inhaltsbereichen des Mathematikunterrichts. Die Hypothese ist, dass sich gewisse Schwierigkeiten der Hauptschüler aus nicht verstandenen und verinnerlichten Kenntnissen der Grundschulmathematik ableiten lassen. Zur Überprüfung der Hypothese wird ein informeller Test konstruiert. Mit diesem Test wird der Versuch unternommen, in exemplarischer Art Aussagen über Lösungsstrategien von Schülern zu erhalten. Dazu wird auf Aufgaben zurückgegriffen, die dem aktuellen Schulstoff entstammen, also im Unterricht, in Schulbüchern sowie Klassenarbeiten in dieser Form vorkommen. Zudem werden die Aufgaben daraufhin überprüft, ob sie während oder mit ihrer Lösung Aussagen über grundschulspezifische Fähigkeiten und Fertigkeiten zulassen.

Eine detaillierte Auswertung der schriftlich vorliegenden Bearbeitungen der Schüler führen zu Vermutungen über Lösungsstrategien und mögliche Fehlerursachen. Die Fehleranalyse mündet in der Feststellung bestimmter Bereiche, die einer besonderen Aufmerksamkeit bedürfen. Diese Aufmerksamkeitsbereiche zeigen Fehlerquellen auf, die ihre Wurzeln im Primarbereich haben (Beispiele: Übersicht über die Zahlenräume, Verständnis des Stellenwertsystems). Zum anderen zeigen sie Schwierigkeiten und Probleme des aktuellen Hauptschulunterrichts, Vorerfahrungen der Schüler aufzunehmen und Konzepte zu bilden, statt BlackBoxes von Formeln und Rezepten aufzubauen.

Mit einer Auswahl von Schülern wird mit der Methode des klinischen Interviews die Überprüfung der Hypothese vertieft, die beobachteten Aufmerksamkeitsbereiche detaillierter untersucht und durch Beispiele aus diesen Interviews dokumentiert.

In Ergänzung zu statistischen Untersuchungen werden in dieser Arbeit die benannten Aufmerksamkeitsbereiche qualitativ bestimmt. Dies festigt die Hypothese, dass Defizite in den Mathematikleistungen von Hauptschülern in den Mathematikunterricht der Grundschule zurückweisen.

## Abstract

School achievement of German students take up a large room in the current political and social discussion. Which evidence, however, do PISA and other studies actually give about the strengths or weaknesses of German students regarding their mathematic abilities?

This study examines achievements of weaker secondary school students in selected topics of mathematic education. The hypothesis is that certain difficulties of weaker students can be deduced from not correctly understood or internalized basic facts which are part of primary school mathematics. For the examination of this hypothesis an informal test is designed. With this test the attempt is undertaken to receive in exemplary kind

---

statements about the students' solution strategies. For this purpose, tasks from actual secondary mathematical topics are taken, i.e. tasks that occur in the lessons, textbooks or in written tests in these grades. Furthermore these tasks and their solutions are proved whether or not they permit statements about primary-school-specific abilities and skills.

With the help of the students' written answers assumptions are deduced about solution strategies and possible error causes. The analysis of mistakes leads to the definition of certain areas of attention. These areas hint at reasons for errors which have their roots in primary mathematics (as, for instance, number sense or idiosyncratic understanding of the decimal system). On the other hand, these areas point out weaknesses in the current teaching in secondary schools. In addition, they show that pre-conceptions of the students were not taken into account during lessons, that concepts are missing, that students solved tasks with the help of misunderstood formulas, etc.

With a sample of pupils the method of the clinical interview is used to prove the hypothesis mentioned above. The areas of attention are examined in more detail and documented by examples from these interviews.

In addition to quantitative studies like PISA, in this study the areas of attention are qualitatively determined. This strengthens the hypothesis that deficits in the mathematics achievement of secondary school students refer to inadequacies of mathematic instruction in primary school.

