

Universität Karlsruhe (TH)

Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik
Bd. 8

Hartmut Hetzler

**Zur Stabilität von Systemen
bewegter Kontinua mit
Reibkontakten am Beispiel
des Bremsenquietschens**



universitätsverlag karlsruhe

Hartmut Hetzler

**Zur Stabilität von Systemen bewegter Kontinua
mit Reibkontakten am Beispiel des Bremsenquietschens**

Universität Karlsruhe (TH)

Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik

Band 8

Zur Stabilität von Systemen bewegter Kontinua mit Reibkontakten am Beispiel des Bremsenquietschens

von
Hartmut Hetzler



universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)
Fakultät für Maschinenbau
Tag der mündlichen Prüfung: 17. Januar 2008
Referent: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek

Impressum

Universitätsverlag Karlsruhe
c/o Universitätsbibliothek
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz
lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2008
Print on Demand

ISSN: 1614-3914
ISBN: 978-3-86644-229-0

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik der Universität Karlsruhe (TH).

Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, die wissenschaftliche Begleitung sowie schließlich die Übernahme des Hauptreferats. Besonders danken möchte ich dabei für die mir gewährte wissenschaftliche Freiheit, die angenehme und unkomplizierte Atmosphäre sowie die stete Unterstützung und Förderung. Daneben danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Jörg Wallaschek für das Interesse an meiner Arbeit sowie die Übernahme des Korreferats. Durch konstruktive Kritik und zahlreiche Anregungen hat er wesentlich zur Abrundung und somit zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen. Für die freundliche Übernahme des Verfahrensvorsitzes möchte ich mich zudem sehr herzlich bei Herrn Prof. Dr.rer.nat. Frank Gauterin bedanken.

Besonderer Dank gilt außerdem Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. Jörg Wauer, der mit Erfahrung und Überblick in zahlreichen Diskussionen wertvolle Impulse zu meiner Arbeit gegeben hat. Darüber hinaus danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe für seine Anmerkungen und Hinweise zur vorliegenden Dissertation. Den Herren Prof. Dr.-Ing. Walter Wedig und Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. Jens Wittenburg möchte ebenfalls meinen Dank aussprechen: zusammen mit Herrn Prof. Wauer waren insbesondere sie es, die während meines Studiums durch diverse Lehrveranstaltungen mein Interesse an der Mechanik geweckt und genährt haben.

Eine Promotion stellt ein persönliches Projekt dar, das letztlich vor allem durch ein fruchtbares Arbeits- und ein ebenso verständnisvolles Privat Umfeld erst ermöglicht wird. Vor diesem Hintergrund möchte ich die in jeglicher Hinsicht gute Atmosphäre im Kollegium des Instituts hervorheben – so werden mir die unzähligen Diskussionen und Gespräche ebenso in Erinnerung bleiben, wie die Experimente in Zimmer 207 oder die Abende am Karussell. Zudem sollen die vielen Studenten nicht unerwähnt bleiben, die mich als Mitarbeiter tatkräftig unterstützt oder als Lernende durch knifflige Fragen und interessante Diskussionen gefordert haben.

In Dankbarkeit widme ich diese Arbeit meinen Eltern – durch ihre unablässige Fürsorge, Erziehung und Förderung haben Sie mir meinen bisherigen Weg ermöglicht.

Diese Arbeit ist somit zwar mein Werk, doch ihr Verdienst.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Technische Problemstellung	1
1.2	Motivation	2
1.3	Literaturübersicht	3
1.4	Thema und Gliederung der Arbeit	6
2	Elastische Systeme mit Reibkontakt	8
2.1	Kinematik	8
2.1.1	Allgemein	9
2.1.2	Kontakt	12
2.2	Kinetik	15
2.2.1	Mechanisches Prinzip	15
2.2.2	Potentiallose Kräfte	17
2.2.3	Kontakt	18
2.2.3.1	Beitrag der Normalspannung	19
2.2.3.2	Beitrag der Scherspannungen	20
2.2.3.3	Gesamte virtuelle Arbeit	23
2.3	Diskretisierung	24
2.3.1	Diskretisierung ohne Kontakt	29
2.3.2	Diskretisierung der Kontakte	32
2.3.2.1	Lagrangesche Multiplikatoren	34
2.3.2.2	Penalty-Verfahren	40
2.3.2.3	Spezielle Ansatzfunktionen	44

3	Zur Stabilität stationärer Lösungen	49
3.1	Grundsätzliches zur Stabilität	49
3.2	Energetische Vorbetrachtung	52
3.3	Stabilität des diskretisierten Systems	54
3.3.1	Matrizeneigenschaften und Stabilität	57
3.3.2	Eigenwerte und Eigenvektoren	58
3.3.2.1	Symmetrien des komplexen Spektrums, Eigenvektoren	59
3.3.2.2	Existenz reeller Eigenvektoren	60
3.3.2.3	Reelle Darstellung von Eigenvektoren	61
3.3.3	Zusammenhang zwischen Eigenvektoren und Eigenwerten: der Rayleigh-Quotient	63
3.3.3.1	Lineares Eigenwertproblem	63
3.3.3.2	Quadratische Eigenwertprobleme	64
3.3.3.3	Orientierung der Rechtseigenvektoren	64
3.3.4	Parametereinfluss auf das Eigenwertspektrum	67
3.3.4.1	Einfache Eigenwerte	69
3.3.4.2	Halbeinfache Eigenwerte	69
3.3.4.3	Nicht-derogatorische Eigenwerte	70
3.4	Instabilitätsszenarien	73
3.4.1	Systeme ohne geschwindigkeitsproportionale Einflüsse	73
3.4.1.1	Parametereinfluss ohne Reibungskräfte	74
3.4.1.2	Lageabhängige Reibungskräfte	75
3.4.2	System mit geschwindigkeitsabhängigen Einflüssen	80
3.4.2.1	Nicht-zirkulatorische Systeme	81
3.4.2.2	Zirkulatorische Systeme	85

