

Numerische Simulation für Asset/Liability Management im Versicherungswesen ¹

BMBF-Förderschwerpunkt
Mathematik für Innovationen
in Industrie und Dienstleistungen

Förderperiode 2004 - 2007

Schlussbericht

Thomas Gerstner, Michael Griebel, Markus Holtz

28. Januar 2008

¹Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wurde mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 03GRNHBN gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren.

1 Aufgabenstellung und Ablauf des Vorhabens

In diesem ersten Teil des Schlussberichts stellen wir kurz die Problemstellung, die Ausgangslage und die Ziele des Vorhabens zur Zeit der Antragstellung dar.

1.1 Problemstellung

Im Rahmen des Asset/Liability Managements (ALM) ist es die Aufgabe eines Lebensversicherungsunternehmens, die Aktiva und Passiva ihrer Versicherungsprodukte verantwortungsvoll zu verwalten. Hierbei müssen gleichzeitig zwei Ziele erreicht werden. Zum einen muss das angelegte Kapital möglichst gewinnbringend angelegt werden (Asset Management). Zum anderen müssen die Verpflichtungen gegenüber den Versicherten eingehalten werden (Liability Management). Diese Verpflichtungen können je nach Produkt sehr komplex aufgebaut sein und zahlreiche Optionsrechte, z.B. Kapitalerhaltsgarantien, Garantiezinsen oder Kündigungrechte (mit entsprechendem Stornoabschlag) für den Kunden enthalten. Neben diesen Verpflichtungen hat die Versicherung die Möglichkeit, erwirtschaftete Überschüsse als Überschussbeteiligung für den Kunden anzulegen, als Schlussüberschuss auszuzahlen, oder zum Reserveabbau zurückzulegen.

Diese Managemententscheidungen hängen von strategischen Überlegungen, regulatorischen Vorgaben und insbesondere von der finanziellen Situation des Versicherungsunternehmens ab. Hierfür müssen die Risiken, die durch Schwankungen der Kapitalmärkte, Veränderungen der Sterblichkeit oder des Stornoverhaltens der Versicherungsnehmer auftreten können, abgeschätzt werden. Ziel des Unternehmens ist es, seine Wertentwicklung zu maximieren, wobei aus Wettbewerbsgründen jedoch auch die Bonuszahlungen an die Versicherungsnehmer möglichst hoch ausfallen sollten.

Im Hinblick auf diese komplexe Problemstellung wird im Rahmen von ALM versucht herauszufinden, wie sich die Verbindlichkeiten mittel- bis längerfristig voraussichtlich entwickeln werden. Dies geschieht entweder durch die Berechnung bestimmter Szenarien (Stresstests), die auf historischen Daten, Expertenmeinungen oder Vorgaben der Aufsichtsbehörden beruhen, oder durch stochastische Modellierung und Simulation. Im zweiten Fall wird mit Hilfe numerischer Simulationsverfahren gemäß eines vorgegebenen stochastischen Modells eine Vielzahl an Szenarien erzeugt, die zukünftige Entwicklungen der wesentlichen Einflussgrößen (z.B. der Zinsen) darstellen und mit Hilfe statistischer Messgrößen ausgewertet werden.

Solche stochastischen Modelle haben in den letzten Jahren sowohl im Risikomanagement als auch in der Produktentwicklung immer mehr an Bedeutung gewonnen, da sie finanzielle Risiken realistischer und marktnäher einschätzen als es durch die Analyse einzelner Szenarien möglich ist. Mittlerweile werden sie auch von regulatorischer Seite (EU Solvency II, International Financial Reporting Standards IFRS) gefordert. Hierfür sind im Rahmen von langfristigen Modellrechnungen eine große Zahl von Erwartungswerten als hochdimensionale Integrale zu berechnen. In der Praxis werden hierfür Monte Carlo Methoden verwendet, die jedoch häufig wegen ihrer geringen Konvergenzrate zu sehr langen Rechenzeiten führen. Eine Optimierung von Versicherungsprodukten, welche eine Vielzahl von Simulationsläufen erfordert, ist aus diesem Grund bisher nur sehr eingeschränkt möglich. Die Entwicklung neuer effizienterer Simulationsverfahren ist daher von großer Bedeutung.

