

# Numerische Simulation für Asset/Liability Management im Versicherungswesen <sup>1</sup>

BMBF-Förderschwerpunkt  
Mathematik für Innovationen  
in Industrie und Dienstleistungen

Förderperiode 2004 - 2007

## Schlussbericht

Thomas Gerstner, Michael Griebel, Markus Holtz

28. Januar 2008

<sup>1</sup>Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wurde mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 03GRNHBN gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren.

# 1 Aufgabenstellung und Ablauf des Vorhabens

In diesem ersten Teil des Schlussberichts stellen wir kurz die Problemstellung, die Ausgangslage und die Ziele des Vorhabens zur Zeit der Antragstellung dar.

## 1.1 Problemstellung

Im Rahmen des Asset/Liability Managements (ALM) ist es die Aufgabe eines Lebensversicherungsunternehmens, die Aktiva und Passiva ihrer Versicherungsprodukte verantwortungsvoll zu verwalten. Hierbei müssen gleichzeitig zwei Ziele erreicht werden. Zum einen muss das angelegte Kapital möglichst gewinnbringend angelegt werden (Asset Management). Zum anderen müssen die Verpflichtungen gegenüber den Versicherten eingehalten werden (Liability Management). Diese Verpflichtungen können je nach Produkt sehr komplex aufgebaut sein und zahlreiche Optionsrechte, z.B. Kapitalerhaltsgarantien, Garantiezinsen oder Kündigungrechte (mit entsprechendem Stornoabschlag) für den Kunden enthalten. Neben diesen Verpflichtungen hat die Versicherung die Möglichkeit, erwirtschaftete Überschüsse als Überschussbeteiligung für den Kunden anzulegen, als Schlussüberschuss auszuzahlen, oder zum Reserveabbau zurückzulegen.

Diese Managemententscheidungen hängen von strategischen Überlegungen, regulatorischen Vorgaben und insbesondere von der finanziellen Situation des Versicherungsunternehmens ab. Hierfür müssen die Risiken, die durch Schwankungen der Kapitalmärkte, Veränderungen der Sterblichkeit oder des Stornoverhaltens der Versicherungsnehmer auftreten können, abgeschätzt werden. Ziel des Unternehmens ist es, seine Wertentwicklung zu maximieren, wobei aus Wettbewerbsgründen jedoch auch die Bonuszahlungen an die Versicherungsnehmer möglichst hoch ausfallen sollten.

Im Hinblick auf diese komplexe Problemstellung wird im Rahmen von ALM versucht herauszufinden, wie sich die Verbindlichkeiten mittel- bis längerfristig voraussichtlich entwickeln werden. Dies geschieht entweder durch die Berechnung bestimmter Szenarien (Stresstests), die auf historischen Daten, Expertenmeinungen oder Vorgaben der Aufsichtsbehörden beruhen, oder durch stochastische Modellierung und Simulation. Im zweiten Fall wird mit Hilfe numerischer Simulationsverfahren gemäß eines vorgegebenen stochastischen Modells eine Vielzahl an Szenarien erzeugt, die zukünftige Entwicklungen der wesentlichen Einflussgrößen (z.B. der Zinsen) darstellen und mit Hilfe statistischer Messgrößen ausgewertet werden.

Solche stochastischen Modelle haben in den letzten Jahren sowohl im Risikomanagement als auch in der Produktentwicklung immer mehr an Bedeutung gewonnen, da sie finanzielle Risiken realistischer und marktnäher einschätzen als es durch die Analyse einzelner Szenarien möglich ist. Mittlerweile werden sie auch von regulatorischer Seite (EU Solvency II, International Financial Reporting Standards IFRS) gefordert. Hierfür sind im Rahmen von langfristigen Modellrechnungen eine große Zahl von Erwartungswerten als hochdimensionale Integrale zu berechnen. In der Praxis werden hierfür Monte Carlo Methoden verwendet, die jedoch häufig wegen ihrer geringen Konvergenzrate zu sehr langen Rechenzeiten führen. Eine Optimierung von Versicherungsprodukten, welche eine Vielzahl von Simulationsläufen erfordert, ist aus diesem Grund bisher nur sehr eingeschränkt möglich. Die Entwicklung neuer effizienterer Simulationsverfahren ist daher von großer Bedeutung.

## 1.2 Stand der Forschung und Ausgangslage

Im folgenden wird der Stand der Forschung zur Zeit der Antragsstellung in den von diesem Projekt berührten Forschungsgebieten in Kürze dargestellt. Hierbei gehen wir zunächst auf die Modellbildung und später dann auf die numerische Simulation des Modells ein.