4 Quietschen von Scheibenbremsen	96
4.1 Problembeschreibung	96
4.1.1 Allgemein	96
4.1.2 Experimentelle Ergebnisse	98
4.1.2.1 Aufbau der Bremse und des Prüfstandes	98
4.1.2.2 Bremsenquietschen	101
4.1.3 Vorüberlegungen und grundsätzliche Modellelemente	106
4.1.4 Kinematik	107
4.1.4.1 Bremsscheibe	108
4.1.4.2 Bremsbeläge	113
4.1.4.3 Kontakte	115
4.1.5 Kinetik	117
4.1.6 Diskretisierung	120
4.2 Stabilität	126
4.2.1 Eigenwerte des reibungsfreien Systems	127
4.2.1.1 Bremsscheibe	127
4.2.1.2 Bremsscheibe und Beläge im reibungsfreien Kontakt	130
4.2.2 Stabilität des reibungsbehafteten Systems	133
4.2.2.1 Stabilität ohne Dissipation und gyroskopische Einflüsse	133
4.2.2.2 Stabilität unter Berücksichtigung sämtlicher Einflüsse	141
5 Zusammenfassung	153
Literaturverzeichnis	158

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Technische Problemstellung

Reibungserregte Schwingungen in technischen Systemen stellen ein bis heute nicht vollständig verstandenes oder gar gelöstes Problemfeld dar. Die Auswirkungen solcher Schwingungen sind vielfältig und reichen von Qualitätseinbußen gefertigter Werkstücke infolge schwingender Werkzeugmaschinen bis hin zu den variantenreichen Schwingungsformen, die Fahrzeugbremsen zeigen können. Die Auswirkungen der letztgenannten Problemklasse ergeben sich dabei aus der Wahrnehmung durch betroffene Personen, welche von Irritation, Unzufriedenheit und Verärgerung bis hin zu Schmerz reichen kann.

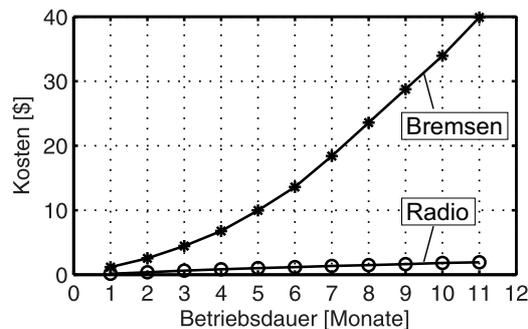


Abbildung 1.1: Vergleich von Reklamationskosten bezüglich des Radios und der Bremsen einer Baureihe von Oberklassefahrzeugen. Dargestellt sind kumulierten Kosten pro Fahrzeug in Abhängigkeit von den Monaten nach Inbetriebnahme (aus einer Fallstudie [55]).

Die wirtschaftlichen Konsequenzen für die Fahrzeugindustrie sind nicht zu unterschätzen: so werden die durch Kundenreklamationen aus dem Bereich NVH (*Noise-Vibration-Harshness*) entstehenden Kosten allein in Nordamerika auf etwa 1 Milliarde US-\$ pro Jahr geschätzt (siehe z.B. [7]).

Fallstudien zeigen zudem, dass die Reklamationskosten bezüglich der Bremsen eines Fahr-

zeugs diejenigen bezüglich anderer Komponenten deutlich übersteigen können. In Abbildung 1.1 sind beispielhaft Reklamationskosten bezüglich der Bremsen eines Oberklassefahrzeugs im Vergleich zu den Kosten bezüglich des Radios dargestellt (aus [55]).

Reklamationen bezüglich der Bremsen gehören zu den häufigsten Beschwerdegründen bei PKW. Als noch wohl gravierender als diese kurzfristigen Kosten sind jedoch die langfristigen Auswirkungen infolge der verminderten subjektiven Qualitäts- und damit Produktwahrnehmung zu bewerten.

Neben den wirtschaftlichen Auswirkungen auf die PKW-Industrie wird den Auswirkungen von Lärmemissionen durch Schienenfahrzeug auf Anwohner und Nutzer immer mehr Beachtung geschenkt. Insbesondere die hohen Schallpegel dieser Emissionen können dabei Schmerzen oder gar gesundheitliche Folgen nach sich ziehen [1], [80].

1.2 Motivation

Es besteht somit großes Interesse seitens der Industrie, möglichst quietscharme Bremsen herzustellen. Dabei ist es natürlich wünschenswert, diese Anforderung bereits sehr früh in der Produktentwicklung – also am besten schon vor dem ersten realen Prototypen – berücksichtigen und erfüllen zu können. Zu diesem Zweck ist ein vertieftes Verständnis notwendig, um einerseits dem Konstrukteur Gestaltungsregeln an die Hand zu geben, sowie andererseits leistungsfähige Simulationswerkzeuge bereitstellen zu können.

Obwohl seit den ersten Forschungsbemühungen gegen Ende der 30er Jahre des 20. Jahrhunderts große Fortschritte hinsichtlich Verständnis und Umsetzung in Simulationsmodelle erzielt werden konnten, ist es dennoch bis heute nicht gelungen, allein auf Basis von Berechnungen verlässliche Vorhersagen hinsichtlich des Geräuschverhaltens einer Bremsenkonstruktion zu treffen. Zwar hat die Einführung von FE-Programmen zu einer deutlichen Steigerung der Detailgenauigkeit der Modelle geführt, doch hat sich auch gezeigt, dass eine Erhöhung des Detaillierungsgrades der Modelle nur in begrenztem Maß zu verbesserten Vorhersagen hinsichtlich des Stabilitätsverhaltens führt.

Offensichtlich liegen die Probleme tiefer, sodass grundlegende Fragen zu klären sind. Bislang nur unzureichend geklärte Problemkreise sind beispielsweise

- der Einfluss der Materialdämpfung sowie der Führungsbewegung des Rotors,
- die konsistente Form der Reibungslinearisierung sowie
- die Einflüsse der verwendeten Kontaktformulierung

auf das Stabilitätsverhalten des Modells.

Darüber hinaus besteht nach wie vor Bedarf an einem verbesserten Verständnis der zugrundeliegenden Mechanismen, da bis heute nicht ausreichend geklärt ist, welches die wesentlichen Einflussfaktoren sind und wie das Quietschverhalten nachhaltig zu beeinflussen ist. Zu diesem Zweck müssen letztlich analytische Modelle herangezogen werden, da nur sie einen tieferen Einblick – quasi den Blick "hinter die Kulissen" – gestatten.