### **Schlüsselworte**

Mathematikunterricht, Hauptschule, Rechenschwäche

### **keywords**

mathematics teaching, secondary school, dyscalculia

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>ix</b>
<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Mathematik, Mathematikunterricht und Probleme des Mathematikunterrichts – Anmerkungen zu Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Grundpositionen des Lernens . . . . .	5
1.2 Lernen von Mathematik – mathematische Grundlagen . . . . .	10
1.2.1 Zahlbegriff . . . . .	10
1.2.2 Kleines Einpluseins . . . . .	14
1.2.3 Operative Beziehungen . . . . .	19
1.2.4 Stellenwert . . . . .	23
1.3 Zusammenfassung . . . . .	27
<b>2 Rechenschwäche als Problem des Mathematikunterrichts</b>	<b>29</b>
2.1 Geschichte der Dyskalkulieforschung . . . . .	30
2.2 Aktuelle Sichtweisen und Erklärungsansätze . . . . .	31
2.3 Ein mögliches Vorgehen bei Rechenschwächen – Fehleranalyse . . . . .	35
<b>3 Schriftliche Überprüfungen – ein informeller Test</b>	<b>39</b>
3.1 Hypothesenbildung . . . . .	39
3.2 Entwurf eines informellen Tests . . . . .	41
3.2.1 Analyse der Voraussetzungen für die Aufgaben . . . . .	42
3.2.1.1 Grundkompetenzen . . . . .	42
3.2.1.2 Kompetenzen zum Themenbereich Dezimalbrüche . . . . .	43
3.2.1.3 Kompetenzen zum Themenbereich Geometrie . . . . .	46
3.2.2 Der Test und seine Aufgaben . . . . .	48
3.2.3 Durchführungsideen . . . . .	63
3.2.4 Auswahl von Klassen . . . . .	64
3.3 Durchführungsbeobachtungen, Reaktionen . . . . .	65
3.4 Auswertung und erste Ergebnisse . . . . .	65
3.4.1 Ergebnisse der einzelnen Aufgaben . . . . .	66
3.4.2 Zusammenfassung . . . . .	95
3.4.3 Konsequenzen für die Untersuchung . . . . .	98

<b>4</b>	<b>Qualitative Aspekte der Studie – Videointerviews</b>	<b>99</b>
4.1	Zur Durchführung . . . . .	99
4.2	Auswahl der Schüler . . . . .	101
4.3	Konstruktion von Interviewsituationen . . . . .	101
4.3.1	Einleitung des Interviews . . . . .	103
4.3.2	Bereich 1: Mathematikunterricht . . . . .	103
4.3.3	Bereich 2: Zahlvorstellung, Stellenwert, Dezimalbrüche . . .	105
4.3.4	Bereich 3: Umfang und Flächen von einfachen Figuren . . .	108
4.3.5	Bereich 4: Verbindungen zu anderen Inhalten der Grundschule	110
4.4	Auswertung der Interviews . . . . .	112
4.4.1	Aussagen zum Mathematikunterricht . . . . .	112
4.4.2	Anordnung von Zahlen . . . . .	121
4.4.3	Schriftliche Addition . . . . .	126
4.4.4	Lückenaufgaben . . . . .	133
4.4.5	Multiplikation . . . . .	142
4.4.6	Zum Konzept Umfang . . . . .	150
4.4.7	Umfang einer Figur . . . . .	155
4.4.8	Fläche mit Einheitsquadraten . . . . .	167
4.4.9	Fläche einer Figur . . . . .	173
4.4.10	Einmaleinsquadrat . . . . .	182
4.4.11	Dreisatzaufgaben . . . . .	185
4.4.12	Kapitänsaufgabe . . . . .	188
4.5	Ein Fazit . . . . .	190
<b>5</b>	<b>Zusammenfassende Ergebnisse, Ausblicke</b>	<b>197</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>205</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>215</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>217</b>
<b>A</b>	<b>Test-Aufgaben (auf CD-ROM)</b>	<b>219</b>
A.1	Schriftliche Überprüfung . . . . .	219
A.2	Interviewfragen . . . . .	222
<b>B</b>	<b>Transkripte (auf CD-ROM)</b>	<b>225</b>
B.1	Corinna . . . . .	225
B.2	Erdem . . . . .	235
B.3	Mirka . . . . .	249
B.4	Bilal . . . . .	268
B.5	Milena . . . . .	288
B.6	Kerim . . . . .	302