Im Rahmen der Modellbildung muß die Aktiv- und die Passiv-Seite eines Lebensversicherungsproduktes abgebildet werden. Die Aktivseite wird über Kapitalmarktmodelle beschrieben, die auf einer stochastischen Modellierung von Zins- und Aktienraten basieren. Hierfür werden verschiedenste Modelle mit unterschiedlichen Stärken und Schwächen eingesetzt, was die Reproduktion des Marktverhaltens betrifft (z.B. [19]). Neben einfacher Brownscher Bewegung (Wiener Prozess) sind dies Mean Reversion Modelle (Ornstein–Uhlenbeck Prozesse), Mehrfaktormodelle oder autoregressive Modelle (z.B. VARIMA oder GARCH). Je mehr freie Parameter das Modell besitzt, desto besser kann im Prinzip das Marktverhalten modelliert werden, desto mehr Unbekannte müssen jedoch auch bestimmt werden, was insbesondere dann schwierig wird, wenn diese Parameter keinen direkten Marktbezug mehr haben. Zur Modellierung der Passiv-Seite finden sich verschiedene Ansätze in der Literatur (z.B. [4]). Wichtige Punkte sind die Modellierung von Sterblichkeit und Storno und die Festlegung von Managementregeln, welche die Überschussbeteiligung, die Aktionärsbeteiligung und die Kapitalanlagestrategie steuern. Viele Arbeiten in der Literatur basieren allerdings auf sehr vereinfachenden Annahmen, um spezielle Effekte abzubilden oder um analytische Lösungen zu erhalten.

Sobald geeignete Modellannahmen an die Aktiv- und Passiv-Seite getroffen sind, kann mit Hilfe entsprechender Zeitintegrationsverfahren die zukünftige Entwicklung der Zins- und Kapitalraten stochastisch simuliert werden und die davon abhängigen Größen, wie das zukünftige Gesamtkapital oder die zukünftigen Erlöse ermittelt werden. Für einen gegebenen Satz von Eingabeparametern ist ein Erwartungswert als hochdimensionales Integral zu berechnen. Für das ALM ist dann die Simulation für verschiedene Eingabeparameter und damit die Berechnung einer großen Zahl von Erwartungswerten notwendig.

Klassische multivariate Quadraturverfahren [31], wie Produktregeln, eignen sich nicht zur Berechnung solcher Integrale, da bei diesen Verfahren der Aufwand exponentiell mit der Dimension steigt. In diesem Zusammenhang spricht man auch vom Fluch der Dimension [2, 34]. Auch klassische adaptive numerische Integrationsverfahren [11, 10] können den Fluch der Dimension nicht prinzipiell brechen.

Aus diesem Grund werden zur Berechnung solcher Probleme üblicherweise Monte Carlo und Quasi–Monte Carlo–Verfahren eingesetzt, deren Konvergenzordnung nicht oder nur sehr gering von der Dimension des Problems abhängt [20, 25]. Quasi–Monte Carlo–Methoden wurden bereits für verwandte CMO/CLO (collateralized mortgage/loan obligation) Probleme erfolgreich angewandt [7, 26] und in den USA patentiert [32, 33]. Allerdings ist bei diesen Verfahren die Konvergenzrate gering (kleiner als 1), da die Glattheit des Integranden nicht genutzt werden kann. Auf diese Weise sind hohe Genauigkeiten nur mit sehr hohem Aufwand zu erreichen.

Eine Möglichkeit, den Fluch der Dimension zu brechen und dabei gleichzeitig die Glattheit des Integranden zu nutzen, um höhere Konvergenzraten zu erreichen, besteht in der Verwendung sogenannter dünner Gitter [5, 29, 37]. Adaptive Quadraturverfahren basierend auf dünnen Gittern wurden bereits in verschiedensten Anwendungen aus der Physik und Finanzmathematik (u.a. für obige CMO Probleme) mit Erfolg eingesetzt [3, 6, 9, 27]. Insbesondere bei hochdimensionalen Problemen ver-

spricht dabei eine Gewichtung der einzelnen Dimensionen [18, 28, 36] noch bessere Resultate.

### 1.3 Projektziele

Im Rahmen dieses Projektes sollte zunächst ein Gesamtmodell für die zukünftige Entwicklung der Aktiv- und Passivseite eines Lebensversicherungsproduktes aufgestellt werden. Hierbei sollten zeitdiskrete Modelle für die zukünftigen Geldflüsse des Versicherungsproduktes eingesetzt werden. Diese Modelle sollten in enger Zusammenarbeit mit dem Deutschen Herold entwickelt werden und auf die jeweiligen Bedürfnisse angepaßt sein. Weiterhin sollten geeignete stochastische Modelle zur Simulation der Zins- und Kapitalrate (und ggf. weiterer stochastischer Größen) ausgewählt und umgesetzt werden. Bei der Umsetzung der rekursiven Struktur der Modellgleichungen sollte hierbei auf Effizienz durch Wiederverwendung bereits berechneter Größen zu geachtet werden.

Zur Berechnung der Erwartungswerte haben wir die Verwendung von Dünngitter-Integrationsmethoden vorgeschlagen. Der Vorteil dieses Ansatzes ist, daß hier der Aufwand zur Lösung der hochdimensionalen Integrationsprobleme wie bei Monte Carlo Verfahren von der Dimension nahezu unabhängig ist. Im Falle von glatten Integranden ist jedoch die Konvergenzgeschwindigkeit des Dünngitter-Verfahrens erheblich höher als bei den Monte Carlo-artigen Verfahren. Weitere Verbesserungen bringen die Verwendung geschachtelter Quadraturformeln mit maximalen Exaktheitsgrad, dimensions-adaptive Verfeinerung und glatteitserhaltende Transformationen, welche die Kondition des Integrationsproblems verbessern. Mit diesen neuen numerischen Verfahren sollte das Ziel erreicht werden, die im Rahmen des ALM auftretenden Probleme in deutlich kürzeren Laufzeiten zu berechnen, als es mit den bisherigen Verfahren möglich ist.