Kommerzielle FE-Programme hingegen liefern zwar im Rahmen der Modellierung akkurate und sehr umfassende numerische Ergebnisse – doch lässt sich der Einfluss eines bestimmten Parameters in der Regel nur sehr mühsam in einer Art "reverse engineering" aus dieser Datenflut herauslesen. Die Identifikation der maßgeblichen Systemparameter und ihres Einflusses ist so kaum möglich.

Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass trotz der großen Fortschritte und des hohen Kenntnisstands zur Problematik des Bremsenquietschens die simulativen Vorhersagen nach wie vor nur bedingt belastbare Prognosen gestatten. Es ist somit notwendig, Unzulänglichkeiten in der bisherigen Modellbildung aufzuspüren und neue Maßnahmen aufzuzeigen. Dies verlangt nach einer vertieften thematischen Durchdringung und somit nach einer grundlegenden Untersuchung der Problematik.

1.3 Literaturübersicht

Im Folgenden soll eine kurze Übersicht über für diese Arbeit wesentliche Entwicklungen in der Literatur gegeben werden. Dies erfolgt unter Beschränkung auf die unmittelbar relevanten Bereiche der Stabilitätstheorie zirkulatorischer Systeme sowie der mechanischen Modellierung des Bremsenquietschens.

1.3.1 Stabilität

Die Linearisierung der Reibungskräfte führt auf Störungsgleichungen mit nichtsymmetrischen Fesselungsmatrizen. Die ersten umfangreichen Veröffentlichungen zur Stabilität dieser sogenannten zirkulatorischen Systeme stammen von Bolotin [5] bzw. Ziegler [98]. Letzterer wies insbesondere darauf hin, dass die Stabilität solcher Systeme nur mittels einer kinetischen Stabilitätstheorie entschieden werden kann und somit eine rein statische Rechnung nicht ausreichend ist.

Ein einfaches Beispiel zur Erklärung zirkulatorischer Probleme – ein Doppelpendel mit mitgehender und somit lageabhängiger Last – wird heute zumeist als *Ziegler-Pendel* bezeichnet und erklärt auch die häufig gewählte Bezeichnung dieser Probleme als *Folgelastprobleme*.

In seiner Arbeit [98] aus dem Jahr 1952 zeigte Ziegler zudem, dass grenzstabile zirkulatori-

sche Systeme nahe der Stabilitätsgrenze durch eine beliebig kleine Dämpfung destabilisiert werden können. In der Literatur wird hier häufig vom *Ziegler-Paradoxon* gesprochen. Dieser vollkommen kontra-intuitive Effekt ist bis heute Gegenstand der Forschung. Neben den Arbeiten von Bolotin und Ziegler waren es in der Folge beispielsweise Herrmann, Jong, Nemat-Nasser (z.B. [25], [63]) und Leipholz [49], die sich mit diesen Systemen und den ihnen eigenen Phänomenen beschäftigten.

Erwähnenswert sind daneben die Arbeiten von Seyranian und Mailybaev [54], [82], welche die Grenze des Stabilitätsgebiets des Ziegler-Pendels als singuläre Fläche (den sog. *whitney umbrella*) im Parameterraum deuteten. Sie wendeten systematisch die durch Vishik und Lyusternik [88] angegebenen Methoden der Störungsrechnung für Differentialoperatoren auf die Stabilität mechanischer Systeme insbesondere in der Nähe singulärer Punkte an.

Eine sehr umfassende Übersicht zur Entwicklung, Kritik und Einordnung zirkulatorischer Systeme im Allgemeinen gibt Elishakoff in [9]. Magnus diskutiert in [52] den Einfluss verschiedener Arten von Kräften auf das Stabilitätsverhalten und geht dabei auch auf zirkulatorische Kräfte ein.

1.3.2 Modelle zur Untersuchung des Bremsenquietschens

Seit Beginn der Forschung zu Bremsenvibrationen im Allgemeinen wurde eine Vielzahl von Modellen vorgeschlagen, um die grundlegenden Mechanismen zu erklären und damit den Weg zur Berechnung großer, detaillierter Modelle zu eröffnen. Umfangreiche Übersichten zur geschichtlichen Entwicklung der Untersuchungen zum Bremsenquietschen sind beispielsweise die von Kinkaid [40] und die von Wallaschek [92]. Eine speziell auf Minimalmodelle konzentrierte Übersicht jüngerer Datums gibt von Wagner [89].

Prinzipiell können Bremsenvibrationen in fremderregte und selbsterregte Schwingungen eingeteilt werden. In die Kategorie der *Fremderregungsmechanismen* fallen primär Modelle zur Erklärung tieffrequenter Bremsenvibrationen wie beispielsweise das Rubbeln (siehe [36], [79]). Da jedoch im Experiment beim Bremsenquietschen kein Zusammenhang zwischen Drehzahl und Schwingungsfrequenz festgestellt werden kann, sind solche Modelle für die Erklärung des Bremsenquietschens nicht geeignet. Gleiches gilt auch für den Mechanismus der *Parametererregung*, der ab und an als Erklärung ins Spiel gebracht wird (siehe z.B. [8]). Parametererregungen treten lediglich in recht eng begrenzten Frequenzbereichen auf, bedürfen eines äußeren Einflusses und die entstehenden Schwingungen sind isochron zur Schwankungsfrequenz der Parameter. Keines dieser Charakteristika konnte im Zusammenhang mit Bremsenquietschen beobachtet werden.

Der primäre Mechanismus hinter dem Bremsenquietschen ist vielmehr in der Gruppe der *Selbsterregungsmechanismen* zu suchen. Bei (fast) allen Modellen wird dabei unterstellt,

dass eine stationäre Lösung in Form einer Ruhelage existiert, die für bestimmte Kombinationen von System- oder Betriebsparametern instabil wird. Die wichtigsten Instabilitätsmechanismen in der Literatur sind dabei

- die sogenannte "fallende Kennlinie" (auch negative Dämpfung) und
- Flatter-Instabilitäten infolge lageabhängiger Lasten, die auch als "mode coupling" bezeichnet werden.

