

TSCHALL_PROG

Analytisches Prognosemodell zur
Ermittlung tieffrequenter
Schallabstrahlung von
Maschinengeräuschen ins Wasser
(Förderkennzeichen: BMWK 03SX468B)

Schlussbericht im Rahmen des Verbundvorhabens

TSCHALL – Tieffrequente Schallabstrahlung von
Maschinengeräuschen ins Wasser

23.12.2022

Prof. DSc. (Tech.) Sören Ehlers

Technische Universität Hamburg
Institut für Konstruktion und Festigkeit von Schiffen (M-10)
Am Schwarzenberg Campus 4 C
21073 Hamburg
ehlers@tuhh.de

Gefördert durch:



Bundesministerium
für Wirtschaft
und Klimaschutz

aufgrund eines Beschlusses
des Deutschen Bundestages

SCHLUSSBERICHT

Analytisches Prognosemodell zur Ermittlung tieffrequenter Schallabstrahlung von Maschinengeräuschen ins Wasser

Förderkennzeichen: BMWK 03SX468B

Laufzeit: 01.10.2018 – 30.06.2022

Ausführende Stelle: Technische Universität Hamburg
Institut für Konstruktion und Festigkeit von Schiffen (M-10)
Am Schwarzenberg Campus 4 C
21073 Hamburg

Berichtersteller: Sören Ehlers

Das diesem Bericht zugrunde liegende Vorhaben wurde mit Mitteln des Bundesministeriums für Wirtschaft und Klimaschutz unter dem Förderkennzeichen BMWK 03SX468B und unter der Trägerschaft des Projektträgers Jülich gefördert. Die Verantwortung für die Inhalte dieses Schlussberichts liegt bei den Autorinnen und Autoren.

Gefördert durch:



aufgrund eines Beschlusses
des Deutschen Bundestages



Inhaltsverzeichnis

1. Kurzdarstellung.....	1
1.1. Hintergrund und Aufgabenstellung.....	1
1.2. Bezug zu förderpolitischen Zielen	2
1.3. Voraussetzungen	3
1.4. Projektziele, Planung und Ablauf	3
1.4.1. Projektziele	3
1.4.2. Planung und Ablauf	3
1.5. Stand von Technik und Wissenschaft.....	4
1.6. Zusammenarbeit mit Dritten.....	6
2. Eingehende Darstellung	7
2.1. Untersuchung der analytischen Lösung zur Berechnung von Schallabstrahlungsproblemen.....	7
2.2. Untersuchung der numerischen Methoden zur Berechnung von Schallabstrahlungsproblemen.....	8
1.1. Einfluss der Impedanz auf die Schallabstrahlung.....	12
1.2. Übersicht zahlenmäßiger Nachweis.....	16
1.3. Angemessenheit der geleisteten Arbeit.....	16
1.4. Verwertung, voraussichtlicher Nutzen und Anschlussfähigkeit	16
1.5. Fortschritte an anderen Stellen	16
1.6. Veröffentlichungen im Rahmen des Vorhabens	17
References.....	18
Anhang.....	20

1. Kurzdarstellung

1.1. Hintergrund und Aufgabenstellung

Der unter Wasser abgestrahlte Schall hat durch den zunehmenden Schiffsverkehr und der ansteigenden Schiffsgrößen in den letzten Jahrzehnten drastisch zugenommen [1, 2]. Insbesondere tieffrequente Geräusche überschneiden sich mit wichtigen Frequenzbereichen von Meeressäugern, die z.B. deren Kommunikation und Navigationsfähigkeit sichern. Die Lärmverschmutzung der Meere hat somit einen weitreichenden Einfluss auf das marine Ökosystem [2]. Die Schallabstrahlung von Schiffen wird von Strukturvibrationen und Propeller- sowie Motorerregungsfrequenzen erzeugt [3], wobei der niederfrequente Bereich primär durch Strukturvibrationen, angeregt durch die Hauptmaschine, abgedeckt wird [4].

Bereits 2014 veröffentlichte die International Maritime Organization (IMO) eine empfehlende Richtlinie zur Reduzierung des Unterwasserlärms der Handelsschifffahrt zum Schutz der Meeresumwelt [5]. Außerdem wurden die nationalen Anforderungen an eine geringe akustische Signatur für das Durchqueren sensibler Seegebiete durch Geschwindigkeitsbegrenzungen, wie z.B. im Glacier Bay National Park Alaska, durchgesetzt [6]. Zusätzlich können Schiffe durch die Einhaltung von Anforderungen der Klassifikationsgesellschaft „Det Norske Veritas“ eine erweiterte Klassennotation „SILENT“ erhalten, die eine geringe Schallabstrahlung der Schiffe zeigt [7]. Es ist davon auszugehen, dass nationale Behörden weitere Seegebiete ausweisen werden und Reglementierungen des Unterwasserschalls erlassen. Somit könnte die Reduzierung von Unterwasserschall zu einer gesetzlichen Verpflichtung führen. Im Fokus sind hierbei Seegebiete, die wegen ihrer marinen Fauna als besonders schützenswert gelten. Folglich ist das Interesse an einer Einschätzung des zu erwartenden Unterwasserschallpegels eines Neubaus für die Schiffseigner*innen und somit der Werften groß.

Da die Untersuchung von Unterwasserschallabstrahlungen in der Handelsschifffahrt bisher keine Relevanz gefunden hat, liegen kaum Berechnungsmethoden oder empirisches Wissen zur Bestimmung oder Abschätzung des Unterwasserschallpegels vor und Abweichungen zwischen bisherigen Prognosen und Berechnungen zeigen sich im Wesentlichen als zu stark.

Das übergeordnete Ziel des TSCHALL-Projekts ist die prinzipielle Gesetzmäßigkeit der tieffrequenten Schallanregung, -ausbreitung und -abstrahlung von dem Schiffsrumpf in das umgebende Wasser und deren Beeinflussbarkeit zu untersuchen und in einem Prognosemodell umzusetzen.

Die Ergebnisse des Projektes ermöglichen die Schaffung einer nationalen Expertise auf dem Gebiet der Prognose und der Reduzierung von tieffrequentem Unterwasserschall. Diese Expertise wäre ein Alleinstellungsmerkmal und enormer Wettbewerbsvorteil des deutschen Schiffbaustandortes da sie als Basis dienen wird, zukünftige Schiffe mit geringerer

Schallabstrahlung ins Wasser zu entwickeln. Im Einzelnen adressiert das Verbundvorhaben die Verbesserung der drei Projektdimensionen Preis, Zeit und Qualität bei allen relevanten Schiffbauprojekten.

Preis: Durch die erhöhte Prognosegenauigkeit reduzieren sich Risikoaufschläge. Konkret können damit aufwändige Schallschutzmaßnahmen durch kostengünstige Varianten ersetzt werden, wenn damit die Kriterien weiterhin eingehalten werden können.

Zeit: Das zu entwickelnde Prognosemodell soll relevante Informationen in einem früheren Stadium des Schiffsentwurfes liefern, als es heutzutage möglich ist. Dadurch werden zeitaufwendige Änderungen und Anpassungen in späteren Projektphasen reduziert.

Qualität: Durch die gewonnenen Erkenntnisse können Schiffe leiser gebaut werden. Forderungen an den abgestrahlten Unterwasserschall können leichter eingehalten werden. Höhere akustische Qualität kann gewährleistet werden.

Folglich erhöht die Schaffung einer solchen Kernkompetenz die Wahrscheinlichkeit, dass auch internationale Kund*innen bei hohen akustischen Anforderungen den deutschen Schiffbaustandort aufsuchen.

Im Kontext des Gesamtvorhabens befasst sich TSCHALL_PROG mit Genauigkeitsbetrachtungen von einer analytischen Lösung zur Schallabstrahlung einer angeregten Struktur in ein umgebendes Fluid, die der Validierung von numerischen Methoden dienen soll. Weiterhin wird die Modellgenerierung und Berechnung von Schallabstrahlungsproblemen mit einer numerischen Methode genauer untersucht und Richtlinien zur numerischen Berechnung dieser Probleme aufgesetzt. Die möglichen Abweichungen zwischen numerischer und analytischer Lösung werden außerdem auf den ihr zugrundeliegenden Annahmen hin analysiert. Im nächsten Schritt wird das vorläufige – von DW-ShipConsult entwickelte – Prognosemodell untersucht und optimiert.

1.2. Bezug zu förderpolitischen Zielen

Der Antrag für das skizzierte Projekt wird im Rahmen des Programms „Maritime Technologien der nächsten Generation“ gestellt und somit den durch das BMWK identifizierten Herausforderungen an den deutschen Schiffbaustandort durch die internationale Marktsituation Rechnung getragen. Das Förderprogramm unterstützt die Erhöhung der Wettbewerbsfähigkeit der deutschen Schiffbauindustrie. Im Mittelpunkt des Interesses stehen dabei u.a. eine drastische Verkürzung des Innovationszyklus im Schiffbau, welche in diesem Vorhaben durch die Entwicklung und Implementierung eines Prognosemodells zur Ermittlung der tieffrequenten Schallabstrahlung von Maschinengeräuschen ins Wasser auf der Basis von maßstäblichen Messungen realisiert wird, da hierdurch existierende und ungenaue Methoden ersetzt werden.

1.3. Voraussetzungen

Das Institut TUHH M-10 beschäftigt sich seit vielen Jahren mit Forschung an Schiffen und Offshore Strukturen unter extremen Bedingungen, durch Nutzung experimenteller, analytischer und numerischer Analysetechniken. Prof. Ehlers hat eine lange Geschichte im Bereich der Kollisions- und Stoßsimulation sowie mit Experimenten in diesem Gebiet. In dem Institut für Konstruktion und Festigkeit von Schiffen können groß- bis vollmaßstäbliche Strukturen mit Messtechnik ausgestattet werden, die flexibel an die Bedürfnisse der Forschung und Entwicklung angepasst werden kann. Ferner hat Prof. Ehlers in seiner Industrietätigkeit bei as2con.com, einem durch in mitbegründeten Betrieb, zahlreiche Schiffe hinsichtlich Vibrationen und Geräuschentwicklung berechnet und erfolgreich Emissionslösungen umgesetzt.

1.4. Projektziele, Planung und Ablauf

1.4.1. Projektziele

Die genaue Motivation für das TSCHALL_PROG Projekt ist, die prinzipiellen Gesetzmäßigkeiten der tieffrequenten Schallanregung, -ausbreitung und -abstrahlung von dem Schiffsrumpf in das umgebende Wasser und deren Beeinflussbarkeit zu untersuchen und in einem Prognosemodell umzusetzen. Daher sind die Ziele in TSCHALL_PROG:

- Die Herleitung von einer analytischen Lösung zur Schallabstrahlungsberechnung einer einfachen Struktur, um prinzipielle Einflussparameter zu identifizieren
- Entwicklung von Empfehlungen zur numerischen Berechnung von Schallabstrahlungsproblemen

1.4.2. Planung und Ablauf

Das Gesamtvorhaben TSCHALL wurde vom 01. Oktober 2018 bis 30. Juni 2022 bearbeitet. Die Laufzeit von TSCHALL wurde ursprünglich bis 30. September 2021 geplant, wurde mit einem Antrag auf kostenneutrale Laufzeitverlängerung bis 30. Juni 2022 erweitert. Das Teilprojekt TSCHALL_PROG wurde vom 01. September 2019 bis 30. September 2021 bearbeitet, wobei es eine Unterbrechung der Arbeit im ersten Halbjahr 2020 für drei Monate gab.