In einem zweiten Schritt sollte die Effizienz des Dünngitter-Verfahrens durch hierarchisierende Transformationen der Integranden (z.B. mit Brownscher Brücke oder der Karhunen-Loève Zerlegung) in Kombination mit einer dimensions-adaptiven Verfeinerung gesteigert werden und dadurch die effektive Dimension des Problems reduziert werden. In Vorarbeiten [12, 13] wurde gezeigt, daß sich auf diese Weise der Aufwand um mehrere Größenordnungen bei gleicher Genauigkeit reduzieren lässt. Weitere Effizienzsteigerungen sind durch eine Parallelisierung des Verfahrens möglich.

Sobald die Berechnung der Erwartungswerte effizient genug durchgeführt werden kann, sollte in einem dritten Schritt das eigentliche ALM-Problem als Optimierungsproblem, d.h. die Bestimmung der Kenngrößen, wie des Garantiezinses, des Stornoabschlags und der Überschußbeteiligung angegangen werden. Hierbei sollten zusammen mit dem Deutschen Herold entsprechende Optimierungsfunktionale formuliert und minimiert werden, wobei als „inneres“ Problem obige Erwartungswerte berechnet werden müssen. Weiterhin sollten optimale Strategien zum Management und zur dynamischen Bestimmung der Kenngrößen entwickelt werden.

Im Rahmen des Projekts sollte ein Softwareprodukt entstehen, das von der Versicherung zur Produktentwicklung, zum Produktmanagement und zur Risikoabschätzung für die betrachtete Klasse von Versicherungsproblemen eingesetzt werden kann. Dieses Softwareprodukt sollte zunächst anhand einer Reihe von Modellproblemen verifiziert werden. Daraufhin sollten Modellsimulationen basierend auf konkreten Daten, welche vom Deutschen Herold zur Verfügung gestellt werden, durchgeführt werden und die Ergebnisse gemeinsam überprüft werden. Anschließend sollte das Softwareprodukt mit einem geeigneten Benutzerinterface versehen werden.

## 1.4 Beteiligte Projektpartner

Die Arbeiten wurden hauptsächlich am Institut für Numerische Simulation der Universität Bonn durchgeführt. In Bezug auf die Modellierung, die Beschaffung realitätsnaher Daten und die Validierung praktischer Probleme fand eine enge und intensive Zusammenarbeit mit den Mitarbeitern des Deutschen Herolds statt. Insbesondere hat der Partner die Auswahl und Erstellung relevanter Testprobleme und die Validierung der Simulationsergebnisse übernommen.

## 2 Darstellung der Ergebnisse

Im Rahmen des Projekts sind die Arbeiten [14, 15, 16] entstanden, in denen die drei Hauptarbeitspunkte des Projekts

- Modellentwicklung [15]
- Modellanalyse [14] und
- effiziente numerische Berechnung des Modells [16]

umfassend behandelt werden. Die wesentlichen Ergebnisse zu diesen drei Punkten werden im folgenden zusammengefasst und mit den Projektzielen verglichen.

### 2.1 Modellentwicklung

Ein grundlegendes Ziel der Projektes war die Entwicklung eines allgemeinen mathematischen Modells zur stochastischen Simulation der zukünftigen Bilanzentwicklung eines Lebensversicherungsproduktes. Die Ergebnisse, die hierbei erzielt wurden, sind in der Arbeit [15] publiziert. Hier wird ein zeit-diskretes ALM-Modell zur Simulation einer vereinfachten Bilanz eines Lebensversicherungsproduktes vorgeschlagen. Der Simulationsbeginn wird mit  $t = 0$  und das Ende mit  $t = T$  (in Jahren) bezeichnet. Das Zeitintervall  $[0, T]$  wird in  $K$  Perioden  $[t_{k-1}, t_k]$  zerlegt mit  $t_k = k \Delta t$ ,  $k = 1, \dots, K$  und einer Periodenlänge  $\Delta t = T/K$  von einem Monat. Die in unserem Modell verwendeten Bilanzposten zur Zeit  $t_k$  sind in Tabelle 1 dargestellt. Die verschiedenen Modellkomponenten und der Aufbau eines Zeitschrittes des Modells sind in Abbildung 1 zusammengefasst.

Aktiva		Passiva	
Kapital	$C_k$	Deckungskapital	$D_k$
		Lfd. Überschüsse	$B_k$
		Freie Reserve	$F_k$
		Eigenkapital	$Q_k$

Tabelle 1: Vereinfachte Bilanz eines Lebensversicherungsproduktes zum Zeitpunkt  $t_k$ .