Der erstgenannte Mechanismus der Destabilisierung der Ruhelage infolge eines *negativen Gradienten* der Gleitreibungszahl μ über der Relativgeschwindigkeit der Kontaktpartner ist der älteste Erklärungsansatz für reibungserregte Vibrationen von Bremsen und stammt von Mills [58] aus den späten 30ern des 20. Jahrhunderts. Seitdem wurde er vielfach untersucht und hat als Standardbeispiel für reibungserregte Schwingungen Eingang in die Literatur gefunden [13], [18], [38], [53].

Dieser Mechanismus erklärt die Entstehung von Schwingungsanteilen parallel zur Oberfläche der Bremsscheibe. Experimentelle Untersuchungen zeigen jedoch, dass beim Quietschen die Lateralbewegungen die Anteile in Umfangsrichtung bei weitem überwiegen. Darüber hinaus tritt Quietschen auch bei höheren und hohen Drehzahlen auf, bei denen der Gleitreibungskoeffizient in der Regel konstant ist oder sogar einen positiven Gradienten über der Relativgeschwindigkeit haben kann. Während für manche Bremsenvibrationen bei niedrigen Geschwindigkeiten dieser Mechanismus durchaus als Erklärung dienen mag (siehe [26]), so ist er offenbar nicht der Hauptauslöser des Bremsenquietschens.

Als allgemein anerkannte Erklärung des Bremsenquietschens werden heute Modelle betrachtet, welche die Reibkräfte als *mitgehende Lasten* auffassen, was letztlich den Verlust der Symmetrie der Fesselungsmatrix zur Folge hat. Dieser Mechanismus ist nicht auf bestimmte Reibkennlinien angewiesen und steht auch ansonsten in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen. Die vermutlich ersten Veröffentlichungen entsprechender Starrkörpermodelle sind aus den 1970er Jahre und stammen von North [65], [66]. In der Folge wurde auf Basis dieser Arbeiten eine Vielzahl weiterer Modelle entwickelt, die nunmehr auch die elastischen Eigenschaften der Kontaktpartner berücksichtigten. Beispiele hierfür sind die Arbeiten von Millner [57], Nishiwaki [64] oder die zahlreichen Arbeiten von Mottershead und Ouang (so beispielsweise [59], [69]). Hinsichtlich der beiden letztgenannten Autoren ist anzumerken, dass sie sich in späteren Veröffentlichungen auf Parametererregungseffekte konzentrierten.

Analytische Modelle unter Verwendung elastischer Strukturmodelle (Balken, Kirchhoff-Platten) aus der jüngeren Vergangenheit stammen beispielsweise von Heilig [23], Hochlenert [30], Spelsberg-Korspeter [83] oder von Wagner [90]. Bei Letzteren lag dabei der Schwerpunkt

auf einer detaillierten Modellierung des Reibkontaktes, wobei Ansätze aus der Kontaktmodellierung von Wanderwellenmotoren Anwendung fanden [91]. Zudem wurde dieses analytische Modell genutzt, um eine Regelung zur aktiven Unterdrückung von Bremsenvibrationen auszulegen [29].

Da die untersuchten Modelle – insbesondere bei Berücksichtigung elastischer Körper – häufig sehr groß und unübersichtlich werden, gibt es immer wieder Versuche, einfache Minimalmodelle zur Erklärung reibungsinduzierter Flutter-Instabilität anzugeben. Ein frühes Beispiel hierfür ist das in North [66] angegebene Modell mit zwei Freiheitsgraden, das später beispielsweise von Popp [70] aufgegriffen und weiterentwickelt wurde. Ein weiteres häufig verwendetes Modell ist das von Hoffmann und Gaul (z.B. [31]) vorgestellte Modell eines Einmassenschwingers mit schräg angeordneter elastischer Anbindung zur Außenwelt und einer Kontaktfeder. Dieses relativ einfache Modell genügt bereits, um die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix der zugehörigen Bewegungsgleichung zu brechen. Die physikalische Deutung der Systemelemente und damit die Übertragung auf praktische Probleme ist jedoch kaum möglich, sodass dieses Modell nicht weiter zum Verständnis der zugrundeliegenden physikalischen Zusammenhänge beiträgt. Ein Modell aus der jüngeren Vergangenheit zur Untersuchung räumlicher Reibung mittels einer taumelnden starren Scheibe schlägt von Wagner in [89] vor.

Seit Ende der 1980er werden verstärkt FE-Formulierungen zur Untersuchung detaillierter Bremsenmodelle verwendet (beispielsweise [51], [77]). Heutzutage sind FE-Berechnungen aus der industriellen NVH-Analyse nicht mehr wegzudenken (siehe z.B. [8], [37], [92]).

Neben diesen Ansätzen gibt es noch weitere zur Erklärung herangezogene Selbsterregungsmechanismen, wie beispielsweise die von Spurr vorgeschlagene *sprag slip*-Theorie [84], die jedoch bislang keine besondere Bedeutung erlangt hat. Hierauf soll im Folgenden nicht näher eingegangen werden.

1.4 Thema und Gliederung der Arbeit

Abstrakt betrachtet stellt eine Scheibenbremse ein System elastischer Kontinua dar, die teilweise Führungsbewegungen unterworfen sind und zwischen denen reibungsbehaftete Kontakte vorliegen. Gegenstand dieser Arbeit ist daher eine grundsätzliche Betrachtung des Stabilitätsverhaltens solcher Systeme unter besonderer Ausrichtung auf die Behandlung des Quietschens von Fahrzeugbremsen. Mit den so entwickelten Ergebnissen soll beispielhaft ein analytisches Bremsenmodell untersucht werden, um die maßgeblichen Systemparameter zu identifizieren.