Der Projektträger wurde regelmäßig und entsprechend den Nebenbestimmungen NKBF 98 über den Fortgang des Projekts in Kenntnis gesetzt. Eine ausführlichere Beschreibung des Ablaufs des Projekts und der Ergebnisse befindet sich in Abschnitt 2 dieses Schlussberichts.

Im Laufe des Gesamtvorhabens TSCHALL fanden vier Projekttreffen in Präsenz statt. Alle weiteren Projekttreffen wurden aufgrund der Corona Pandemie online abgehalten.

1.5. Stand von Technik und Wissenschaft

Während Propellerschall Gegenstand einiger geförderter Projekte war (EU: SILENV, SONIC; AQUO; Deutschland: PropNoise, NoiseLES, SmartPS) gibt es zum Einfluss des maschinenerregten Unterwasserschalls nur Erfahrungen aus dem Marineschiffbau. Untersuchungen am Forschungsschiff Sonne, Beratungstätigkeit um eisbrechende Forschungsschiffe mit hohen Anforderungen an Unterwasserschall (aktuell: Polarstern 2) und Auswertungen einer Containerschiffsvermessung unter NoiseLES zeigen, dass traditionelle Prognosemodelle bei tiefen Frequenzen unsicher sind, weil eine starke Parameterkopplung eintritt: Die Kraftanregung über eine Maschine resultiert bei tiefen Frequenzen nicht mehr in reiner Schallausbreitung vom Anregepunkt ins Wasser, sondern führt zu einer globalen Antwort der Struktur um die Maschine herum, wie in Abbildung 1 illustriert.

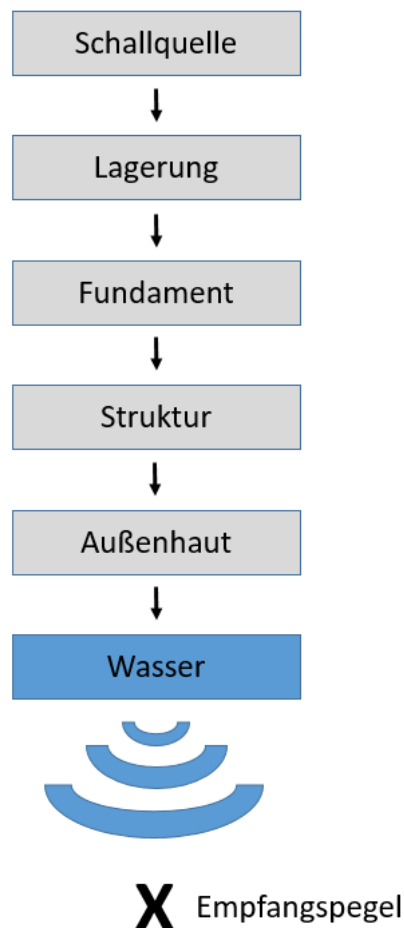


Abbildung 1: Übersicht der Schallausbreitung

Zentrales Problem ist die starke Kopplung der mechanischen Eigenschaften der Struktur mit Abstrahlung und Ausbreitung. Dazu kommt der Luftschallübertragungsweg, der sich in Untersuchungen bei DW-ShipConsult als scheinbar zunehmend dominierend gegenüber dem Fundamentweg ausbildet, je größer das Schiff ist.

Das Verhalten der Struktur zusammen mit dem umgebenden Wasser ist inzwischen mit einer Kombination der Finiten Elemente Methode (FEM) und der Randelemente Methode (BEM) theoretisch berechenbar, wie in einer ersten internen Untersuchung mit einem zweidimensionalen Rechenmodell bei DW-ShipConsult ermittelt wurde. Es gibt jedoch einige Hindernisse bei der Anwendung:

- Die Angaben der Hersteller insbesondere zu den Körperschallquellpegeln, die bisher nur als mittlere Pegel an den Auflagern angegeben werden, führen zu zu hohen Prognosen gegenüber einer Beschreibung über die genaue phasenrichtige Bewegung der Auflager
- Die numerischen Methoden liefern zu wenig Einblick in die unterliegenden Mechanismen, wesentlichen mechanischen Parameter und deren Beeinflussungsmöglichkeiten,
- Der Rechenaufwand ist sehr hoch, weil große dreidimensionale Modelle eingesetzt werden müssen,
- Der Einsatz dieser Methoden ist nicht prozessgerecht, das heißt der Einsatz ist innerhalb eines Schiffsprojekts erst so spät möglich, dass die Ergebnisse für aus der Rechnung abgeleitete Änderungserfordernisse zu spät vorliegen.

Insgesamt ist die Unsicherheit größer als 10 Dezibel. Eine Abdeckung des Risikos über konstruktive Maßnahmen gerät bei großen Schiffen an die Grenze des Machbaren oder ist mit einem hohen Aufwand verbunden (Erhöhung des Doppelbodens, Verkleinerung des Schottabstandes, Kapselung von großen Motoren, Entwicklung von Aktivlagerungen, ...). Andere numerische Verfahren, wie die Statistical Energy Analysis (SEA) sind ungeeignet, da sie nur bei Strukturen und Frequenzbereichen einsetzbar sind, die eine hohe Eigenfrequenzdichte aufweisen, was bei den hier zu betrachtenden Frequenzen nicht der Fall ist.

Der Bedarf nach einem verbesserten Verfahren besteht für folgende Schiffe:

- Schiffe mit zwei und mehr Propellern: Hierzu zählen größere (auch eisbrechende) Forschungsschiffe, Megayachten und Kreuzfahrtschiffe,
- Herkömmliche Handelsschiffe insbesondere solche mit hoher Antriebsleistung, insbesondere Containerschiffe und schnelle Spezialfrachter.

Die im Fokus stehenden Schallquellen sind Hauptmaschinen und Dieselgeneratoren. Bei 2-Schrauben-Schiffen stellen sie häufig die dominierenden Schallquellen dar. Bei Handelsschiffen mit relativ leisen Propellern tragen sie ebenfalls bei und können oberhalb etwa 200 Hz den abgestrahlten Schall dominieren.

Bisher sind existierende Methoden für die Berechnung von tieffrequenter Schallausbreitung zu ungenau und nicht validiert. Daher ist die Entwicklung einer nationalen Expertise in diesem Gebiet ausschlaggebend für gegenwärtige und zukünftige Projekte in der deutschen Wirtschaftszone. Die Ergebnisse werden als Basis dienen, zukünftige Schiffe mit geringerer Schallabstrahlung ins Wasser zu entwickeln.

1.6. Zusammenarbeit mit Dritten

Das Teilvorhaben TSCHALL_PROG gehört zu dem übergeordneten Gesamtvorhaben TSCHALL, welches sich mit der tieffrequenten Schallabstrahlung von Maschinengeräuschen ins Wasser beschäftigt. Hierbei steht die Untersuchung der prinzipiellen Gesetzmäßigkeit der tieffrequenten Schallanregung, -ausbreitung und -abstrahlung vom Schiffsrumpf in das Wasser und deren Beeinflussbarkeit sowie die Entwicklung eines Prognosemodells zur Abschätzung von tieffrequentem Unterwasserschall von Handelsschiffen im Vordergrund. Hierzu wurde eine ausgewählte Gruppe von Expert*innen zusammengeführt: Expertise zur Schallausbreitung im Schiff, Schallausbreitung unter Wasser, Ursachen und Resultate von Schall im maritimen Umfeld (DW-ShipConsult), Bereitstellung von Messungen an Bord und im Wasser von Kreuzfahrtschiffen (MV Werften), Bereitstellung von Messungen an Bord und im Wasser von Megayachten (Nobiskrug), Bereitstellung von Motoren für Prüfstandsmessungen und die Ergebnisse aus eigenen numerischen Rechenmodellen für Motoren und motorspezifische Berechnungen (MAN Energy Solutions SE) und wissenschaftliche Untersuchungen und numerische Berechnungen zur Erstellung eines Prognosemodells (TUHH).

Nur durch die Interaktion aller fünf Projektpartner kann das oben genannte Ziel des Projektes erreicht werden, da keiner der Partner in der Lage ist diese interagierenden Disziplinen alleine abzudecken. DW-ShipConsult übernimmt ferner die Rolle des Verbundkoordinators.

2. Eingehende Darstellung

Im Folgenden werden nur die Arbeitspakete des Gesamtvorhabens beschrieben, die unter der Mitwirkung der TUHH M-10 in diesem Teilvorhaben bestritten wurden. Entsprechend werden nur die Arbeiten beschrieben, die von TUHH M-10 bestritten wurden bzw. an welchen TUHH M-10 maßgeblich beteiligt war.

Im ersten Arbeitspaket des Gesamtvorhabens wurde von dem Projektpartner DW-ShipConsult ein vorläufiges Prognosemodell zur Berechnung von Schallabstrahlungsproblemen von Schiffen entwickelt und im zweiten Arbeitspaket wurden Messungen an Schiffen durchgeführt. Die TUHH M-10 beteiligte sich durch Unterstützung bei Messungen am Schiff im Arbeitspaket 2. Die primäre Beteiligung der TUHH M-10 am Forschungsprojekt liegt im Arbeitspaket 3.

2.1. Untersuchung der analytischen Lösung zur Berechnung von Schallabstrahlungsproblemen

Zur Entwicklung eines funktionsfähigen, analytischen Prognosemodells ist die Untersuchung der analytischen Grundlage notwendig. Das im ersten Arbeitspaket entwickelte vorläufige Prognosemodell wird durch die analytische Lösung eines Schallabstrahlungsproblems validiert. Die erste Aufgabe im Zuge der Genauigkeitsbetrachtungen und die Extraktion von Parametern und Kennzahlen (Arbeitspaket 3) stellte demnach die Untersuchung einer analytischen Lösung zur Berechnung der Schallabstrahlung einer unendlichen, dünnen Platte dar.

Die analytische Lösung zur Berechnung der Schallabstrahlung einer unendlichen Platte, angeregt durch eine Punktkraft, tauchte erstmals 1967 in einem Lehrbuch zu Körperschall [8] auf und konnte weder durch andere Quellen belegt werden, noch war die Herleitung der Formel auf den ersten Blick nachvollziehbar. Im Zuge der Untersuchung wurde eine spätere Auflage des Buches verwendet. Alle folgenden Annahmen und Formeln entstammen der Quelle [9].

Folgende Annahmen gelten für die analytische Lösung der abgestrahlten Schalleistung einer angeregten Platte:

- Unendliche Platte
- Keine Inhomogenitäten
- Keine Diskontinuitäten
- Gilt nur unterhalb der Grenzfrequenz
- Örtliche Verteilung von Anregung und Systemantwort ist gleich
- Anregung durch eine Punktkraft
- Dünne Platte ohne Berücksichtigung der Schubsteife und Drehträgeit

Im weiteren Verlauf wurde die analytische Lösung hergeleitet. Die detaillierte mathematische Darstellung der Herleitung ist im Anhang aufgezeigt. In dieser zeigt sich eine Abweichung zur Formel aus der Quelle [9]. Diese ist an entsprechender Stelle im Anhang benannt.