Wir nehmen an, dass das Unternehmen sein Kapital entweder in festverzinsliche Anleihen oder in Aktien investiert. Die Entwicklung dieser beiden Anlageklassen wird im Kapitalmarkt-Modell spezifiziert und hier als stochastisch angenommen. Zur Modellierung der Zinsen verwenden wir das Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Modell [8]. Die Aktienkurse folgen einer geometrischen Brownschen Bewegung. Beide Modelle sind durch stochastische Differentialgleichungen gegeben, die über einen (im allgemeinen

negativen) Korrelationsfaktor gekoppelt sind. Aus dem Verlauf der Zinsen und Aktien wird im Aktiva-Modell die Gesamtverzinsung der Kapitalanlagen berechnet. Alle anderen Modellkomponenten, die das Verhalten der Versicherungsnehmer und der Managementabteilung des Unternehmens darstellen, sind als deterministisch gegeben angenommen. Die Abnahme des Vertragsbestandes des Unternehmens auf Grund von Sterblichkeit und Storno wird über Sterbe- bzw. Stornotafeln berücksichtigt, die durch Extrapolation aus historischen Daten gewonnen werden. Die Beiträge, Erlebensfall-, Todesfall- und Stornoleistungen, die sich je nach Produkt aus diesen Annahmen ergeben, werden im Passiva-Modell zu Gesamtzahlungsströmen zusammengefasst. Umschichtungen in der Kapitalanlage, die Deklaration der Überschussbeteiligung und die Festlegung der Aktionärsbeteiligung erfolgt schliesslich im Management-Modell anhand deterministischer Entscheidungsfunktionen, die vom Verhalten der Kapitalmärkte und der Gesamtsituation des Unternehmens abhängen. Konkret haben wir eine dynamische Kapitalanlagestrategie angenommen, die eine vom Management vorgegebene Zielaktienquote verfolgt. Die Deklaration der Überschussbeteiligung erfolgt auf Basis der Reservesituation des Unternehmens anhand des Mechanismus, der in [17] vorgeschlagen und untersucht wurde. Sämtliche resultierende Modellgleichungen werden in [15] im Detail hergeleitet und zusammengestellt. Alle Terme im Modell können rekursiv berechnet werden, so dass eine leichte Implementierung und eine effiziente Berechnung der Gleichungen sichergestellt ist. Der modulare Aufbau des Modells erleichtert Erweiterungen und Modifikationen im Hinblick auf unternehmensspezifische Anforderungen.

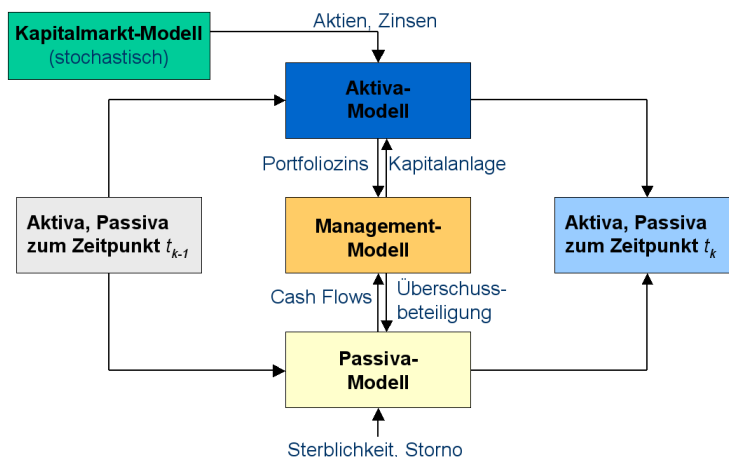


Abbildung 1: Aufbau eines Zeitschrittes des ALM-Modells.

Als Zielgrößen werden statistische Kennzahlen betrachtet, die auf der vereinfachten Bilanz in Tabelle 1 beruhen und die Erträge bzw. das Risiko für das Unternehmen widerspiegeln. Insbesondere wird die pfadabhängige kumulative Ruinwahrscheinlichkeit

$$PD_k = \mathbb{P} \left( \min_{j=1, \dots, k} Q_j < 0 \right)$$

als ein Mass für das Risiko und der Erwartungswert  $\mathbb{E}[Q_k]$  des Eigenkapitals als ein Mass für die Erträge der Aktionäre im Zeitintervall  $[0, t_k]$  betrachtet. Anhand der Ergebnisse können Managemententscheidungen (z.B. die Kapitalanlage) oder Produktparameter (z.B. Stornoabschläge) optimiert werden.

Die Eigenschaften des Modells sind ausführlich in [15, 16] untersucht. Durch seinen rekursiven Aufbau ist das Modell sehr effizient berechenbar. Die Simulation des gesamten Modellrahmens mit 1000 Szenarien, 500 repräsentativen Versicherungsverträgen und 120 Zeitschritten erfordert auf einem Desktoprechner weniger als eine Minute Rechenzeit. Gleichzeitig ist das Modell in der Lage die wichtigsten Effekte des ALM, wie

- den Einfluss von Storno und Sterblichkeit
- den Einfluss unterschiedlicher Kapitalanlagestrategien
- den Einfluss unterschiedlicher Überschussdeklarationsmechanismen
- Diversifikationseffekte und optimale Aktienquoten
- Liquiditätsrisiken und optimale Laufzeiten für Anleihen

abzubilden.