1.2 Stand der Forschung und Ausgangslage

Im folgenden wird der Stand der Forschung zur Zeit der Antragsstellung in den von diesem Projekt berührten Forschungsgebieten in Kürze dargestellt. Hierbei gehen wir zunächst auf die Modellbildung und später dann auf die numerische Simulation des Modells ein.

Im Rahmen der Modellbildung muß die Aktiv- und die Passiv-Seite eines Lebensversicherungsproduktes abgebildet werden. Die Aktivseite wird über Kapitalmarktmodelle beschrieben, die auf einer stochastischen Modellierung von Zins- und Aktienraten basieren. Hierfür werden verschiedenste Modelle mit unterschiedlichen Stärken und Schwächen eingesetzt, was die Reproduktion des Marktverhaltens betrifft (z.B. [19]). Neben einfacher Brownscher Bewegung (Wiener Prozess) sind dies Mean Reversion Modelle (Ornstein–Uhlenbeck Prozesse), Mehrfaktormodelle oder autoregressive Modelle (z.B. VARIMA oder GARCH). Je mehr freie Parameter das Modell besitzt, desto besser kann im Prinzip das Marktverhalten modelliert werden, desto mehr Unbekannte müssen jedoch auch bestimmt werden, was insbesondere dann schwierig wird, wenn diese Parameter keinen direkten Marktbezug mehr haben. Zur Modellierung der Passiv-Seite finden sich verschiedene Ansätze in der Literatur (z.B. [4]). Wichtige Punkte sind die Modellierung von Sterblichkeit und Storno und die Festlegung von Managementregeln, welche die Überschussbeteiligung, die Aktionärsbeteiligung und die Kapitalanlagestrategie steuern. Viele Arbeiten in der Literatur basieren allerdings auf sehr vereinfachenden Annahmen, um spezielle Effekte abzubilden oder um analytische Lösungen zu erhalten.

Sobald geeignete Modellannahmen an die Aktiv- und Passiv-Seite getroffen sind, kann mit Hilfe entsprechender Zeitintegrationsverfahren die zukünftige Entwicklung der Zins- und Kapitalraten stochastisch simuliert werden und die davon abhängigen Größen, wie das zukünftige Gesamtkapital oder die zukünftigen Erlöse ermittelt werden. Für einen gegebenen Satz von Eingabeparametern ist ein Erwartungswert als hochdimensionales Integral zu berechnen. Für das ALM ist dann die Simulation für verschiedene Eingabeparameter und damit die Berechnung einer großen Zahl von Erwartungswerten notwendig.

Klassische multivariate Quadraturverfahren [31], wie Produktregeln, eignen sich nicht zur Berechnung solcher Integrale, da bei diesen Verfahren der Aufwand exponentiell mit der Dimension steigt. In diesem Zusammenhang spricht man auch vom Fluch der Dimension [2, 34]. Auch klassische adaptive numerische Integrationsverfahren [11, 10] können den Fluch der Dimension nicht prinzipiell brechen.

Aus diesem Grund werden zur Berechnung solcher Probleme üblicherweise Monte Carlo und Quasi-Monte Carlo-Verfahren eingesetzt, deren Konvergenzordnung nicht oder nur sehr gering von der Dimension des Problems abhängt [20, 25]. Quasi-Monte Carlo-Methoden wurden bereits für verwandte CMO/CLO (collateralized mortgage/loan obligation) Probleme erfolgreich angewandt [7, 26] und in den USA patentiert [32, 33]. Allerdings ist bei diesen Verfahren die Konvergenzrate gering (kleiner als 1), da die Glattheit des Integranden nicht genutzt werden kann. Auf diese Weise sind hohe Genauigkeiten nur mit sehr hohem Aufwand zu erreichen.