Zum einen liefert die genaue Untersuchung der analytischen Lösung in wie weit diese als Validierung für numerische Lösungen oder als Vergleich mit Ergebnissen aus einem Prognosemodell genutzt werden können und zum anderen zeigt die Herleitung der analytischen Lösung die in diesem Fall einfließenden physikalischen Parameter auf. Diese sind die anregende Kraft, die Eigenschaften des umgebenden Fluids, die Masse pro Fläche der Platte sowie die Frequenz. Eben diese können somit vorerst in numerischen Berechnungen untersucht werden und in das Prognosemodell einfließen.

2.2. Untersuchung der numerischen Methoden zur Berechnung von Schallabstrahlungsproblemen

Zur numerischen Berechnung von Schallabstrahlungsproblemen wurde die Finite Elemente Methode in Ansys Workbench, Harmonic Acoustics verwendet. Da das Akustik Paket erst in jüngster Vergangenheit implementiert wurde und demnach bisher nicht ausführlich dokumentiert ist, wurden auch in der Numerik Genauigkeitsbetrachtungen durchgeführt, insbesondere um die Validierung der numerischen Lösung durch die analytische sicherzustellen. Auch in numerischen Berechnungen werden Annahmen getroffen, um das komplizierte mathematische Problem lösen zu können.

Folgende Annahmen gelten für die numerische Berechnung:

- Kompressibles Fluid (geringe Schwankungen)
- Rotationsfreie Bewegung
- Keine Strömung, stehendes Gewässer
- Keine Körperkräfte
- Geringe Druckänderungen
- Adiabatisch, reversibel
- Newtonsches Fluid
- Dynamische Viskosität ist druckunabhängig
- Isotropes, homogenes Fluid
- Stoksche Hypothese

Weiterhin wurde die Herleitung der numerischen Berechnung nachvollzogen, siehe Anhang 2.

Es wurde festgestellt, dass sich die getroffenen Annahmen der analytischen und numerischen Lösung nicht widersprechen und die analytische Lösung für einfache Strukturen als Validierung verwendet werden kann. Unter Berücksichtigung der analytischen Lösung und durch die Durchführung von Konvergenzstudien wurde die Geometrie des zu modellierenden Fluidbereichs erarbeitet, die notwendige Dimension des numerischen Modells und deren

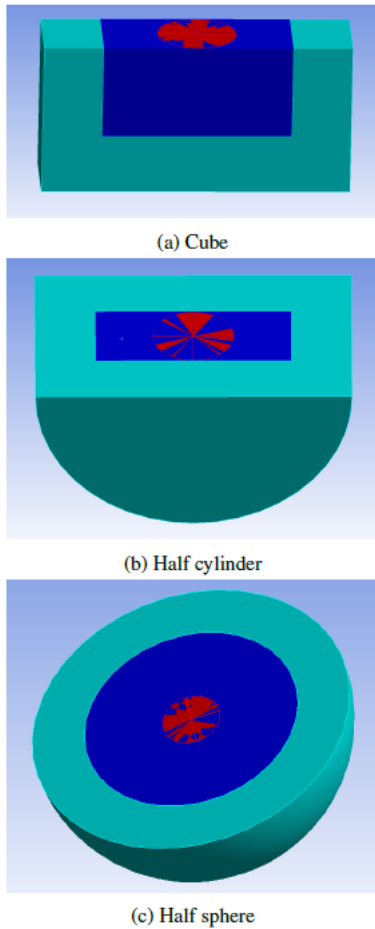


Abbildung 1: Untersuchte Geometrien des Fluidmodells

siehe Abbildung 1.

Die größte Übereinstimmung zwischen numerischer und analytischer Lösung zeigte sich bei der Verwendung der Halbkugel-Geometrie.

Im weiteren Verlauf wurde der notwendige Radius der Halbkugel (dunkeblauer Bereich) festgelegt. Durchgeführte Konvergenzstudien des Software Supports cadfem [12] und eigene Konvergenzstudien zeigten, dass der Mindestradius eine halbe Wellenlänge betragen sollte, wenn der Schalldruck das gewünschte Simulationsergebnis ist (siehe Formel i)) und eine Viertel Wellenlänge, wenn die Schallleistung das gewünschte Ergebnis ist (siehe Formel ii)).

$$i) R_{Fluid} = 0,5 \frac{c_0}{f_{min}}$$

$$ii) R_{Fluid} = 0,25 \frac{c_0}{f_{min}}$$

Weitere Konvergenzstudien zeigten, dass die Dicke der absorbierenden Randbedingung (Perfectly Matched Layers – in hellblau dargestellt) mindesten drei Schichten und mindestens eine Drittel Wellenlänge betragen sollte (siehe Formel iii)).

$$\text{iii) } t_{PML} = \frac{1}{3} \frac{c_0}{f_{min}}$$

Bezüglich der Elementgröße wurde die Empfehlung, dass sechs Elemente pro Wellenlänge genutzt werden sollten, übernommen [11].

Weiterhin wurden die notwendigen Randbedingungen für das numerische Modell untersucht. Die Anwendung der Sommerfeld-Randbedingung zur Imitation einer unendlichen Domain zeigte sich als sinnvoll. Es wurde dafür die absorbierende Randbedingung Perfectly Matched Layers verwendet. Weiterhin erwies sich die Verwendung einer Dirichlet Randbedingung am äußersten Rand des Modells als sinnvoll, indem auf dieser Fläche der Druck zu null gesetzt wurde. Zusätzlich war die Definition einer Fluid-Solid-Interface notwendig, um die Kopplung der Struktur und dem umgebenden Fluid zu garantieren. Diese Randbedingung wurde unterhalb der Platte auf der Fluidoberfläche und der Unterseite der Platte selbst gesetzt. Die Ergebnisse der Simulationen wurden im akustischen Fernfeld ausgewertet, demnach musste der Übergang von Nah- zu Fernfeld definiert werden. Hier wurde die Übergangsfläche von Fluidbereich zur absorbierenden Randbedingung ausgewählt. Als letzte Randbedingung wurde die Impedanz von Luft auf der Wasseroberfläche aufgebracht, diese Randbedingung zeigte sich jedoch aufgrund der geringen Impedanz von Luft als nicht sonderlich einflussreich. Mit diesen Vorgaben konnten gute Ergebnisse generiert werden, welche durch die analytische Lösung validiert werden konnten. In Abbildung 2 wird ein beispielhafter Vergleich von beiden Arten der Berechnung gezeigt. Der Verlauf des Schallleistungspegels der numerischen Lösung über den untersuchten Frequenzbereich von 20 bis 250 Hz mit einem Frequenzintervall von 5 Hz zeigt den gleichen Anstieg wie die analytische Lösung einer unendlichen Platte mit der selben Massenverteilung und der selben Kraftanregung von 1 N. Deutliche Abweichungen zur analytischen Lösung, wie beispielsweise bei etwa 70 Hz, zeigen eine Eigenfrequenz des numerischen Modells. Wird eine Eigenfrequenz getroffen, ist der abgestrahlte Schallleistungspegel im Vergleich zur numerischen Lösung deutlich erhöht.

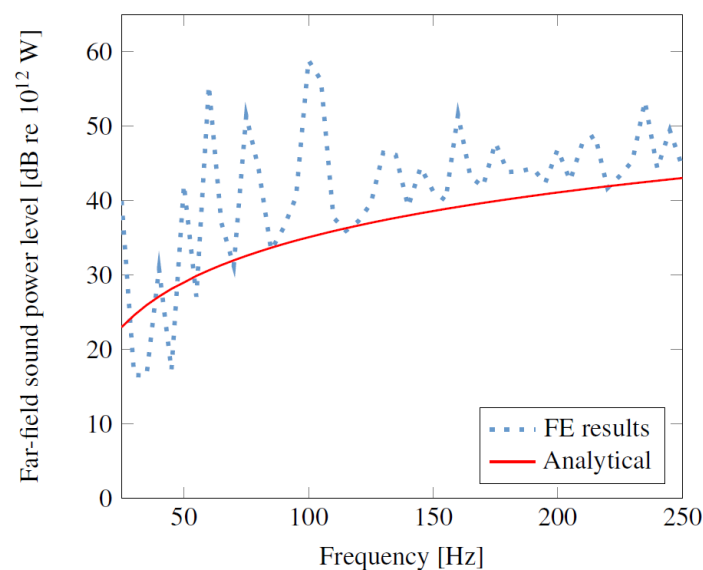


Abbildung 2: Vergleich analytischer und numerischer Lösung

Um die Schwankungen genauer zu untersuchen, wurden Rechnungen mit dem gleichen Modell für unterschiedliche Frequenzintervalle von 5 bis 50 Hz durchgeführt, da insbesondere im niedrigeren Frequenzbereich sprunghafte Abweichungen zur analytischen Lösung auftreten. Bei einer feineren Auflösung zeigen sich häufiger Abweichungen zur analytischen Lösung, da die Wahrscheinlichkeit höher ist, dass eben jene Frequenz eine Eigenfrequenz der endlichen Platte oder eine Raummode des Modells trifft. Abbildung 3 zeigt die Ergebnisse der durchgeführten Rechnungen für 5, 2 und 1 Hz Intervalle. Bis etwa 15 Hz sind die sprunghaften Abweichungen zur analytischen Lösung deutlich erkennbar. Diese liegen vermutlich in dem Verhältnis von Wellenlänge und Modellgröße, also der Abstand von Anregung zum Auswertungspunkt, begründet.

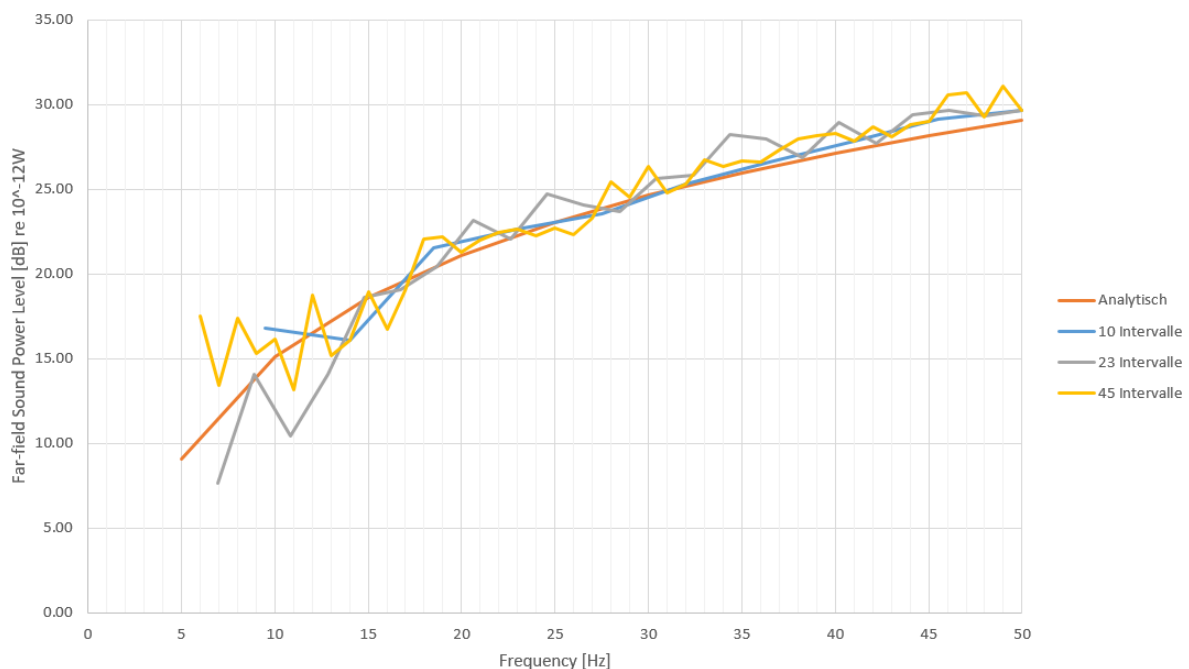


Abbildung 3: FE-Ergebnisse mit verschiedenen Frequenzintervallen im Vergleich zur analytischen Lösung

Um die Eigenfrequenzen und Raummoden des Modells zu bestimmen, wurden akustische Modalanalysen des Modells aufgesetzt. Der Rechenaufwand war jedoch zu hoch für die Kapazitäten des Clusters der TUHH, sodass keine Ergebnisse generiert werden konnten und die Hypothese, dass es sich bei den Abweichungen um Eigenfrequenzen und Raummoden des Modells handelt, nicht bestätigt werden.