Wie eingangs angemerkt, ist eine Klärung der offenen Fragen und Defizite nur durch eine

grundlegende Analyse des Problems zu erwarten. Dementsprechend wird vor der Diskussion eines Modells zunächst die dafür benötigte Theorie dargestellt und entwickelt. Die folgenden Ausführungen gliedern sich in fünf Kapitel:

- **Kapitel 2:** Zunächst werden Grundlagen der Kinematik elastischer Körper und insbesondere von Kontakten zwischen elastischen Körpern zusammenfassend vorgestellt. Dabei wird auch auf die raumfeste Beschreibung elastischer Körper eingegangen, die Führungsbewegungen unterworfen sind. Hierauf aufbauend werden mit Hilfe des Prinzips von Hamilton die räumlich diskretisierten Bewegungsgleichungen zunächst ohne Berücksichtigung der Kontakte angegeben. Anschließend werden für verschiedene alternative Möglichkeiten der Kontaktformulierung die diskretisierten Formen der virtuellen Arbeiten der Kontaktkräfte hergeleitet und linearisiert.

Als Ergebnis dieses Kapitels wird die prinzipielle Form der um die Ruhelage linearisierten Störungsgleichungen von Systemem bewegter Kontinua für verschiedene Kontaktformulierungen bestimmt.

- **Kapitel 3:** Gegenstand dieses Kapitels ist die Beurteilung der Stabilität der Ruhelage anhand der zuvor ermittelten Störungsgleichungen. Nach einer energetischen Betrachtung werden hierfür zunächst grundlegende Aspekte der Stabilität quadratischer Eigenwertprobleme mit Matrizen allgemeiner Struktur diskutiert. Auf Basis dieser Darstellung werden speziell für die Untersuchung von Reibungsinstabilitäten relevante Ergebnisse der Stabilitätstheorie zusammengestellt und entwickelt. Anschließend werden Grundlagen zum Einfluss skalarer Systemparameter auf Eigenwerte und Eigenvektoren eines Systems vorgestellt.

Nach diesen Vorbereitungen werden oszillatorische Instabilitäten der trivialen Lösung der in Kapitel 2 ermittelten Störungsgleichungen untersucht. Dabei wird insbesondere auf die Einflüsse der Führungsbewegung, der Reibungslinearisierung und der Materialdämpfung eingegangen.

- **Kapitel 4:** Zunächst werden experimentelle Ergebnisse vorgestellt und daraus Anforderungen an ein geeignetes mechanisches Modell abgeleitet. Als Folgerung aus den Kapiteln 2 und 3 liegt das Augenmerk dabei auf der konsistenten Formulierung der Kontaktkinematik (und hier insbesondere auf den Relativbewegungen im Kontakt). Nach Diskretisierung des Modells werden anhand von Eigenwertanalysen Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt. Unter Hinblick auf die Ergebnisse von Kapitel 3 werden dabei verschiedene Modellierungsstufen der geschwindigkeitsproportionalen Kräfte miteinander verglichen. Anhand des analytischen Modells werden zudem die für das Quietschen maßgeblichen Parameter herausgearbeitet.
- **Kapitel 5:** Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung samt einer Einordnung der Arbeit und einem Ausblick.

Kapitel 2

Elastische Systeme mit Reibkontakt

In diesem Kapitel werden elastische Systeme mit Kontakten in allgemeiner Form behandelt. Besonderes Augenmerk wird dabei auf Systeme elastischer Körper gesetzt, die teilweise Führungsbewegungen unterworfen sind. Beispiele hierfür sind Bremssysteme, Kupplungen oder "singende Gläser" (siehe Abbildung 2.1).

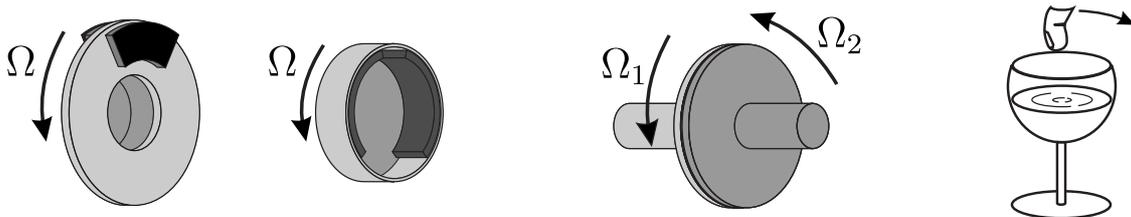


Abbildung 2.1: Beispiele für Systeme elastischer Körper mit Reibkontakten.

Zunächst werden kinematische Grundbegriffe zur Beschreibung von elastischen Festkörpern und Kontakten zwischen ihnen eingeführt. Mittels des Prinzips von Hamilton wird eine integralschwache Formulierung der Systemdynamik angegeben. Diese wird im Weiteren genutzt, um die prinzipielle Form diskretisierter Näherungslösungen zu untersuchen. Dabei werden keine besonderen Einschränkungen hinsichtlich der Ansatzfunktionen gemacht, sodass die Ergebnisse für analytische Rechnungen mit globalen Ansätzen ebenso gültig sind wie für FE-Formulierungen. Hierbei wird insbesondere auf die Berücksichtigung der Führungsbewegung bei einer Beschreibung der Verschiebungen in raumfesten Koordinaten eingegangen.

2.1 Kinematik

Im Folgenden sollen grundlegende Aspekte der Kontaktmechanik elastischer Körper diskutiert werden. Dies geschieht im Hinblick auf die zu untersuchenden Probleme unter Beschränkung auf zweiseitige, dauerhaft geschlossene Kontakte. Die besonderen Probleme, die infolge einseitiger Kontakte auftreten, sind für die letztlich angestrebte Stabi-

litätsuntersuchung mittels Linearisierung um die Ruhelage nicht weiter von Bedeutung.