Das Modell wurde in der Programmiersprache C++ implementiert. Die Anzahl an Operationen, die bei der Simulation eines Szenarios benötigt werden ist von der Ordnung  $O(m \cdot K)$ , wobei  $m$  die Anzahl an Versicherungsverträgen und  $K$  die Anzahl an simulierten Perioden bezeichnet. Für  $m = 500$  und  $K = 120$  dauert die Simulation eines Szenarios ungefähr 0.04 Sekunden auf einer dual Intel(R) Xeon(TM) CPU 3.06GH Workstation. Die Anzahl an Szenarien, die generiert werden müssen, hängt von den Genauigkeitsanforderungen, den Modellparametern und der verwendeten numerischen Methode ab, und wird im Abschnitt 2.3 diskutiert. Zur einfachen Bedienbarkeit des Simulationscodes und zur Darstellung der Ergebnisse wurde eine web-basierte Benutzerschnittstelle entworfen und programmiert. Ein Screenshot der Benutzerschnittstelle und der Ergebnisausgabe ist in Abbildung 2 dargestellt.

## 2.2 Modellanalyse

Nach Abschluss der Modellierung sind zunächst die numerischen Eigenschaften des Modells untersucht wurden. Die Hauptarbeitspunkte waren hierbei wie folgt:

- Integraldarstellung der Risikokennzahlen
- Identifikation von Spezialfällen mit analytischen Lösungen
- Transformationen zur Reduktion der effektiven Dimension des Integranden
- Bestimmung der effektiven Dimension des ALM-Problems.

Die wichtigsten erzielten Ergebnisse werden wir im folgenden zusammenfassen. Für weitere Details verweisen wir auf die Arbeiten [14, 15].

Durch die nicht-linearen Pfadabhängigkeiten, Garantien und Optionsrechte der Versicherungsprodukte und Managementfunktionen sind geschlossene Darstellungen für die statistischen Kennzahlen im Allgemeinen nicht möglich, so dass zu ihrer Berechnung auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden muss. Hierzu ist es hilfreich, die Kennzahlen zunächst als Integrale darzustellen. Im Modell [15] ist jedes Kapitalmarktszenario durch  $2K$  unabhängige normal-verteilte Zufallszahlen  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{2K}) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$  bestimmt. Der Erwartungswert aller Bilanzposten zur Zeit  $t_K$

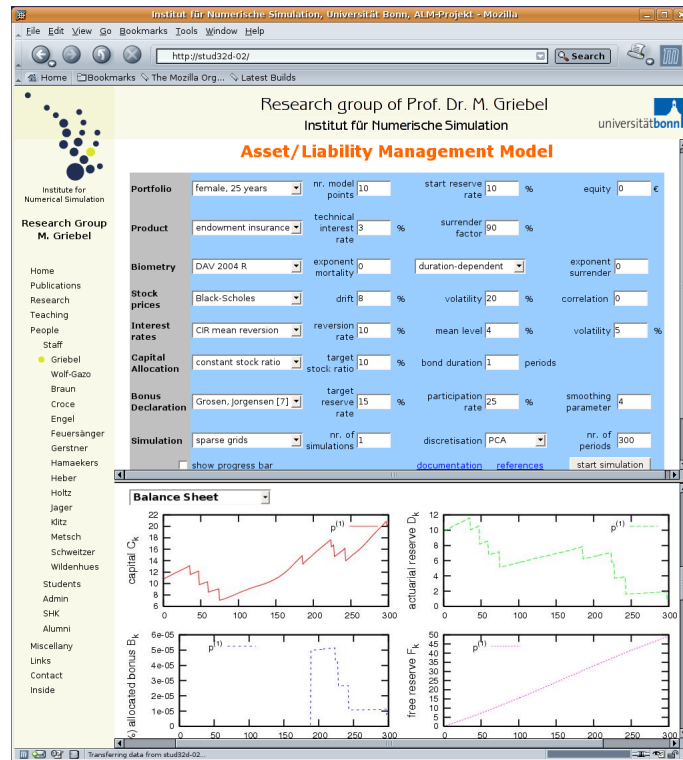


Abbildung 2: Web-basierte Benutzerschnittstelle des ALM-Modells.

kann somit als  $2K$ -dimensionales Integral dargestellt werden. Für das Eigenkapital erhält man z.B.

$$E[Q_K] = \int_{\mathbb{R}^{2K}} Q_K(\mathbf{y}) \frac{e^{-\mathbf{y}^T \mathbf{y}/2}}{(2\pi)^K} d\mathbf{y}. \quad (1)$$

Eine monatliche Zeitdiskretisierung und ein Simulationszeitraum von  $T = 10$  Jahren führt somit auf die Berechnung eines  $240$ -dimensionalen Integrals. Mit der Transformation  $y_i = \Phi^{-1}(x_i)$  mit der inversen kumulativen Normalverteilung  $\Phi^{-1}$  kann das Integral (1) in den  $2K$ -dimensionalen Einheitswürfel transformiert werden. Man erhält

$$E[Q_K] = \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

mit  $d = 2K$  und  $f(\mathbf{x}) = Q_K(\Phi^{-1}(\mathbf{x}))$ . Zur effizienten Berechnung von  $\Phi^{-1}(x_i)$  verwenden wir die Moro-Methode [23].