Auch der Rechenaufwand in Schallabstrahlungsberechnungen ist aufgrund der Vielzahl an Elementen im Frequenzbereich bis 250 Hz enorm und der Cluster der TUHH weist die Kapazitäten nicht auf, um größere Strukturen oder gar ganze Schiffe zu berechnen. Im

weiteren Verlauf wurde daher die Rayleigh-Methode und die Kopplung von BEM (boundary element method) und FEM untersucht. Die Verwendung der Rayleigh-Methode eignet sich im Projekt TSCHALL nicht, da die Ungenauigkeiten bei mehr als 5 dB liegen könnten. Eine Kopplung von FEM und BEM hat zur Folge, dass der Körperschall entstehend durch die Hauptmaschine mittels FEM bis zur Außenhaut des Schiffes beschrieben werden kann. Die Struktur wird also mit bekannten 3D Elementen diskretisiert. Die durch FEM berechneten Geschwindigkeitsvektoren an der Außenhaut können weiter als Randbedingungen für BEM Berechnungen verwendet werden. Mittels BEM kann die Schallabstrahlung ins Unendliche simuliert werden. Der Vorteil der Kopplung von FEM und BEM stellt die deutliche Reduzierung von Knoten bzw. Elementen dar, da der Fluidbereich für BEM Berechnungen nicht diskretisiert wird, sondern nur die Oberfläche der Struktur. Damit wird ein 3D Problem mit 2D Elementen bestimmt. Weiterhin ist die Verwendung von absorbierenden Randbedingungen o.ä. nicht notwendig. Die Ergebnisse im Fernfeld werden durch BEM über sogenannte „field points“ im post-processing bestimmt. Die mathematische Formulierung der BEM führt allerdings zu vollbesetzten Matrizen im Gleichungssystem, welches aufgrund der Einsparung der dritten Dimension kleiner ausfällt. Zusätzlich könnte die Rückkopplung von Fluid auf die Struktur in der gekoppelten Rechnung zu erhöhtem Rechenaufwand führen. Im Konsortium des Projekts TSCHALL wurde allerdings beschlossen, dass die Verwendung der BEM aufgrund der komplexen mathematischen Formulierung in dem Projekt nicht weiterverfolgt wird.

2.3 Einfluss der Impedanz auf die Schallabstrahlung

Unter dem Arbeitspunkt „Extrahieren von Parametern und Kennzahlen“ wurde der Einfluss der Impedanz auf die Schallabstrahlung grundlegend untersucht. Es wurden Impedanzuntersuchungen durchgeführt und diese mit der von DW ShipConsult erstellten Impedanz Benchmark verglichen. Für diese Untersuchungen wurde die Geschwindigkeit v am Kraftangriffspunkt der angeregten Struktur mittels Ansys Workbench Harmonic Acoustics ermittelt und unter Verwendung der Kraftamplitude F der Impedanzpegel der Struktur mit dem Bezugswert 1 Ns/m ermittelt, siehe Abbildung 4.

$$\text{iv) } L_Z = 10 \log \left(\frac{F/v}{1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}} \right)^2$$

Abbildung 4 zeigt exemplarisch die Ergebnisse einer runden Platte mit einem Radius von 20 m und einer mittigen Anregung von 1 N. Es wurden Impedanzpegel und der abgestrahlte Schallleistungspegel im Übergang zum Fernfeld mittels einer harmonischen Analyse in Ansys Workbench bestimmt. Die Impedanz Benchmark, die empirische Abstrahlungsformel sowie die empirische Abstrahlungsformel +5dB aus vorangegangenen Arbeiten von DW ShipConsult wurden zusätzlich in die Grafik implementiert. Die Ergebnisse der Rechnungen zeigen, dass ab

etwa 100Hz eine Impedanz unter der Benchmark zu erhöhten Abstrahlungen führt und dass eine deutlich größere Impedanz verglichen zur Benchmark kaum zu Variationen in der Schallabstrahlung führt. Diese Untersuchungen sind im Einklang mit den von DW ShipConsult generierten Ergebnissen.

Auffallend sind bei den Ergebnissen das Verhältnis von Impedanzpegel und Abstrahlung bis etwa 100Hz. Dieser Frequenzbereich wurde daher detaillierter untersucht. Abbildung 5 zeigt die Impedanzuntersuchung der runden Platte mit einer feineren Auflösung bis 100Hz.

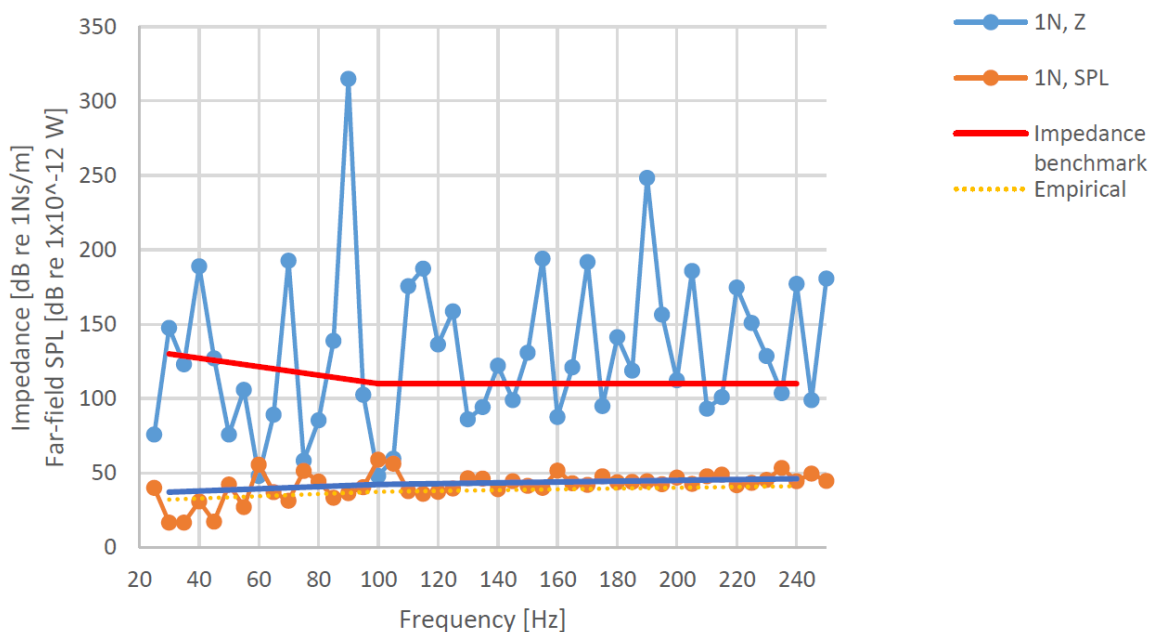


Abbildung 4: Impedanzuntersuchung einer runden Platte mit einem Radius von 20 m bis 250 Hz

Hier zeigt sich, dass bei einer Unterschreitung der Impedanz Benchmark die Abstrahlung entweder stets unter der empirischen TSCHALL +5dB Kurve liegt oder nur gering erhöht ist bei deutlichen Ausreißern der Impedanz wie z.B. bei etwa 48Hz. Diese Untersuchungen zeigen, dass die Impedanz Benchmark gerade im unteren Frequenzbereich zu konservativeren Maschinenfundamenten führen würde, für höhere Frequenzbereiche allerdings sehr gut anwendbar ist. Insbesondere im unteren Frequenzbereich gilt es den Einfluss der Impedanz auf die Abstrahlung weiter zu untersuchen.

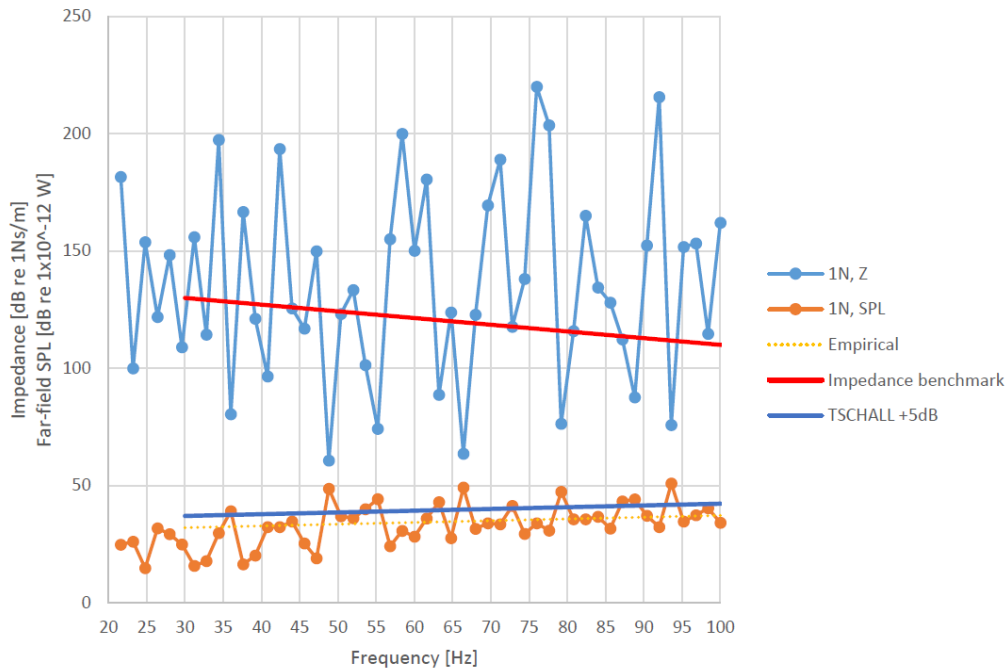


Abbildung 5: Impedanzuntersuchung einer runden Platte mit einem Radius von 20 m bis 100 Hz

Berechnungen der Projektpartner zeigten, dass die Punktimpedanz einer trockenen Struktur deutlich größer ist als die Punktimpedanz einer nassen Struktur. Diese Hypothese wurde unter Verwendung des entwickelten Modells numerisch untersucht.