2.1.1 Allgemein

Ein Körper $\bar{\mathcal{B}}_i$ besteht aus einer Menge materieller Punkte. Diese materiellen Punkte werden eindeutig durch ihre materiellen Koordinaten gekennzeichnet, die in der Spaltenmatrix $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ zusammengefasst sind. Die Oberfläche des Körpers wird im Folgenden mit $\partial\mathcal{B}_i$ bezeichnet und beinhaltet alle materiellen Punkte, die nicht ausschließlich von weiteren materiellen Punkten des Körpers umgeben sind. Das Innere des Körpers ist \mathcal{B}_i und der Gesamtkörper wird durch die Vereinigung beider Teilmengen gebildet, d.h. $\bar{\mathcal{B}}_i = \bigcup \{\mathcal{B}_i, \partial\mathcal{B}_i\}$

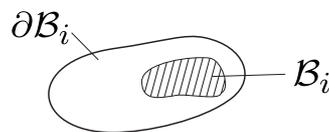


Abbildung 2.2: Körper $\bar{\mathcal{B}}_i$: Körperinneres \mathcal{B}_i und Berandung $\partial\mathcal{B}_i$.

Die räumliche Position eines materiellen Punktes wird nach Einführung eines Koordinatensystems durch die räumlichen Koordinaten $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ beschrieben. Zwischen räumlichen und materiellen Koordinaten des Körpers i besteht der eineindeutige Zusammenhang

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad , \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) . \quad (2.1)$$

Während bei kartesischen Koordinatensystemen die Koordinaten eines Punktes identisch sind mit den Koeffizienten der Basisvektoren in den Komponenten des Ortsvektors, ist dies bei krummlinigen Koordinatensystemen im Allgemeinen nicht der Fall. Ist beispielsweise der Ortsvektor \vec{r} zu den kartesischen Koordinaten $\mathbf{x} = (x, y, z)$ gegeben als $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, so lautet er für Zylinderkoordinaten $\mathbf{x} = (r, \varphi, z)$ nämlich $\vec{r} = r\vec{e}_r(\varphi) + z\vec{e}_z$.

In jedem Fall jedoch ist der Ortsvektor eine eineindeutige Funktion der räumlichen Koordinaten, d.h. $\vec{r} = \vec{r}(\mathbf{x})$, da mit (2.1)

$$\vec{r} = \vec{r}(\mathbf{X}, t) = \vec{r}(\mathbf{x}(\mathbf{X}), t) \quad (2.2)$$

folgt.

Geschwindigkeit und Beschleunigung eines materiellen Punktes ergeben sich als zeitliche Ableitungen seines Ortsvektors bei festgehaltener materieller Koordinate, d.h.

$$\vec{v}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathbf{x}} \vec{r}(\mathbf{X}, t) \quad , \quad \vec{a}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{\mathbf{x}} \vec{r}(\mathbf{X}, t) . \quad (2.3)$$



Abbildung 2.3: Materielle und räumliche Koordinaten. Ortsvektor im Raum.

Diese Größen lassen sich auch mittels räumlicher Koordinaten ansprechen: mit dem durch (2.1) gegebenen Zusammenhang $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ ergeben sich Geschwindigkeit und Beschleunigung des gerade bei den räumlichen Koordinaten \mathbf{x} befindlichen materiellen Punktes \mathbf{X} durch Substitution $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ in (2.3) zu

$$\vec{v}(\mathbf{x}, t) = \vec{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t), \quad \vec{a}(\mathbf{x}, t) = \vec{a}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t). \quad (2.4)$$

Darüber hinaus lassen sich ausgehend von den Geschwindigkeiten der materiellen Punkte die zugehörigen *virtuellen Verrückungen* im Sinne des Prinzips von Hamilton bequem ermitteln. Bei der Formulierung der virtuellen Arbeit einer potentiallosen Kraft im Sinne des erweiterten Prinzips von Kirchhoff-Hamilton ist die virtuelle Verrückung eines Kraftangriffspunktes bei festgehaltener materieller Koordinate \mathbf{X} zu formulieren [76]. Sie geht also gemäß

$$\delta \vec{r} = d\vec{r} \Big|_{\substack{t=\text{const} \\ \mathbf{X}=\text{const}}} \quad (2.5)$$

aus dem totalen Differential $d\vec{r}$ des Ortsvektors \vec{r} hervor. Das totale Differential $d\vec{r}$ lässt sich dabei bequem aus der Absolutgeschwindigkeit \vec{v} des materiellen Kraftangriffspunktes ermitteln.

Zur Beschreibung der *Deformation* eines Körpers i lässt sich der Deformationsgradient $\vec{\vec{F}}$ des Körpers i als Gradient

$$\vec{\vec{F}} = \text{Grad} \vec{r} \quad (2.6)$$

des Feldes der Ortsvektoren \vec{r} seiner materiellen Punkte einführen, wobei Grad den Gradienten bezüglich des materiellen Koordinatensystems bezeichnet [74], [96]. Der Deformationsgradient stellt den materiellen Gradienten einer räumlichen Größe dar und ist somit ein sogenannter Doppeltensor oder Zweifeldtensor. Ist $d\vec{R}$ ein Linienelement im materiellen System und $d\vec{r}$ ein Linienelement im räumlichen System, so vermittelt der Deformationsgradient zwischen beiden gemäß

$$d\vec{r} = \vec{\vec{F}} d\vec{R}. \quad (2.7)$$

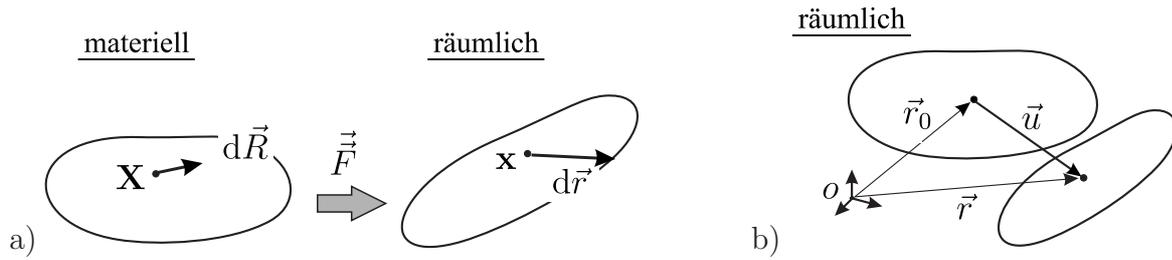


Abbildung 2.4: a) Deformationsgradient. b) Verschiebungsfeld.