Eine Möglichkeit, den Fluch der Dimension zu brechen und dabei gleichzeitig die Glattheit des Integranden zu nutzen, um höhere Konvergenzraten zu erreichen, besteht in der Verwendung sogenannter dünner Gitter [5, 29, 37]. Adaptive Quadraturverfahren basierend auf dünnen Gittern wurden bereits in verschiedensten Anwendungen aus der Physik und Finanzmathematik (u.a. für obige CMO Probleme) mit Erfolg eingesetzt [3, 6, 9, 27]. Insbesondere bei hochdimensionalen Problemen ver-

spricht dabei eine Gewichtung der einzelnen Dimensionen [18, 28, 36] noch bessere Resultate.

1.3 Projektziele

Im Rahmen dieses Projektes sollte zunächst ein Gesamtmodell für die zukünftige Entwicklung der Aktiv- und Passivseite eines Lebensversicherungsproduktes aufgestellt werden. Hierbei sollten zeitdiskrete Modelle für die zukünftigen Geldflüsse des Versicherungsproduktes eingesetzt werden. Diese Modelle sollten in enger Zusammenarbeit mit dem Deutschen Herold entwickelt werden und auf die jeweiligen Bedürfnisse angepaßt sein. Weiterhin sollten geeignete stochastische Modelle zur Simulation der Zins- und Kapitalrate (und ggf. weiterer stochastischer Größen) ausgewählt und umgesetzt werden. Bei der Umsetzung der rekursiven Struktur der Modellgleichungen sollte hierbei auf Effizienz durch Wiederverwendung bereits berechneter Größen zu geachtet werden.

Zur Berechnung der Erwartungswerte haben wir die Verwendung von Dünngitter-Integrationsmethoden vorgeschlagen. Der Vorteil dieses Ansatzes ist, daß hier der Aufwand zur Lösung der hochdimensionalen Integrationsprobleme wie bei Monte Carlo Verfahren von der Dimension nahezu unabhängig ist. Im Falle von glatten Integranden ist jedoch die Konvergenzgeschwindigkeit des Dünngitter-Verfahrens erheblich höher als bei den Monte Carlo-artigen Verfahren. Weitere Verbesserungen bringen die Verwendung geschachtelter Quadraturformeln mit maximalen Exaktheitsgrad, dimensions-adaptive Verfeinerung und glatteitserhaltende Transformationen, welche die Kondition des Integrationsproblems verbessern. Mit diesen neuen numerischen Verfahren sollte das Ziel erreicht werden, die im Rahmen des ALM auftretenden Probleme in deutlich kürzeren Laufzeiten zu berechnen, als es mit den bisherigen Verfahren möglich ist.

In einem zweiten Schritt sollte die Effizienz des Dünngitter-Verfahrens durch hierarchisierende Transformationen der Integranden (z.B. mit Brownscher Brücke oder der Karhunen-Loève Zerlegung) in Kombination mit einer dimensions-adaptiven Verfeinerung gesteigert werden und dadurch die effektive Dimension des Problems reduziert werden. In Vorarbeiten [12, 13] wurde gezeigt, daß sich auf diese Weise der Aufwand um mehrere Größenordnungen bei gleicher Genauigkeit reduzieren lässt. Weitere Effizienzsteigerungen sind durch eine Parallelisierung des Verfahrens möglich.

Sobald die Berechnung der Erwartungswerte effizient genug durchgeführt werden kann, sollte in einem dritten Schritt das eigentliche ALM-Problem als Optimierungsproblem, d.h. die Bestimmung der Kenngrößen, wie des Garantiezinses, des Stornoabschlags und der Überschußbeteiligung angegangen werden. Hierbei sollten zusammen mit dem Deutschen Herold entsprechende Optimierungsfunktionale formuliert und minimiert werden, wobei als „inneres“ Problem obige Erwartungswerte berechnet werden müssen. Weiterhin sollten optimale Strategien zum Management und zur dynamischen Bestimmung der Kenngrößen entwickelt werden.