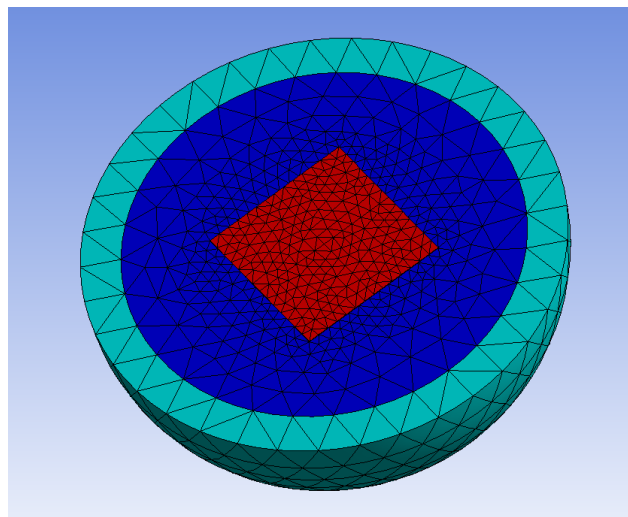


Abbildung 6: Numerisches Modell zur Untersuchung der Punktimpedanz in Wasser und Luft

Es wurde eine rechteckige Platte mit einer Kantenlänge von 10 m im Mittelpunkt mit 1 N angeregt und die Punktimpedanz am Anregungspunkt bei umgebender Luft und umgebenden Wasser untersucht, siehe Abbildung 6.

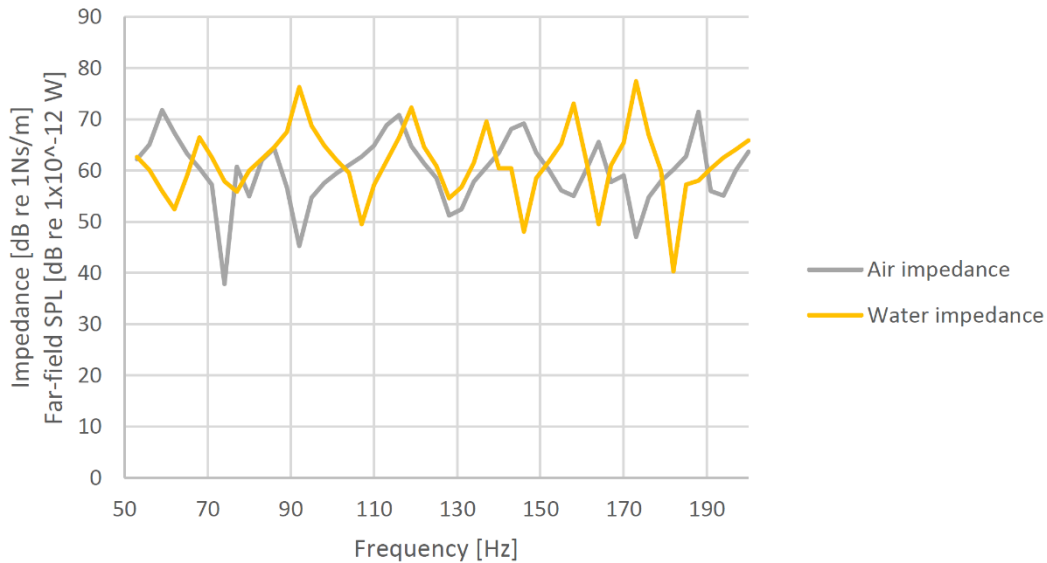


Abbildung 7: Vergleich Punktimpedanz einer trockenen und einer nassen Struktur

Zur Validierung der Rechnungen wurde der Fernfeld-Schallleistungspegel ebenfalls bestimmt und mit der analytischen Lösung der unendlichen Platte verglichen. In Abbildung 7 ist die Punktimpedanz am Anregungspunkt über das Frequenzintervall 50 bis 200 Hz mit einer Auflösung von 3 Hz dargestellt. Die Punktimpedanz des Modells mit umgebenden Wasser und die mit umgebender Luft schwanken beide um 60 dB.

Die Hypothese wurde allerdings zusätzlich mittels Modellen aus der Elektrotechnik, der Betrachtung von Schallreflexion an Grenzschichten und der Berücksichtigung von hydrodynamischer Zusatzmasse untersucht.

In der Elektrotechnik erfolgt die Schaltung von Impedanzen wie folgt [13]:

Parallelschaltung:

$$v) Z_{ges} = \frac{1}{\sum 1/Z_i}$$

Reihenschaltung:

$$vi) Z_{ges} = \sum Z_i$$

Demnach sollte die Gesamtimpedanz der nassen Struktur in beiden Fällen höher sein als die der trockenen. Die charakteristische Impedanz von Luft beträgt etwa 413 Ns/m³ und die von Wasser etwa 1,5 Mio Ns/m³. Da sich die Impedanz der Platte aufgrund ihrer Frequenzabhängigkeit und dem Blindanteil analytisch schwer bestimmen lässt, kann mit dieser Annäherung keine genaue Aussage getroffen werden, um wie viel die Gesamtimpedanz der nassen Struktur erhöht sein sollte.

2.4 Übersicht zahlenmäßiger Nachweis

Im Folgenden ist der zahlenmäßige Nachweis tabellarisch aufgelistet. Kostenart und Position entsprechen denen im Zuwendungsbescheid. Die Verwendung der Mittel ist in der Spalte Erläuterung kurz dargestellt.

Table 1 - Zahlenmäßiger Nachweis

Kostenart	Position (lt. AZK)	Entstandene Kosten in €	Erläuterung
Personalkosten	0812	*wurde bereits an das PTJ übermittelt	Bearbeitung der Projektinhalte
Verbrauch	0834	1180	Softwarelizenz
Reisekosten	0846	939,67	Projektmeetings

2.5 Angemessenheit der geleisteten Arbeit

Grundsätzlich bilden die Personalkosten die wesentliche Kostenursache. Insgesamt war der Personaleinsatz angemessen, ansonsten hätten nicht alle der o.g. Arbeiten ausgeführt werden können, was zu einem unvollständigen Projektergebnis geführt hätte.

2.6 Verwertung, voraussichtlicher Nutzen und Anschlussfähigkeit

Das in diesem Forschungsvorhaben entwickelte Prognosemodell und die im Vorhaben erzielten Erkenntnisse finden Nutzen bei der Modellerstellung durch den Projektpartner DW-ShipConsult. Weiterhin berichten diese über reges Interesse bei Kund*innen wie Designer*innen, Werften und Eigner*innen.

Seitens der Technischen Universität fließen die gewonnen Erkenntnisse in Lehrveranstaltungen wie „Schiffsakustik“ ein.

2.7 Fortschritte an anderen Stellen

Fortschritte an anderen Stellen sind nicht bekannt.

2.8 Veröffentlichungen im Rahmen des Vorhabens

Folgende Veröffentlichungen wurden ganz oder teilweise im Rahmen des Vorhabens bearbeitet bzw. veröffentlicht.

[P1] G. Andresen-Paulsen, F. von Bock und Polach, M. Donderer, A Comparison of Finite Element Computations and an Analytical Approach for Determining Hull-induced Underwater-radiated Noise. ASME 2022 41st International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering Hamburg, Germany. OMAE2022-78674 (2022) [10].

[P2] J. M. Daniel, M. G. Schuster, G. Andresen-Paulsen, F. Holz, K. Wittekind, S. Ehlers, An Advanced Prediction Model for Underwater Noise Emissions of Ships. Journal of Ship Production and Design. Vol. 38, no. 04, pp. 220-238, 2022 [14].

References

- [1] C. W. Clark *et al.*, "Acoustic masking in marine ecosystems: intuitions, analysis, and implication," *Marine Ecology Progress Series*, vol. 395, pp. 201–222, 2009.
- [2] M. A. McDonald, J. A. Hildebrand, and S. M. Wiggins, "Increases in deep ocean ambient noise in the Northeast Pacific west of San Nicolas Island, California," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 120, no. 2, pp. 711–718, 2006.
- [3] Y. Okumoto, Y. Takeda, M. Mano, and T. Okada, "Hull Structure Design System," in *Design of Ship Hull Structures*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 81–95. [Online]. Available: http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-88445-3_4
- [4] D. Wittekind, "The increasing noise level in the sea-a challenge for ship technology," in *104th Congress of the German Society for Maritime Technology*, 2009.
- [5] IMO, "IMO MEPC. 1/Circ. 833 Guidelines for the reduction of underwater noise from commercial shipping to address adverse impacts on marine life," in *Proceedings of the 21st ASCOBANS Advisory Committee Meeting*, 2014.
- [6] C. M. Gabriele, D. W. Ponirakis, and H. Klinck, "Underwater sound levels in Glacier Bay during reduced vessel traffic due to the COVID-19 pandemic," *Frontiers in Marine Science*, p. 736, 2021.
- [7] DNV, *Rules for Classification of Ships. Part 6 Additional class notations. Chapter 7 Environmental protection and pollution control*.
- [8] M. Möser and W. Kropp, *Körperschall: physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*: Springer-Verlag, 1967.
- [9] M. Möser and W. Kropp, *Körperschall: physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*: Springer-Verlag, 2010.
- [10] G. Andresen-Paulsen, R. U. F. von Bock und Polach, and M. Donderer, "A Comparison of Finite Element Computations and an Analytical Approach for Determining Hull-Induced Underwater-Radiated Noise," in *Volume 5A: Ocean Engineering*, Hamburg, Germany, 06052022.
- [11] ANSYS, Inc., *Acoustic Analysis Guide*: Not published.
- [12] cadfem GmbH. München, Germany.
- [13] G. Haggmann, *Grundlagen der Elektrotechnik: Das bewährte Lehrbuch für Studierende der Elektrotechnik und anderer technischer Studiengänge ab 1. Semester : mit 225 Abbildungen, 4 Tabellen, Aufgaben und Lösungen*, 18th ed. Wiebelsheim: AULA-Verlag, 2020.
- [14] J. M. Daniel, M. G. Schuster, G. Andresen-Paulsen, F. Holz, K. Wittekind, and S. Ehlers, "An Advanced Prediction Model for Underwater Noise Emissions of Ships," *Journal of*

Ship Production and Design, vol. 38, no. 04, pp. 220–238, 2022, doi:
10.5957/JSPD.06210017.

| Anhang 1

1 Derivation of the analytical solution of sound radiation of an infinite plate

Deriving the analytical solution of sound radiation of an infinite plate is based on the following reference:

Cremer, Lothar, and Manfred Heckl. *Körperschall: physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*. Springer-Verlag, 2010.

1.1 Impedance of the plate Z_τ

Equation of motion:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F \quad (1)$$

with u describing the displacement, \dot{u} the velocity, \ddot{u} the acceleration, m the mass, k the stiffness and c the damping.

The impedance (Trennimpedanz) can be derived from the equation of motion of a thin plate.

$$B' \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \eta(x, z, t) + m'' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta(x, z, t) = p(x, z, t) \quad (2)$$

with: B' describing the bending stiffness [Nm], m'' the mass per area [$\frac{kg}{m^2}$] and η the motion in y-direction [m].