Zur kompakten Charakterisierung der Deformation existiert eine Vielzahl von Größen. Als Maß für die Verzerrung lässt sich beispielsweise der Green-Lagrange-Verzerrungstensor einführen:

$$\vec{E} = \frac{1}{2} \left((\vec{F})^T \vec{F} - \vec{1} \right). \quad (2.8)$$

Wählt man als Referenz für die materiellen Koordinaten eine deformationsfreie Konfiguration im Raum, in der die räumliche Position eines materiellen Punktes als $\vec{r}_0(\mathbf{X})$ gegeben ist, so ist \vec{F} eine geeignete Größe, um die Deformation zwischen diesem Ausgangszustand und einem anderen Zustand zu charakterisieren.

Mit dem Verschiebungsfeld $\vec{u}(t) = \vec{r}(\mathbf{X}, t) - \vec{r}_0(\mathbf{X}, t)$ gilt $\vec{F} = \vec{1} + \text{Grad } \vec{u}$ und damit folgt für kleine Deformationen $\text{Grad } \vec{u} \ll 1$ der linearisierte räumliche Almansi-Verzerrungstensor zu

$$\vec{\varepsilon} = \vec{E}_{lin} = \frac{1}{2} (\text{Grad } \vec{u} + \text{Grad } \vec{u}^T). \quad (2.9)$$

Der linearisierte Verzerrungstensor ist also darstellbar als Funktion des Verschiebungsfeldes.

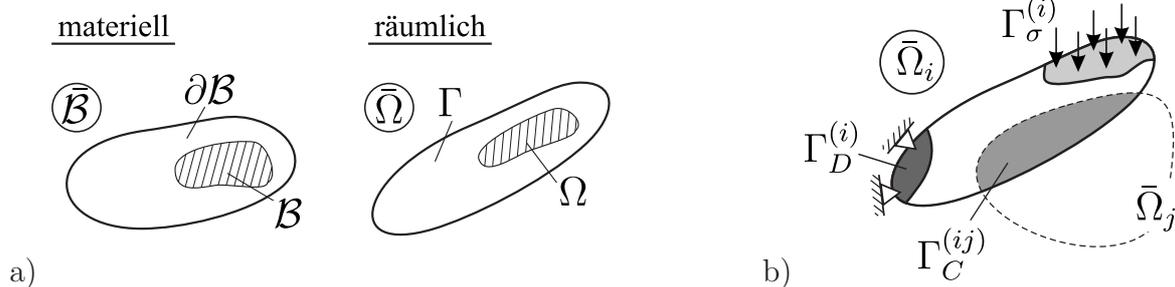


Abbildung 2.5: a) Körper: materiell $\bar{\mathcal{B}}$, räumlich $\bar{\Omega}$. b) Oberflächenbereiche der räumlichen Platzierung $\bar{\Omega}_i$ des Körpers $\bar{\mathcal{B}}_i$. Die Bereiche des Kontaktpartners $\bar{\Omega}_j$ sind nicht bezeichnet.

Die räumliche Platzierung eines Körpers i lautet

$$\bar{\Omega}_i = \vec{r} \{ \bar{\mathcal{B}}_i \} = \{ \vec{r}(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in \bar{\mathcal{B}}_i \}. \quad (2.10)$$

Hierbei ist $\bar{\Omega}_i$ die Menge der Platzierungen aller Körperpunkte und umfasst das Innere Ω_i sowie die räumliche Berandung

$$\Gamma^{(i)} = \partial\Omega_i = \vec{r}\{\partial\mathcal{B}_i\} = \{\vec{r}(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in \partial B_i\} \quad (2.11)$$

eines Körpers.

Die Oberfläche $\Gamma^{(i)}$ der räumlichen Platzierung des Körpers i lässt sich in folgende, nicht notwendigerweise zusammenhängenden Teilbereiche unterteilen:

- $\Gamma_D^{(i)}$ – Bereich, in dem eine Dirichletsche Randbedingung gilt ,
- $\Gamma_\sigma^{(i)}$ – Bereich, in dem eine von Neumannsche Randbedingung vorgegeben ist, sowie
- $\Gamma_C^{(i)}$ – Bereich auf i , in dem Kontakt zu einem anderen Körper herrscht.

Dabei gilt $\Gamma^{(i)} = \bigcup_{j=D,\sigma,C} \Gamma_j^{(i)}$. Obgleich sich die Definition (2.10) auf die räumliche Position \vec{r} bezieht, sind die eingeführten Mengen äquivalent durch die entsprechenden räumlichen Koordinaten \mathbf{x} dieses Ortsvektors ansprechbar. Die Aussagen $\vec{r}(\mathbf{x}) \in \Omega_i$ und $\mathbf{x} \in \Omega_i$ beispielsweise werden daher im Weiteren synonym gebraucht.

2.1.2 Kontakt

Zur Beschreibung des Kontaktes der Oberflächen $\Gamma^{(i)}$, $\Gamma^{(j)}$ der Körper \mathcal{B}_i , \mathcal{B}_j ist es notwendig, die sich berührenden Punkte $\vec{r} \in \Gamma_C$ zu identifizieren. Dabei wird in der Regel eine der beiden Oberflächen zur Parametrisierung gewählt. Der Kontaktbereich Γ_C ist dabei nicht à priori bekannt und wird durch die Menge der sich berührenden Punkte bestimmt.

Wird ein Punkt $\hat{\vec{r}}_i$ auf der Oberfläche $\Gamma^{(i)}$ von Ω_i gewählt, so lässt sich der zugehörige Kontaktpunkt auf $\Gamma^{(j)}$ durch

$$\hat{\vec{r}}_j(\hat{\vec{r}}_i) = \arg \min_{\vec{r}_j \in \Gamma^{(j)}} \|\vec{r}_j - \hat{\vec{r}}_i\| \in \Gamma^{(j)} \quad \text{für } \hat{\vec{r}}_i \in \Gamma^{(i)} \quad (2.12)$$

definieren. Zusammen bilden beide Punkte das Kontaktpaar $\{\hat{\vec{r}}_i, \hat{\vec{r}}_j\}$. Der Accent circonflexe soll dabei kennzeichnen, dass ein Punkt Teil der Oberfläche ist.