Nur nach starken Vereinfachungen des Modells können die statistischen Kennzahlen in geschlossener Form angegeben werden. Im Rahmen der Projektarbeit haben wir mehrere dieser Spezialfälle identifiziert. Auf diese Weise konnte die korrekte Implementierung der numerischen Verfahren verifiziert und ihre Konvergenzeigenschaften in einem ersten Schritt untersucht werden. Die Ergebnisse zur effizienten numerischen Berechnung dieser Integrale werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

Die Frage, welche numerischen Verfahren gut zur Berechnung des Integrals (2) geeignet sind, hängt von mehreren verschiedenen Einflussgrößen ab. Im Falle deterministischer Integrationsverfahren ist hierbei eine wesentlich Größe die sogenannte effekti-



ve Dimension des Problems, die in dem Projekt untersucht und bestimmt wurde. Im Allgemeinen ist die effektive Dimension abhängig von der nominalen Dimension  $d$ , von der Diskretisierung der zugrundeliegenden stochastischen Prozessen und allen weiteren Modellparametern. Man unterscheidet die effektive Dimension im Superpositions- und im Trunkationssinn, siehe [7, 35].

In diesem Zusammenhang wurden am Beispiel der Konstruktion der Kapitalmarktpfade Techniken untersucht, mit denen die effektive Dimension reduziert werden kann ohne Vereinfachungen des Modell vorzunehmen. Üblicherweise wird der zugrundeliegende, im Allgemeinen mehrdimensionale Wiener-Prozess durch eine random walk Konstruktion approximiert. In vielen Fällen kann allerdings eine wesentlich geringere effektive Dimension (im Trunkationssinne) und damit eine schnellere Konvergenz der deterministischen Integrationsverfahren erreicht werden, wenn statt dessen eine Brownsche Brücke oder eine Hauptkomponentenzerlegung (PCA) der Kovarianzmatrix des Gaussprozesses durchgeführt wird, wie es für Optionsbewertungsaufgaben in [1, 24] vorgeschlagen wurde.

Für typische Parameterwerte sind in Tabelle 2 die effektiven Dimensionen  $d_t$  des ALM-Problems aufgelistet, welche bei den drei verschiedenen Pfadkonstruktionen auftreten. Die effektiven Dimensionen sind hierbei numerisch mit der in [35] vorgeschlagenen Methode bestimmt wurden.

Im Vergleich zu einer Random-Walk-Diskretisierung sieht man, dass die Brownsche Brücke and die PCA-Konstruktion zu einer substantiellen Reduktion der effektiven Dimension führen. Beim Random Walk ist die effektive Dimension fast genauso groß wie die nominale Dimension  $d$ . In den beiden anderen Fällen ist die effektive Dimension dagegen beinahe unabhängig von  $d$  und ist durch  $d_t = 16$  selbst für sehr hohe nominale Dimensionen wie  $d = 512$  beschränkt. Im Fall der PCA-Konstruktion ist  $d_t$  sogar leicht fallend für große  $d$ . Dies steht im Zusammenhang mit dem sogenannten "concentration of measure" Phänomen, siehe [21]. Ein Nachteil der PCA-Konstruktion ist, dass der Rechenaufwand von der Ordnung  $O(d^2)$  ist und damit höher als bei den anderen beiden Konstruktionen, die nur  $O(d)$  viele Operationen benötigen.

$d$	Random walk	Brownsche Brücke	PCA-Konst.
32	32	7	12
64	64	7	14
128	124	13	12
256	248	15	8
512	496	16	8

Tabelle 2: Effektive Dimensionen  $d_t$  (im Trunkationssinn) des ALM Integranden (2) für verschiedene nominale Dimensionen  $d$  und verschiedene Konvarianzmatrixzerlegungen.

Weitere Untersuchungen haben ergeben, dass das ALM-Problem nicht nur oft eine sehr geringe effektive Dimension im Trunkationssinn, sondern auch im Superpositionssinn haben. In vielen Fällen beträgt die Superpositionssdimension lediglich eins. Dies zeigt, dass ALM-Probleme häufig "fast" additive Funktionen sind und motiviert letztendlich den Einsatz deterministischer Integrationsverfahren, wie wir sie im nächsten Abschnitt betrachten werden.

### 2.3 Effiziente numerische Berechnung

Ein wesentliches Projektziel ist die Anwendung deterministischer Integrationsverfahren, wie quasi-Monte Carlo and Dünngitterverfahren, zur Berechnung der Integrale, die im ALM auftreten. Die wichtigsten Ergebnisse hierzu werden im folgenden zusammengefasst. Weitere Details finden sich in der Arbeit [16].

Alle betrachteten numerischen Verfahren approximieren das Integral (2) durch eine gewichtete Summe von  $n$  Funktionswerten

$$\int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\mathbf{x}_i) \quad (3)$$

und unterscheiden sich durch die Wahl der Gewichte  $w_i \in \mathbb{R}$  und Punkte  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ . Jeder Punkt  $\mathbf{x}_i$  entspricht hierbei genau einem Kapitalmarktszenario. Die Anzahl  $n$  der Punkte entspricht der Anzahl an Simulationen. Die Wahl des Verfahrens sollte von der Dimension und die Glattheitsklasse der Funktion  $f$  abhängen.