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \eta(x, z, t) + \frac{m''}{B'} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta(x, z, t) = \frac{1}{B'} p(x, z, t)$$

with $v = j\omega\eta$ bzw. $\eta = \frac{v}{j\omega}$ in frequency domain and $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \eta = \frac{\partial}{\partial t} v = \frac{\partial}{\partial t} j\omega\eta = j\omega v$ in time domain:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \frac{v(x, z)}{j\omega} + \frac{m''}{B'} \ddot{\eta}(x, z, t) &= \frac{1}{B'} p(x, z, t) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 v(x, z) + \frac{m''}{B'} j\omega v(x, z) j\omega &= \frac{j\omega}{B'} p(x, z, t) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 v(x, z) - \frac{m''}{B'} \omega^2 v(x, z) &= \frac{j\omega}{B'} p(x, z, t) \end{aligned}$$

with $k_B^4 = \frac{\omega^2 m''}{B'}$ and $p(x, z) = \check{p}(k_x, k_z) e^{-jk_x x} e^{-jk_z z}$ (Representation of the spatial course by a sum of plane waves (periodic functions) \rightarrow Fourier series):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 v(x, z) - k_B^4 v(x, z) = \frac{j\omega}{B'} \check{p}(k_x, k_z) e^{-jk_x x} e^{-jk_z z}$$

The local distribution of the plate velocity and the excitation pressure are equal: $v(x, z) = \check{v}(k_x, k_z)e^{-jk_x x}e^{-jk_z z}$ (\rightarrow Fourier series)

$$\begin{aligned} [(k_x^2 + k_z^2)^2 - k_B^4] \check{v}(k_x, k_z)e^{-jk_x x}e^{-jk_z z} &= \frac{j\omega}{B'} \check{p}(k_x, k_z)e^{-jk_x x}e^{-jk_z z} \\ [(k_x^2 + k_z^2)^2 - k_B^4] \check{v}(k_x, k_z) &= \frac{j\omega}{B'} \check{p}(k_x, k_z) \end{aligned}$$

The impedance (Trennimpedanz) of the thin plate without consideration of the shear stiffness and rotational inertia and $B' = \frac{\omega^2 m''}{k_B^4}$ thus results in:

$$\begin{aligned} Z_\tau &= \frac{\check{p}(k_x, k_z)}{\check{v}(k_x, k_z)} \quad (3) \\ &= \frac{\omega^2 m''}{k_B^4} \frac{1}{j\omega} [(k_x^2 + k_z^2)^2 - k_B^4] \quad / \cdot -j^2 \\ &= -\frac{j\omega m''}{k_B^4} [(k_x^2 + k_z^2)^2 - k_B^4] \\ &= -j\omega m'' \left[\frac{(k_x^2 + k_z^2)^2}{k_B^4} - 1 \right] \\ &= j\omega m'' \left[1 - \frac{(k_x^2 + k_z^2)^2}{k_B^4} \right] \end{aligned}$$

1.2 Specific acoustic impedance of the surrounding fluid

$$Z_{Rad}$$

For a 2D source $k_y = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_z^2}$ is valid.

For the degree of radiation in y-direction ($\lambda_B > \lambda_0$): $\sigma = \frac{k_0}{k_y} = \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_z^2}}$ is valid until the coincidence frequency is reached.

$$Z_{Rad} = \rho_0 c_0 \sigma = \rho_0 c_0 \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_z^2}} \left[\frac{Ns}{m^3} \right]$$

1.3 Sound power of a thin infinite plate

From time domain to frequency domain:

$$X(\omega) = \int f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (4)$$

From frequency domain to time domain:

$$x(t) = \frac{1}{n2\pi^n} \int X(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \quad (5)$$

Sound pressure expressed in a Fourier integral:

$$\begin{aligned}
 p(x, y, z) &= \frac{1}{n2\pi^n} \int Z v \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \check{v}(k_x, k_z) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} Z dk_x dk_z
 \end{aligned} \tag{6}$$

with $n=2$, since a thin plate can be simplified as a 2D structure

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z \cdot v \cdot v \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z \left[\frac{p}{Z} \right]^2 \\
 &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{Z_{Rad}\} \left| \frac{\check{p}_A(k_x, k_z)}{Z_\tau + Z_{Rad}} \right|^2 dk_x dk_z
 \end{aligned} \tag{7}$$

In fluids, pressure and velocity are in phase in the far field, so that a real-valued wave impedance can be defined. The velocity is represented by the sound pressure and the impedance (Trennimpedanz) as well as the specific acoustic impedance. The velocity is therefore dependent on the impedance (Trennimpedanz) of the plate and the specific acoustic impedance of the surrounding medium.

The distance at which the near field merges into the far field depends on the wavelength and the size of the transducer. To differentiate between the near and far field, only the direct sound generated by the sound source is considered, i.e. the radiation properties of the transducer and the properties of the propagation medium. Near-field and far-field are not room-dependent, but are dependent on the sound source.

1.4 Integrating the formula for sound power

$$\check{p}(k_x, k_z) = F_0 \tag{8}$$

$$Z_\tau = j\omega m'' \left[1 - \frac{(k_x^2 + k_z^2)^2}{k_B^4} \right] \tag{9}$$

$$Z_{Rad} = \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_z^2}} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}\{Z_{Rad}\} \left| \frac{\check{P}_A(k_x, k_z)}{Z_\tau + Z_{Rad}} \right|^2 dk_x dk_z \quad (11) \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_z^2}} \right\} \left| \frac{F_0}{j\omega m'' \left[1 - \frac{(k_x^2 + k_z^2)^2}{k_B^4} \right] + \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_z^2}}} \right|^2 dk_x dk_z
\end{aligned}$$

Substitution: $k_x = k_r \sin(\psi)$, $k_z = k_r \cos(\psi)$ und $dk_x dk_z = k_r dk_r d\psi$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{k_0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - (k_r \sin(\psi))^2 - (k_r \cos(\psi))^2}} \right\} \\
&\quad \left| \frac{F_0}{j\omega m'' \left[1 - \frac{((k_r \sin(\psi))^2 + (k_r \cos(\psi))^2)^2}{k_B^4} \right] + \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - (k_r \sin(\psi))^2 - (k_r \cos(\psi))^2}}} \right|^2 k_r dk_r d\psi \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{k_0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - [k_r^2 (\sin(\psi)^2 + \cos(\psi)^2)]}} \right\} \\
&\quad \left| \frac{F_0}{j\omega m'' \left[1 - \frac{(k_r^2 (\sin(\psi)^2 + \cos(\psi)^2))^2}{k_B^4} \right] + \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - [k_r^2 (\sin(\psi)^2 + \cos(\psi)^2)]}}} \right|^2 k_r dk_r d\psi
\end{aligned}$$

Inner and outer integral may be exchanged, since Tonelli's theorem applies. With $\sin(\psi)^2 + \cos(\psi)^2 = 1$ it follows:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{k_0} \frac{k_r}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2} \left[\omega^2 m''^2 \left(1 - \frac{k_r^4}{k_B^4} \right)^2 + \frac{\rho_0^2 c_0^2 k_0^2}{k_0^2 - k_r^2} \right]} dk_r d\psi \\
&= \frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{8\pi^2} \int_0^{k_0} \left[\frac{k_r}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2} \left[\omega^2 m''^2 \left(1 - \frac{k_r^4}{k_B^4} \right)^2 + \frac{\rho_0^2 c_0^2 k_0^2}{k_0^2 - k_r^2} \right]} \psi \right]_0^{2\pi} dk_r \\
&= \frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{8\pi^2} \cdot 2\pi \int_0^{k_0} \frac{k_r dk_r}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2} \left[\omega^2 m''^2 \left(1 - \frac{k_r^4}{k_B^4} \right)^2 + \frac{\rho_0^2 c_0^2 k_0^2}{k_0^2 - k_r^2} \right]} \\
&= \frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \int_0^{k_0} \frac{k_r dk_r}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2} \left[\omega^2 m''^2 \left(1 - \frac{k_r^4}{k_B^4} \right)^2 + \frac{\rho_0^2 c_0^2 k_0^2}{k_0^2 - k_r^2} \right]}
\end{aligned}$$

Deviation from the solution according to the source: In the pre-factor of the integral, the wave number of the fluid is squared (formula (6.137), p.477)

Below the cut-off frequency the following applies: $k_B^2 \gg k_0^2$, therefore $\frac{k_r^4}{k_b^4} \approx 0$.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \int_0^{k_0} \frac{k_r dk_r}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2} [\omega^2 m''^2 + \frac{\rho_0^2 c_0^2 k_0^2}{k_0^2 - k_r^2}]} \\
&= \frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \int_0^{k_0} \frac{k_r dk_r}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2} \omega^2 m''^2 + \frac{\rho_0^2 c_0^2 k_0^2}{k_0^2 - k_r^2} \sqrt{k_0^2 - k_r^2}} \\
&= \frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \int_0^{k_0} \frac{k_r \sqrt{k_0^2 - k_r^2} dk_r}{(k_0^2 - k_r^2) \omega^2 m''^2 + \rho_0^2 c_0^2 k_0^2}
\end{aligned}$$

Substitution I: $u = k_0^2 - k_r^2$, $\frac{du}{dk_r} = -2k_r \rightarrow dk_r = -\frac{du}{2k_r}$

$$P = \frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{\sqrt{u}}{\omega^2 m''^2 u + \rho_0^2 c_0^2 k_0^2} du$$

Substitution II: $v = \sqrt{u}$, $\frac{dv}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \rightarrow du = 2\sqrt{u} dv$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{v}{\omega^2 m''^2 v^2 + \rho_0^2 c_0^2 k_0^2} 2v dv \\
&= -\frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \int v^2 \frac{1}{\rho_0^2 c_0^2 k_0^2 \left(\frac{m''^2 \omega^2 v^2}{\rho_0^2 c_0^2 k_0^2} + 1\right)}
\end{aligned}$$

Substitution III: $z = \frac{m'' \omega v}{\rho_0 c_0 k_0}$, $\frac{dz}{dv} = \frac{m'' \omega}{\rho_0 c_0 k_0} \rightarrow dv = \frac{dz \rho_0 c_0 k_0}{m'' \omega}$, $v = \frac{z \rho_0 c_0 k_0}{m'' \omega}$

$$\begin{aligned}
P &= -\frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \int \frac{z^2 \rho_0^2 c_0^2 k_0^2}{\omega^2 m''^2} \frac{1}{\rho_0^2 c_0^2 k_0^2 (z^2 + 1)} \frac{\rho_0 c_0 k_0}{m'' \omega} dz \\
&= -\frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \frac{\rho_0^3 c_0^3 k_0^3}{m''^3 \omega^3 \rho_0^2 c_0^2 k_0^2} \int \frac{z^2}{z^2 + 1} dz \\
&= -\frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \frac{\rho_0 c_0 k_0}{m''^3 \omega^3} \left[z - \arctan(z) \right]
\end{aligned}$$

Backsubstitution III:

$$P = -\frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \frac{\rho_0 c_0 k_0}{m''^3 \omega^3} \left[\frac{m'' \omega v}{\rho_0 c_0 k_0} - \arctan\left(\frac{m'' \omega v}{\rho_0 c_0 k_0}\right) \right]$$

Backsubstitution II:

$$P = -\frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \frac{\rho_0 c_0 k_0}{m''^3 \omega^3} \left[\frac{m'' \omega \sqrt{u}}{\rho_0 c_0 k_0} - \arctan\left(\frac{m'' \omega \sqrt{u}}{\rho_0 c_0 k_0}\right) \right]$$

Backsubstitution I:

$$P = -\frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \frac{\rho_0 c_0 k_0}{m''^3 \omega^3} \left[\frac{m'' \omega \sqrt{k_0^2 - k_r^2}}{\rho_0 c_0 k_0} - \arctan\left(\frac{m'' \omega \sqrt{k_0^2 - k_r^2}}{\rho_0 c_0 k_0}\right) \right]$$

Integral limit from 0 to k_0

$$\begin{aligned}
P &= -\frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \frac{\rho_0 c_0 k_0}{m''^3 \omega^3} \left[0 - \left(\frac{m'' \omega \sqrt{k_0^2}}{\rho_0 c_0 k_0} - \arctan\left(\frac{m'' \omega \sqrt{k_0^2}}{\rho_0 c_0 k_0}\right) \right) \right] \\
&= -\frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0}{4\pi} \frac{\rho_0 c_0 k_0}{m''^3 \omega^3} \left[-\frac{m'' \omega}{\rho_0 c_0} + \arctan\left(\frac{m'' \omega}{\rho_0 c_0}\right) \right] \\
&= -\frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0^2}{4\pi m''^2 \omega^2} \left[-\frac{m'' \omega}{\rho_0 c_0} \frac{\rho_0 c_0}{m'' \omega} + \frac{\rho_0 c_0}{m'' \omega} \arctan\left(\frac{m'' \omega}{\rho_0 c_0}\right) \right] \\
&= -\frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0^2}{4\pi m''^2 \omega^2} \left[-1 + \frac{\rho_0 c_0}{m'' \omega} \arctan\left(\frac{m'' \omega}{\rho_0 c_0}\right) \right] \\
&= \frac{|F_0|^2 \rho_0 c_0 k_0^2}{4\pi m''^2 \omega^2} \left[1 - \frac{\rho_0 c_0}{m'' \omega} \arctan\left(\frac{m'' \omega}{\rho_0 c_0}\right) \right] \tag{12}
\end{aligned}$$

Formula (12) corresponds to (6.138) on page 477 and applies in the frequency range below the cut-off frequency.