B.7 Jennifer . . . . .	318
B.8 Jörn . . . . .	332
B.9 Cornelius . . . . .	346
B.10 Silke . . . . .	361
B.11 Frauke . . . . .	373
B.12 Andrea . . . . .	385
B.13 Natascha . . . . .	401
B.14 Aylin . . . . .	415
B.15 Aniela . . . . .	432
B.16 Darius . . . . .	444
B.17 Jessica . . . . .	458
B.18 Özlem . . . . .	474

# Einleitung

Nicht erst seit TIMSS, PISA und ähnlichen Studien ist bekannt, dass der Mathematikunterricht in den Klassen 7 und 8 Probleme aufweist, die einer näheren Betrachtung unterzogen werden müssen. Problematisch ist die Tatsache, dass sich jeder mit dieser Materie auskennt – zumindest auszukennen scheint –, sie oft auch beherrscht und deswegen meint, Hauptschulunterricht und entsprechende Schülerleistungen beurteilen zu können.

Diskutiert werden *Ergebnisse* aus solchen Untersuchungen – gerne auch die *Plätze des Abschneidens*. Es wird verglichen, wie einzelne Länder, verschiedene Nationen zueinander stehen.

Nach sich ziehen diese Untersuchungen eine Vielzahl von Maßnahmen – von allgemeinen Äußerungen, strukturellen Maßnahmen, politischen Entscheidungen über Vergleichstests, zentrale Prüfungen bis hin zu qualitativen Einzeluntersuchungen. Bisweilen wird den Entwicklern dieser vielfältigen Konsequenzen vorgeworfen, einem Aktionismus zu verfallen, der am Kern der Schulentwicklung vorbeigehe.

Rolff (2001) zitiert den Schweizer PISA-Experten Oggenfuss, der auf einer PISA-Tagung davor warnte, zu „Akzeptanzzwecken zu behaupten, mit PISA ließe sich konkret etwas in der Schule anfangen“ (Rolff 2001, 337). Rolff hält fest, dass die OECD (verantwortlich für PISA) ihr Projekt nicht an die Schulen selbst, sondern vielmehr an Schulpolitik und Schulverwaltung gerichtet habe. Die diskutierten Maßnahmen, die häufig global aus PISA abgeleitet würden, müssten differenziert betrachtet werden, z. B. in verschiedenen Formen des direkten Nutzens für die alltägliche pädagogische Arbeit in Schulen – als vermittelter Nutzen und als unmittelbarer Nutzen. Im Umfeld von weiterführenden Untersuchungen (z. B. flächendeckenden Untersuchungen wie LAU (Hamburg), MARKUS (Rheinland-Pfalz) und QUASUM (Brandenburg)) könnten Schulen unmittelbar von deren Ergebnissen profitieren, die großen Stichprobenuntersuchungen (PISA, TIMSS) versprechen eher vermittelten Nutzen durch Bereitstellung von Orientierungswissen, zahlreiche Impulse zur fachdidaktischen Diskussion, zur Curriculumentwicklung sowie für die Lehrerfortbildung (vgl. Rolff 2001).

In ähnlicher Weise fasst Terhart (2002) zusammen, in welcher Form die „großen Untersuchungen“ ergänzt werden müssten, um eine positive Weiterentwicklung von Schule und Unterricht zu bewirken.

„Konstruktive Konsequenzen lassen sich nur dann ziehen, wenn Leistungsvergleiche von tiefergehenden, differenzierten Analysen begleitet und vervollständigt werden, in denen die Bedingungskonstellationen und Kontexte (oder Ausbleiben) von adäquaten Leistungen ermittelt werden.