Im folgenden werden die Ergebnisse der numerischen Experimente für die folgenden Verfahren dargestellt:

- Monte Carlo-Simulation,
- Quasi-Monte Carlo-Integration basierend auf Sobol Punktfolgen (siehe [22, 30]),
- dimensions-adaptive Dünne Gitter (siehe [13]) basierend auf Gauss-Hermite Quadraturregeln.

Weitere umfangreiche numerische Tests haben gezeigt, dass das Sobol quasi-Monte Carlo-Verfahren und die dimensions-adaptiven Gauss-Hermite Dünne Gitter die effizientesten Vertreter von verschiedenen quasi-Monte Carlo-Verfahren und verschiedenen Dünngitterverfahren sind. Bei den quasi-Monte Carlo-Verfahren haben wir Halton, Faure und Sobol Niederdiskrepanzfolgen und drei verschiedene Lattice Regeln mit und ohne Randomisierung verglichen. Bei den Dünngitterverfahren haben wir die Trapez-, Clenshaw-Curtis, Patterson, Gauss-Legendre und die Gauss-Hermite Regel und verschiedene Gitterverfeinerungsstrategien betrachtet.

In den folgenden Ergebnissen ist die Brownsche-Brücke-Pfadkonstruktion für Aktienpreise und Zinsraten verwendet, da diese zu einer substantiellen Reduktion der effektiven Dimension aber zu keinem zusätzlichen Rechenaufwand wie bei der PCA-Konstruktion führt (vgl. Abschnitt 2.2). Die effektive Dimension hat keinen Einfluss auf Monte Carlo-Verfahren. Quasi-Monte Carlo-Verfahren profitieren aber von niedriger effektiver Dimension aufgrund der Tatsache, dass ihre Punkte oft in niedrigen Dimensionen besser gleichverteilt sind als in hohen. Dünngitterverfahren können eine niedrige effektive Dimension durch eine dimensions-adaptive Verfeinerung ausnutzen, siehe [13].

Die Ergebnisse für  $d = 32$  und  $d = 512$  sind in Abbildung 3 zusammengefasst, in der die Anzahl  $n$  der Funktionsauswertungen dargestellt ist, die benötigt wird, um eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen.

Man sieht, dass quasi-Monte Carlo- und Dünngitterverfahren bei gleicher Rechenzeit oft deutlich genauer sind als Monte Carlo-Simulationen. Quasi-Monte Carlo-Verfahren konvergieren beinahe unabhängig von der Dimension und sind sogar für sehr hohe Dimensionen  $d = 512$  effizienter als Monte Carlo-Simulation. Dünne Gitter sind die effizientesten Verfahren bei moderaten Dimensionen. Die Konvergenzrate

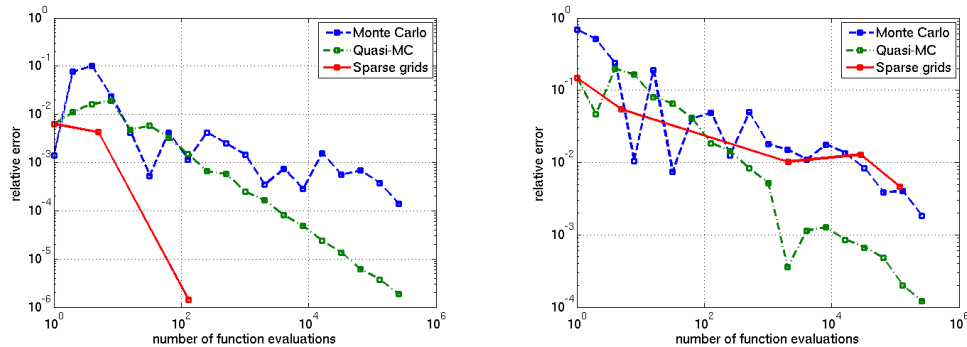


Abbildung 3: Relative Fehler und benötigte Anzahl an Funktionsauswertungen der verschiedenen numerischen Verfahren zur Berechnung des Erwartungswertes (2) mit  $d = 32$  (links) und  $d = 512$  (rechts).

verschlechtert sich allerdings in sehr hohen Dimensionen und bei Modellparametern oder Managementfunktionen, die zu unglatteren Integranden in (1) führen. In diesen Fällen sind zusätzliche Transformationen des Integrals notwendig, um die Glattheit des Integranden zu verbessern.

## Literatur

- [1] P. Acworth, M. Broadie, and P. Glasserman. A comparison of some Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods for option pricing. In P. Hellekallek and H. Niederreiter, editors, *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing*, pages 1–18. Springer, 1998.
- [2] R. Bellman. *Dynamic Programming*. University Press, Princeton, 1957.
- [3] T. Bonk. A new algorithm for multi-dimensional adaptive numerical quadrature. In W. Hackbusch and G. Wittum, editors, *Adaptive Methods – Algorithms, Theory, and Applications, NNFM 46*, pages 54–68. Vieweg, 1994.
- [4] E. Briys and F. Varenne. On the risk of life insurance liabilities: Debunking some common pitfalls. *J. Risk and Insurance*, 64:37–57, 1997.
- [5] H.-J. Bungartz. Dünne Gitter und deren Anwendung bei der adaptiven Lösung der dreidimensionalen Poisson-Gleichung. PhD thesis, Institut für Informatik, TU München, 1992.
- [6] H.-J. Bungartz and S. Dirnstorfer. Multivariate quadrature on adaptive sparse grids. *Computing*, 71(1):89–114, 2003.
- [7] R. E. Caflisch, W. J. Morokoff, and A. B. Owen. Valuation of mortgage backed securities using Brownian bridges to reduce effective dimension. *J. Comp. Finance*, 1(1):27–46, 1997.
- [8] J. Cox, J. Ingersoll, and S. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53:385–407, 1985.