1.5 Derivation of the limits of the integral

$$\begin{aligned}
Z_{Rad} &= \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2 \sin(\psi)^2 - k_r^2 \cos(\psi)^2}} \\
&= \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - [k_r^2 (\sin(\psi)^2 + \cos(\psi)^2)]}} \\
&= \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2}}
\end{aligned}$$

- 1) $Re\{Z_{Rad}\} = 0$, if $k_r^2 > k_0^2$ resulting in $P = 0$ (see equation (11))
- 2) $Re\{Z_{Rad}\} = \frac{\rho_0 c_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2}}$, if $k_r^2 < k_0^2$
- 3) $Re\{Z_{Rad}\}$ not defined, if $k_r^2 = k_0^2$

| Anhang 2

1 Numerical Solutions in Ansys Workbench

All equations are based on the information published in ANSYS Theory Reference, ANSYS Inc., 2020.

The propagation of linear acoustic waves in fluids is described by wave equations. Deriving the wave equation is described in the next section. The wave equation can be expressed as a function of pressure and as a function of velocity potential, which has the advantage, that even in the case of an extension to fluid-structure couplings, which occur more frequently in acoustic problems, the resulting linear system of equations has a symmetrical system matrix, which in turn allows more efficient solution algorithms. To numerically calculate the wave equation using finite elements, it is necessary to convert the wave equation from its original differential form to an equivalent integral form. It is called weak formulation or variation formulation. To arrive at this integral formulation, one can either start from a physically justifiable variation integral (e.g. the Hamilton principle) or you can use the method of the weighted residuals. In this procedure, the wave equation in its differential form is multiplied by a test function w and integrated over the whole area.

1.1 Deriving wave equation

Noise propagation in a fluid is a thermodynamic process, which means, that the acoustic wave equation can be based on the equation of continuity, as well as the conservation of momentum. Pressure, density and velocity are disassembled into a constant and a fluctuating part.

$$p = p_0 + p' \quad (1)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (2)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' = \vec{v}' \quad (3)$$

p_0, ρ_0, \vec{v}_0 represent the constant part, p', ρ', \vec{v}' the fluctuating part. The constant velocity equals zero, since flowing fluids are not investigated.

1.1.1 Pressure-Density-Relation

When considering acoustic waves, the pressure is dependent on density only (isentropic situation). $p = p(\rho)$ is not specified and can be approximated by

a Taylor series using the constant and fluctuating parts.

$$p(\rho) = p(\rho_0) + (\rho - \rho_0) \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) + \dots \quad (4)$$

$$p_0(\rho) + p'(\rho) = p(\rho_0) + (\rho_0 + \rho' - \rho_0) \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) + \dots$$

with $p_0(\rho) = p(\rho_0)$:

$$p_0(\rho) + p'(\rho) = p(\rho_0) + \rho' \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) + \dots$$

$$p'(\rho) = \rho' \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) + \dots$$

with $c^2 = \frac{dp}{d\rho}(\rho_0)$ and neglecting terms of higher order due to linearization:

$$p' = \rho' c^2 \quad (5)$$

1.1.2 Mass conservation and the equation of continuity

The sum of the masses flowing in and out of a considered volume per time unit is equal to the mass change per time unit due to density change.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \underbrace{\int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{n} dS}_{\text{Convective term}} = 0 \quad (6)$$

Using the Gauss's theorem and assuming a small volume results in:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + Q \quad (7)$$

with the unit vector \mathbf{n} and a mass source $Q[\frac{kg}{m^3t}]$. Assuming small fluctuations in density and velocity leads to:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho') \cdot \vec{v}'] - Q = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_0 + \frac{\partial}{\partial t}\rho' + \nabla \cdot [\rho_0 \vec{v}' + \rho' \vec{v}'] - Q = 0$$

ρ_0 is constant and equals zero when deriving according to time. When $|\rho'| \ll \rho_0$, the second addend is way smaller compared to the first and

will be neglected (linearization).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \rho' + \nabla[\rho_0 \vec{v}'] - Q &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho'}{\rho_0} + \nabla \vec{v}' - \frac{Q}{\rho_0} &= 0 \\
\nabla \vec{v}' &= - \left(\rho' \frac{1}{\rho_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0} \\
\nabla \vec{v}' &= - \left(\frac{p'}{c^2} \frac{1}{\rho_0} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0} \\
\nabla \vec{v}' &= - \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0}
\end{aligned} \tag{8}$$

Equation 8 forms the linearized equation of continuity.

1.1.3 Conservation of momentum

The momentum of a reference mass can be changed through acting forces (2. Newton law of movement). The equation of conservation of momentum implies, that the momentum in a volume can only be changed by flows through the surface, through surface forces or body forces.

$$\begin{aligned}
\frac{d(mv)}{dt} &= \sum f \tag{9} \\
\frac{d(mv)}{dt} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v dV + \int_S \rho v v \mathbf{n} dS}_{\text{Conservation equation for a reference volume}} = \sum f
\end{aligned}$$

f represents surface forces or body forces acting on the fluid.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v dV + \underbrace{\int_S \rho v v \mathbf{n} dS}_{\text{convective term}} = \underbrace{\int_S T \mathbf{n} dS}_{\text{diffusive term}} + \int_V \rho b dV$$

T is the viscous stress tensor and b are body forces per mass. The Gaus's theorem is applied to the convective and the diffusive term and a small volume is assumed.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v} \vec{v}) &= \nabla \bar{\bar{T}} + \rho \vec{b} \tag{10} \\
\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} &= -\nabla p + \nabla \bar{\bar{T}} + \rho \vec{b}
\end{aligned}$$

Assuming small fluctuations in pressure, density and velocity leads to:

$$\begin{aligned}
(\rho_0 + \rho') \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} &= -\nabla(p_0 + p') + \nabla \bar{T} + (\rho_0 + \rho') \vec{b} \\
(\rho_0 + \rho') \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} &= -\nabla(\rho_0 + \rho') \vec{v}' \vec{v}' + \nabla \bar{T} + (\rho_0 + \rho') \vec{b} \\
(\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \nabla v'^2 \right) &= \nabla \bar{T} + (\rho_0 + \rho') \vec{b} \\
\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \rho_0 \nabla v'^2 + \rho' \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \rho' \nabla v'^2 &= \nabla \bar{T} + (\rho_0 + \rho') \vec{b}
\end{aligned}$$

The product of two fluctuating parameters as well as their derivations can be neglected due to linearization.

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \rho_0 \nabla v'^2 + \underbrace{\rho' \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\rho' \nabla v'^2}_{=0} &= \nabla \bar{T} + (\rho_0 + \rho') \vec{b} \\
\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \nabla p &= \nabla \bar{T} + (\rho_0 + \rho') \vec{b} \\
\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\rho_0} \nabla \bar{T} + \vec{b} + \rho' \vec{b}
\end{aligned}$$

Assumptions in ANSYS:

- The fluid is compressible (small fluctuations) $\rho = \rho_0 + \rho'$
- The fluid is irrotational $\nabla \times v = 0$
- There is no body force $\vec{b} = 0$
- The pressure disturbance of the fluid is small $p = p_0 + p'$
- There is no mean flow of the fluid $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' = \vec{v}'$
- The gas is ideal, adiabatic and reversible

This leads to the linearized equation of conservation of momentum:

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\rho_0} \nabla \bar{T} \tag{11}$$

1.1.4 Viscous stress tensor

Since the body forces are neglected in ANSYS, only the surface forces are considered in the linearized equation of conservation of momentum 11. By definition, surface forces are intermolecular forces of attraction as well as compressive forces. A stress tensor describes the stress condition of an area within the considered fluid.

The stress vector $t(x, t, \mathbf{n})[\frac{N}{m^2}]$ can be decomposed into a normal component (normal stress, parallel to \mathbf{n}) and into tangential components (shear stresses). The stress vector $t(x, t, \mathbf{n})$ of normal stresses is defined by

$$t(x, t, \mathbf{n}) = -p(x, t, \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (12)$$

where $p(x, t, \mathbf{n})$ is the scalar quantity of pressure and \mathbf{n} the normal vector. This relation can be constituted by using the stress tensor $\pi(x, t)$:

$$\mathbf{n}\pi(x, t) = -p(x, t, \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (13)$$

$$\pi(x, t) = -p(x, t)\mathbf{I} \quad (14)$$

with the identity matrix \mathbf{I} .

By definition, a fluid cannot absorb shear stresses, since even the slightest shear stress leads to a change in shape, meaning a movement of the fluid. Shear stresses therefore only occur as long as the fluid is moving and a shear flow is maintained. Adding the viscous term to the stress tensor results in:

$$\pi(x, t) = -p(x, t)\mathbf{I} + T(x, t) \quad (15)$$

with $T(x, t)$ as the viscous stress tensor. These local stress components are the cause for surface forces affecting infinitesimal fluid elements due to an occurring local velocity distribution (if the element is deformed in a changing velocity field).

Since no frictional forces are to be expected in a fluid motion with velocities independent of the location $u(t)$, it is assumed that the shear stresses are dependent on the location derivations of the velocity. In order to keep the model as simple as possible, it is assumed that only first-order derivatives are included and that the dependence is linear. The shear stress T is proportional to the shear rate (velocity) u . The proportionality constant μ is called viscosity or absolute or dynamic viscosity. Assuming the fluid as a homogeneous material, μ is constant.

$$T = \mu \nabla u \quad (16)$$

$$T_{ij} = \sum_{k,l} \mu_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (17)$$

As long as this condition is fulfilled, the fluid is called a Newtonian fluid. When applying shear stresses, the dynamic viscosity does not change. This results in a flow curve representing a straight line (see Figure ?? a) with μ (η in Figure ??) as its gradient. Water behaves like a Newtonian fluid, meaning that there are shear stresses as long as the water is moving and the shear stresses equal zero when the water is not moving. In acoustic analysis: an acoustic pressure wave propagates by the movements of the fluid particles even though there is no mean flow of the fluid.