Im Rahmen des Projekts sollte ein Softwareprodukt entstehen, das von der Versicherung zur Produktentwicklung, zum Produktmanagement und zur Risikoabschätzung für die betrachtete Klasse von Versicherungsproblemen eingesetzt werden kann. Dieses Softwareprodukt sollte zunächst anhand einer Reihe von Modellproblemen verifiziert werden. Daraufhin sollten Modellsimulationen basierend auf konkreten Daten, welche vom Deutschen Herold zur Verfügung gestellt werden, durchgeführt werden und die Ergebnisse gemeinsam überprüft werden. Anschließend sollte das Softwareprodukt mit einem geeigneten Benutzerinterface versehen werden.

1.4 Beteiligte Projektpartner

Die Arbeiten wurden hauptsächlich am Institut für Numerische Simulation der Universität Bonn durchgeführt. In Bezug auf die Modellierung, die Beschaffung realitätsnaher Daten und die Validierung praktischer Probleme fand eine enge und intensive Zusammenarbeit mit den Mitarbeitern des Deutschen Herolds statt. Insbesondere hat der Partner die Auswahl und Erstellung relevanter Testprobleme und die Validierung der Simulationsergebnisse übernommen.

2 Darstellung der Ergebnisse

Im Rahmen des Projekts sind die Arbeiten [14, 15, 16] entstanden, in denen die drei Hauptarbeitspunkte des Projekts

- Modellentwicklung [15]
- Modellanalyse [14] und
- effiziente numerische Berechnung des Modells [16]

umfassend behandelt werden. Die wesentlichen Ergebnisse zu diesen drei Punkten werden im folgenden zusammengefasst und mit den Projektzielen verglichen.

2.1 Modellentwicklung

Ein grundlegendes Ziel der Projektes war die Entwicklung eines allgemeinen mathematischen Modells zur stochastischen Simulation der zukünftigen Bilanzentwicklung eines Lebensversicherungsproduktes. Die Ergebnisse, die hierbei erzielt wurden, sind in der Arbeit [15] publiziert. Hier wird ein zeit-diskretes ALM-Modell zur Simulation einer vereinfachten Bilanz eines Lebensversicherungsproduktes vorgeschlagen. Der Simulationsbeginn wird mit $t = 0$ und das Ende mit $t = T$ (in Jahren) bezeichnet. Das Zeitintervall $[0, T]$ wird in K Perioden $[t_{k-1}, t_k]$ zerlegt mit $t_k = k \Delta t$, $k = 1, \dots, K$ und einer Periodenlänge $\Delta t = T/K$ von einem Monat. Die in unserem Modell verwendeten Bilanzposten zur Zeit t_k sind in Tabelle 1 dargestellt. Die verschiedenen Modellkomponenten und der Aufbau eines Zeitschrittes des Modells sind in Abbildung 1 zusammengefasst.

Aktiva		Passiva	
Kapital	C_k	Deckungskapital	D_k
		Lfd. Überschüsse	B_k
		Freie Reserve	F_k
		Eigenkapital	Q_k

Tabelle 1: Vereinfachte Bilanz eines Lebensversicherungsproduktes zum Zeitpunkt t_k .

Wir nehmen an, dass das Unternehmen sein Kapital entweder in festverzinsliche Anleihen oder in Aktien investiert. Die Entwicklung dieser beiden Anlageklassen wird im Kapitalmarkt-Modell spezifiziert und hier als stochastisch angenommen. Zur Modellierung der Zinsen verwenden wir das Cox-Ingersoll-Ross (CIR) Modell [8]. Die Aktienkurse folgen einer geometrischen Brownschen Bewegung. Beide Modelle sind durch stochastische Differentialgleichungen gegeben, die über einen (im allgemeinen