- [9] S. Dirnstorfer. Adaptive numerische Quadratur höherer Ordnung auf dünnen Gittern. Master's thesis, Institut für Informatik, TU München, 2000.
- [10] P. V. Dooren and L. D. Ridder. An adaptive algorithm for numerical integration over an  $n$ -dimensional cube. *J. Comp. Appl. Math.*, 2:207–217, 1976.
- [11] A. Genz and A. Malik. An adaptive algorithm for numerical integration over an  $n$ -dimensional rectangular region. *J. Comp. Appl. Math.*, 6:295–302, 1980.
- [12] T. Gerstner and M. Griebel. Numerical integration using sparse grids. *Numerical Algorithms*, 18:209–232, 1998.
- [13] T. Gerstner and M. Griebel. Dimension-adaptive tensor-product quadrature. *Computing*, 71(1):65–87, 2003.
- [14] T. Gerstner, M. Griebel, and M. Holtz. The Effective Dimension of Asset-Liability Management Problems in Life Insurance. In C. Fernandes, H. Schmidli, and N. Kolev, editors, *Proc. Third Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance*, pages 148–153, 2007.
- [15] T. Gerstner, M. Griebel, M. Holtz, R. Goschnick, and M. Haep. A general asset-liability management model for the efficient simulation of portfolios of life insurance policies. *Insurance: Math. Economics*, 2007. In press.
- [16] T. Gerstner, M. Griebel, M. Holtz, R. Goschnick, and M. Haep. Numerical simulation methods for asset-liability management in life insurance. BMBF-Projektbericht, erhältlich unter <http://wissrech.ins.uni-bonn.de/research/pub/holtz/ALM.pdf>, 2007.
- [17] A. Grosen and P. Jorgensen. Fair valuation of life insurance liabilities: The impact of interest rate guarantees, surrender options and bonus policies. *Insurance: Math. Economics*, 26(1):37–57, 2000.
- [18] M. Hegland. Adaptive sparse grids. In *Proceedings of CTAC, Brisbane, July 16–18, 2001*, 2001.
- [19] J. Hull. *Options, Futures and other Derivative Securities*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.
- [20] M. Kalos and P. Whitlock. *Monte Carlo Methods*. John Wiley & Sons, 1986.
- [21] M. Ledoux. *The Concentration of Measure Phenomenon*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2001.
- [22] C. Lemieux, M. Cieslak, and K. Luttmer. RandQMC user's guide: A package for randomized quasi-Monte Carlo methods in C. Available at <http://www.math.ucalgary.ca/~lemieux>, 2004.
- [23] B. Moro. The full Monte. *RISK*, 8(2), 1995.
- [24] B. Moskowitz and R. Calfisch. Smoothness and dimension reduction in quasi-Monte Carlo methods. *J. Math. Comp. Modeling*, 23:37–54, 1996.
- [25] H. Niederreiter. *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*. SIAM, Philadelphia, 1992.

- [26] S. Paskov and J. Traub. Faster valuation of financial derivatives. *J. Portfolio Management*, 22:113–120, 1995.
- [27] K. Petras. Smolyak cubature of given polynomial degree with few nodes for increasing dimension. *Numer. Math.*, 93:729–753, 2003.
- [28] L. Plaskota. The exponent of discrepancy of sparse grids is at least 2.1933. *Adv. Comp. Math.*, 12:3–24, 2000.
- [29] S. Smolyak. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 4:240–243, 1963.
- [30] I. M. Sobol. The distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *J. Comp. Mathematics and Math. Physics*, 7:86–112, 1967.
- [31] A. Stroud. *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice Hall, 1971.
- [32] J. Traub, S. Paskov, and I. Vanderhoof. Estimation method and system for complex securities using low-discrepancy deterministic sequences. United States Patent US005940810A, 1999.
- [33] J. Traub, S. Paskov, I. Vanderhoof, and A. Papageorgiou. Portfolio structuring using low-discrepancy deterministic sequences. United States Patent US006058377A, 2000.
- [34] J. Traub, G. Wasilkowski, and H. Woźniakowski. *Information-based Complexity*. Academic Press, New York, 1988.
- [35] X. Wang and K.-T. Fang. The effective dimension and quasi-Monte Carlo integration. *J. Complexity*, 19(2):101 – 124, 2003.
- [36] G. W. Wasilkowski and H. Woźniakowski. Weighted tensor product algorithms for linear multivariate problems. *J. Complexity*, 15:402–447, 1999.
- [37] C. Zenger. Sparse grids. In W. Hackbusch, editor, *Parallel Algorithms for Partial Differential Equations, NFM 31*. Vieweg, 1991.