Strictly speaking, the dynamic viscosity also depends on the pressure, but this is almost always neglected. Basically, viscosity is the internal resistance to movement due to molecular movement. This leads to collisions of molecules of different average speeds and consequently to an exchange of impulses. Macroscopically, this can be seen as shear stress. Due to the low density of gases, the number of such molecular collisions is low and therefore their viscosity is low. Due to the high density of liquids, the number of molecular collisions and therefore their dynamic viscosity is relatively large. It is assumed that the sum of torques of all molecules forming a fluid element equals zero, since the molecules are subject to random orientation. In principle, this eliminates possible surface moments on the fluid elements and results in the demand of a symmetric stress tensor $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ and thus in:

$$\mu_{ijkl} = \mu_{jikl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (18)$$

The assumption that frictional forces only occur when parts of the fluid move relative to each other is not yet fully taken into account. If the fluid rotates like a rigid body, then there is no relative movement, although the velocity of the movement is dependent on the location. A rotation around the z-axis with constant angular velocity ω is given by

$$u = \omega(-y, x, 0) \quad (19)$$

Since the viscous stress tensor needs to be zero at this time,

$$\mu_{ij21} = \mu_{ij12}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (20)$$

is valid. Corresponding for rotations around x- and y-axis:

$$\mu_{ij32} = \mu_{ij23}, \quad \mu_{ij31} = \mu_{ij13}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (21)$$

This leads to a simplification of equation 17:

$$T_{ij} = \mu_{ij11}u_x + \mu_{ij22}v_y + \mu_{ij33}w_z + \mu_{ij12}(u_y + v_x) + \mu_{ij13}(u_z + w_x) + \mu_{ij23}(v_z + w_y), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (22)$$

with

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \quad (23)$$

Considering an isotropic medium leads to an isotropic viscous stress tensor. That is, for having a form in which all physical distinction between different directions is absent. The tensor η_{ijkl} in a general expression for isotropic fourth-order tensors:

$$\mu_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (24)$$

with

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (25)$$

and A, B, C as random scalar quantities, is valid and results in

$$T_{ij} = A\delta_{ij}\delta_{kl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + B\delta_{ik}\delta_{jl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + C\delta_{il}\delta_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (26)$$

$$= A\delta_{ij}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} + B\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + C\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (27)$$

since the general formulation $a_j\delta_{jk} = a_k$ is applicable.

Because δ_{ij} and π_{ij} , as well as T_{ij} are symmetric tensors, it follows $B = C$.

$$T_{ij} = A\delta_{ij}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} + B\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (28)$$

The stress tensor is a 3x3 matrix considering 3D situations:

$$\pi = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Due to the assumption that the mean pressure equals one third of the static pressure, when there is no flow within the fluid:

$$p_{mean} = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad (30)$$

with:

$$\sigma_{11} = -p_{stat}\delta_{11} + A\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)\delta_{11} + B\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \quad (31)$$

$$l = 1, 2, 3$$

$$= -p_{stat} + A\nabla u + 2B\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{22} = -p_{stat} + A\nabla u + 2B\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (32)$$

$$\sigma_{33} = -p_{stat} + A\nabla u + 2B\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (33)$$

resulting in:

$$p_{mean} = -\frac{1}{3}\left(-3p_{mean} + 3A\nabla u + 2B\nabla u\right) \quad (34)$$

$$= p_{stat} - \left(A + \frac{2}{3}B\right)(\nabla u)$$

Leading to $p_{mean} = p_{stat}$ if $u = 0$.

Additionally, the two coefficients of viscosity A and B can be linked by using the Stokes Hypothesis[?]. Stokes stated, that

$$A + \frac{2}{3}B = 0 \quad (35)$$

where A describes the second viscosity coefficient ($A = \lambda$) and B the dynamic viscosity coefficient ($B = \mu$). The Stokes Hypothesis is common practice in the analysis of the motion of compressible fluids[?], this relation has been criticized recently though [?][?]. This leads to:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (36)$$

$$(37)$$

This relation can be used in the viscous stress tensor term, resulting in 38.

$$T = 2\mu\nabla u - \frac{2}{3}\mu\nabla u \quad (38)$$

Using the Stokes Hypothesis e.g. for σ_{11} leads to:

$$\sigma_{11} = -p_{stat}\delta_{11} + \lambda\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)\delta_{11} + \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \quad (39)$$

$$l = 1, 2, 3$$

$$= -p_{stat} - \frac{2}{3}\mu\nabla u + 2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

1.1.5 Navier-Stokes equation

38 is added in the linearized equation of conservation of momentum 11.

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\rho_0} \left(2\mu \nabla^2 \vec{v}' - \frac{2}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{v}') \right) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\rho_0} \left(2\mu - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla (\nabla \cdot \vec{v}')) \\ \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{4\mu}{3\rho_0} (\nabla^2 \vec{v}') \end{aligned}$$

The linearized equation of continuity 8 is added as well and the linearized Navier-Stokes equation for compressible fluids is formed.

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{4\mu}{3\rho_0} \nabla \left(-\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0} \right) \quad (41)$$

1.1.6 Acoustic wave equation

The linearized equation of continuity is derived according to time and the divergence of the linearized equation of conservation of momentum is established.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{v}' = -\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{Q}{\rho_0} \quad (42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{v}' = -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) + \nabla \cdot \left(\frac{4\mu}{3\rho_0} (\nabla^2 \vec{v}') \right) \quad (43)$$

The acoustic wave equation includes the conservation of mass 42 as well as the conservation of momentum 43, where $\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{v}'$ can be expressed using in each case the other equation.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{Q}{\rho_0} &= -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) + \nabla \cdot \left(\frac{4\mu}{3\rho_0} (\nabla^2 \vec{v}') \right) \\ \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) - \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} &= \left[\frac{4\mu}{3\rho_0} \nabla \cdot (\nabla^2 \vec{v}') \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\rho_0} \right) \end{aligned}$$

$\nabla \cdot \vec{v}'$ is substituted by the linearized equation of continuity 8.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) - \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} &= \left[\frac{4\mu}{3\rho_0} \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\rho_0} \right) \\ \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) - \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left[\frac{4\mu}{3\rho_0} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} \right) \right] &= \nabla \cdot \left[\frac{4\mu}{3\rho_0} \nabla \cdot \left(\frac{Q}{\rho_0} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{\rho_0} \right) \quad (44) \end{aligned}$$

The wave equation 44 includes viscous dissipation by using the Stokes hypothesis and is referred to as the lossy wave equation for propagation of sounds in fluids.

1.2 Fluid structure interaction

Considering fluid structure interactions, the finite element semi-discrete equation 45 of motion is taken into account as well as the lossy wave equation 44.

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + \{F^i(t)\} = \{F^a(t)\} \quad (45)$$

$[M]$ is the structural mass matrix, $[C]$ the structural damping matrix, $\{\ddot{u}(t)\}$ the nodal acceleration vector, $\{\dot{u}(t)\}$ the nodal velocity vector, $\{F^i(t)\}$ the internal load vector and $\{F^a(t)\}$ the applied load vector.

By using $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \omega^2$ and $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ with $j = \sqrt{-1}$ the inhomogeneous Helmholtz equation is formed.

$$\nabla\left(\frac{1}{\rho_0}\nabla p\right) - \frac{\omega^2}{\rho_0 c^2}p' + j\omega\nabla\left[\frac{4\mu}{3\rho_0}\nabla\left(\frac{1}{\rho_0 c^2}p'\right)\right] = \nabla\left[\frac{4\mu}{3\rho_0}\nabla\left(\frac{Q}{\rho_0}\right)\right] - j\omega\left(\frac{Q}{\rho_0}\right) \quad (46)$$

By using the Galerkin method, an approximation of a differential equation can be established. Since the approximation does not generally satisfy the differential equation, a residual will occur. The general idea of the Galerkin method is that the residuum vanishes in the weighted mean over the total area. Due to that the residual is multiplied by a weighting function. If the weighting function is equal to the approximation, it is called Bubnov-Galerkin method. Otherwise it is referred to Petrov-Galerkin method. The wave equation 44 is multiplied by the weighting function w and integrated over the volume of the acoustic domain Ω_F and the surface of the acoustic domain boundary Γ_F . \hat{n} is the outward normal unit vector to the boundary Γ_F .

$$\begin{aligned} & \int \int_{\Omega_F} \int \frac{1}{\rho_0 c^2} w \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dv + \int \int_{\Omega_F} \int \nabla w \left(\frac{4\mu}{3\rho_0^2 c^2} \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \right) dv + \int \int_{\Omega_F} \int \nabla w \\ & \quad \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) dv - \iint_{\Gamma_F} w \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{4\mu}{3\rho_0^2 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{n} \nabla p ds + \iint_{\Gamma_F} w \frac{4\mu}{3\rho_0^2} \hat{n} \nabla Q ds \\ & = \int \int_{\Omega_F} \int w \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial Q}{\partial t} dv + \int \int_{\Omega_F} \int \nabla w \left(\frac{4\mu}{3\rho_0^2} \nabla Q \right) dv \quad (47) \end{aligned}$$

According to the Navier-Stokes equation 41, the normal velocity on the boundary of the acoustic domain is given by:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} \hat{n} &= \left(-\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{4\mu}{3\rho_0} \nabla \left(-\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0} \right) \right) \hat{n} \\ &= -\left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{4\mu}{3\rho_0^2 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{n} \nabla p + \frac{4\mu}{3\rho_0^2} \hat{n} \nabla Q\end{aligned}\quad (48)$$

Substituting equation 48 into 47 results in:

$$\begin{aligned}\int \int_{\Omega_F} \int \frac{1}{\rho_0 c^2} w \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dv + \int \int_{\Omega_F} \int \nabla w \left(\frac{4\mu}{3\rho_0^2 c^2} \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \right) dv + \int \int_{\Omega_F} \int \nabla w \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) dv \\ + \oint_{\Gamma_F} w \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} \hat{n} = \int \int_{\Omega_F} \int w \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial Q}{\partial t} dv + \int \int_{\Omega_F} \int \nabla w \left(\frac{4\mu}{3\rho_0^2} \nabla Q \right) dv\end{aligned}\quad (49)$$

The normal acceleration of the fluid particle can be expressed using the normal displacement of the fluid particle \vec{u}_F .

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} \hat{n} = \hat{n} \frac{\partial^2 \vec{u}_F}{\partial t^2}\quad (50)$$

The finite element formulation of the wave equation using the Galerkin procedure is given by:

$$\begin{aligned}\int \int_{\Omega_F} \int \frac{1}{\rho_0 c^2} w \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dv + \int \int_{\Omega_F} \int \nabla w \left(\frac{4\mu}{3\rho_0^2 c^2} \nabla \frac{\partial p}{\partial t} \right) dv + \int \int_{\Omega_F} \int \nabla w \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) dv \\ + \oint_{\Gamma_F} w \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \hat{n} = \int \int_{\Omega_F} \int w \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial Q}{\partial t} dv + \int \int_{\Omega_F} \int \nabla w \left(\frac{4\mu}{3\rho_0^2} \nabla Q \right) dv\end{aligned}\quad (51)$$