Damit ist der Bereich der Schul-, Unterrichts- und Lehr-Lern-Forschung angesprochen, in dessen Rahmen traditionell solche Analysen angesiedelt sind bzw. angesiedelt sein sollten. Die hierdurch erarbeiteten Erkenntnisse zu den Bedingungen und Voraussetzungen von qualitativ hochwertiger Schul- und Unterrichtarbeit können für die Umgestaltung von Schule und Unterricht wichtige Hinweise liefern, wenngleich nicht von einem einfachen Anwendungsverhältnis zwischen wissenschaftlichem Wissen und praxistauglichem Wissen ausgegangen werden kann. Die Möglichkeiten und Folgen des Einbringens von deskriptivem und analytischem Wissen *über* Schulen *in* Schulen ist selbst ein noch zu erforschendes Problem“ (Terhart 2002, 92).

Die vorliegende Studie setzt an einem Teilbereich des Mathematikunterrichts der Hauptschule an. In vielen Studien wurde festgestellt, dass gerade Hauptschüler – als Schüler der ohnehin „schwächsten“ Schulform des dreigliedrigen Schulsystems – eklatante Schwächen aufweisen. Unbeantwortet bleibt häufig die Frage nach den Ursachen dieser Schwächen. Sind einige dieser Schüler schlicht nicht dazu geeignet, den an sie gestellten Anforderungen zu entsprechen? Haben Sie eine Grenze ihrer Leistungsfähigkeit erreicht, mit der sie den Anforderungen des Mathematikunterrichts nicht standhalten können? Allzu oft hört man solche Urteile in der Gesellschaft. Ebenso gesellschaftsfähig scheint es zu sein, dass Schwierigkeiten in Mathematik als Kavaliersdelikt gelten. Es kann also sein, dass auch eine derartige Haltung Einfluss auf den Mathematikunterricht nimmt.

Will man sich mit solchen Erklärungsansätzen begnügen, ist es nicht notwendig, Bedingungsvariablen für das schwache Abschneiden dieser Schüler zu untersuchen. Will man hingegen im Sinne von Terhart konstruktive Konsequenzen erarbeiten, ist es unabdingbar, Variablen zu untersuchen, die einen Einfluss auf die Leistungen der untersuchten Schüler haben könnten.

Im Grundschulbereich ist es seit einiger Zeit üblich, über Schüler mit *Rechenschwäche* oder *Dyskalkulie* nachzudenken. Erreichen Schüler gewisse Standards nicht, fallen sie mit ihren schwachen Leistungen auf, bringen womöglich gute Leistungen in anderen Unterrichtsfächern, ist man geneigt, ihnen eine sogenannte *Rechenschwäche* zuzuschreiben. Damit hat man zunächst eine Bezeichnung, nicht jedoch eine Klärung von Ursachen.

Ein kurzer Überblick über die aktuelle Diskussion und die Verwendung der Begrifflichkeit dieses Themenkomplexes wird in Kapitel 2 gegeben. Einen umfassenden Überblick verschafft die vielfältige Literatur – insbesondere erwähnt sei das Handbuch zum Thema Rechenschwäche (Fritz u. a. 2003).

In weiterführenden Schulen wird seltener von *Rechenschwäche* gesprochen, obwohl es auch hier ähnlich auffällige Schüler gibt wie an Grundschulen (vgl. Mittelberg, Jetter 2000). Ist die Verwendung des Begriffs *Rechenschwäche* für Hauptschüler nicht statthaft? Oder ist sie irreführend, weil evtl. auch hier Bereiche der Grundschulmathematik von Schwächen betroffen sind?

Fakt ist, dass es auch in Hauptschulen Schüler gibt, die eklatante Schwierigkeiten im Mathematikunterricht aufweisen, in anderen Fächern hingegen kaum auffällig sind (vgl. Mittelberg, Jetter 2000). Viele Lehrerinnen und Lehrer klagen über man-



---

gelhafte Leistungen ihrer Schüler in den Klassen 6-8 (Hauptschulen, Integrierte Gesamtschulen). Sie bemerken, dass diese Schüler dem Unterricht trotz intensiven Übens kaum folgen können, langsam sind, viele – oft unverständliche – Fehler produzieren, in Klassenarbeiten regelmäßig schlecht abschneiden. Sie können sich diese Schwierigkeiten ihrer Schüler meist nicht erklären. Eine – zugegeben etwas simple – Erklärung ist die Zuschreibung einer Leistungsgrenze in Bezug auf mathematische Fähigkeiten. Diese mag bei diesen Schülern ab einer bestimmten Klassenstufe überschritten sein. Nicht jeder muss bis zum Abitur allen Inhalten des Mathematikunterrichts folgen können.

Untersuchungen zur Leistung von Hauptschülern beschäftigen sich zum Teil mit Erwartungen, die durch den Schulabschluss und ihren weiteren beruflichen Weg an sie gestellt werden (vgl. Schulz 1988). Häufig werden dabei jedoch für die meisten Schüler zu schwere Aufgaben formuliert, da es um mögliche Ziele und Erwartungen an Hauptschulabsolventen geht, nicht um aktuellen Mathematikunterricht.

Hier geht es jedoch um den Erfolg oder Misserfolg lernschwacher Schüler im aktuellen Unterricht – bezogen auf Schulbücher, Klassenarbeiten und Unterricht.

### **Zum Aufbau der Arbeit**

In einem theoretischen Teil werden zunächst einige Anmerkungen zu Grundlagen des Mathematikunterrichts gegeben (Kapitel 1). Dazu gehören eine kurze Darstellung zweier gegensätzlicher Grundpositionen des Lernens, Bemerkungen zur verwendeten Mathematik der Grund- und Hauptschule sowie didaktische Anmerkungen. Einen wesentlichen Teil machen Beschreibungen von Grundschulhalten aus, obwohl der Titel eine Untersuchung der Leistungen von Hauptschülern nennt. Dies ist begründet durch die Annahme, dass *Rechenschwäche* in erster Linie im Umfeld von Grundschulunterricht diskutiert wird und damit eindeutig Inhalte der Grundschule betrifft. Ob dies auch bei Schwierigkeiten von Hauptschülern der Fall ist, wird die Studie zeigen.

Ein weiteres Kapitel im theoretischen Teil (Kapitel 2) stellt in kurzer Art und Weise das Problemfeld Rechenschwäche dar, soll jedoch keineswegs eine Einführung oder grundlegende Diskussion des Themas leisten. Die Arbeit beschreibt damit nicht das Thema *Rechenschwäche* an sich, wohl aber Aspekte dieses Themas, um Verbindungen zwischen einer *grundschulspezifischen Rechenschwäche* und den *Mathematikleistungen von Hauptschülern* herzustellen.

Ich begnüge mich damit, in beiden Kapiteln eine Übersicht zu schaffen und Anmerkungen zu geben. Die Vertiefung der Inhalte geschieht durch Hinweise auf weiterführende Literatur.

Im empirischen Teil der Arbeit (Kapitel 3 und 4) werden Hypothesen für die Schwierigkeiten von Hauptschülern im Mathematikunterricht entwickelt. Überprüft werden sie durch einen im Rahmen der Studie konstruierten informellen Test (Kapitel 3 – Entwicklung, Durchführung, Auswertung) sowie qualitative Interviews (Kapitel 4 – Entwicklung von Fragen, Durchführung von Videointerviews, qualita-

tive Inhaltsanalyse). Ziel ist es, Aussagen über die speziellen Rechenschwierigkeiten von Hauptschülern zu erhalten und ihre Leistungen inhaltlich einzuordnen.

In einem abschließenden Kapitel (Kapitel 5) werden die Ergebnisse zusammengefasst und mögliche Konsequenzen (u. a. Erweiterungen der Untersuchung, Folgeuntersuchungen) angedacht.