In jedem der Punkte $\hat{\vec{r}}_i, \hat{\vec{r}}_j$ eines Kontaktpaares lässt sich eine Flächennormale $\vec{e}_n^{(i)}$ bzw. $\vec{e}_n^{(j)}$ angeben, die per Definition körperauswärts weisen soll (siehe Abbildung 2.6).

Diente Gleichung (2.12) dazu, zu einem Punkt der Oberfläche $\Gamma^{(i)}$ den korrespondierenden Kontaktpunkt auf $\Gamma^{(j)}$ zu finden, so lässt sich nun eine Abstandsfunktion (*gap-function*)

$$g_{ij}(\hat{\vec{r}}_i) = - \min_{\vec{r}_j \in \Gamma^{(j)}} \|\vec{r}_j - \hat{\vec{r}}_i\| \leq 0 \quad \text{für } \hat{\vec{r}}_i \in \Gamma^{(i)} \quad (2.13)$$

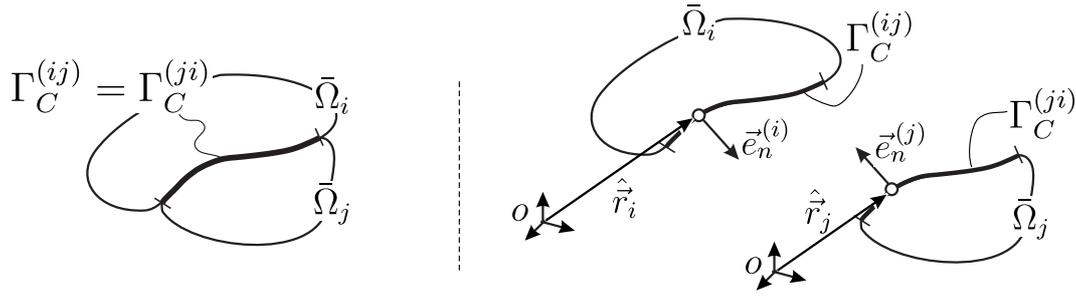


Abbildung 2.6: Kontaktkinematik.

einführen, die den Abstand zwischen dem Punkt $\hat{r}_i \in \Gamma^{(i)}$ und der Oberfläche $\Gamma^{(j)}$ angibt. Diese Funktion bezieht sich dabei auf den nächstgelegenen Punkt $\hat{r}_j \in \Gamma^{(j)}$. Für $g_{ij} = 0$ fallen beide Punkte zusammen. Die Indizes der Funktion g_{ij} zeigen dabei die Wahl von Referenzoberfläche (i) und abhängiger Oberfläche (j) an.

Der Abstand ist prinzipiell unabhängig von der Wahl der Parametrisierungsoberfläche, d.h. es gilt $g_{ij} = g_{ji}$. Für kleine Abstände $g > 0$ ist näherungsweise $\vec{e}_n^{(i)} \approx -\vec{e}_n^{(j)}$ und für $g = 0$ gilt $\vec{e}_n^{(i)} = -\vec{e}_n^{(j)}$ exakt. Damit lässt sich g_{ij} auch schreiben als

$$g_{ij} = (\hat{r}_j - \hat{r}_i) \cdot \vec{e}_n^{(j)} \leq 0. \quad (2.14)$$

Ausführen der ersten Variation dieser Gleichung liefert unter Beachtung der Orthogonalität

$$(\hat{r}_j - \hat{r}_i) \cdot \delta \vec{e}_n^{(j)} = 0 \quad (2.15)$$

dann

$$\delta g_{ij} = (\delta \hat{r}_j - \delta \hat{r}_i) \cdot \vec{e}_n^{(j)} \leq 0. \quad (2.16)$$

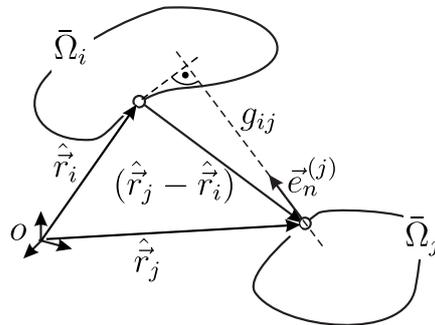


Abbildung 2.7: Abstandsfunction g_{ij} .

Sich berührende Festkörper können nicht ineinander eindringen: bei einem geschlossenen Kontakt bedeutet dies, dass die Normalkomponente der Relativgeschwindigkeit zweier Kon-

taktpunkte entweder verschwindet oder zu einer Öffnung des Kontaktes führt. Für ein Kontaktpaar $\{\hat{r}_i, \hat{r}_j\}$ heißt dies für die Normalkomponente der Relativgeschwindigkeit

$$\hat{v}_{n,rel}^{(ij)} = \left(\vec{v}(\hat{r}_j) - \vec{v}(\hat{r}_i) \right) \cdot \vec{e}_n^{(j)}. \quad (2.17)$$

Es ergibt sich somit, dass für einen geschlossenen Kontakt die Normalkomponente der Relativgeschwindigkeit negativ ist oder verschwindet, d.h.

$$g_{ij}(\hat{r}_i) = 0 : \quad \hat{v}_{n,rel}^{(ij)} \stackrel{!}{\leq} 0 \quad \text{und damit auch} \quad \left(\delta \hat{r}_j - \delta \hat{r}_i \right) \cdot \vec{e}_n^{(j)} \leq 0. \quad (2.18)$$

Dies steht im Einklang mit Gleichung (2.16) und rechtfertigt die zuvor scheinbar künstliche Vorzeichenwahl der Abstandsfunktion.

Ist ein Öffnen des Kontaktes ausgeschlossen, so gilt

$$g_{ij}(\hat{r}_i) = 0 = \text{const} : \quad \hat{v}_{n,rel}^{(ij)} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und damit auch} \quad \left(\delta \hat{r}_j - \delta \hat{r}_i \right) \cdot \vec{e}_n^{(j)} = 0. \quad (2.19)$$

Es lassen sich also zwei Fälle unterscheiden:

- Der Kontakt ist geschlossen und kann sich nicht öffnen: $g = 0$, $\delta g = 0$.
- Der Kontakt ist geschlossen, kann sich prinzipiell öffnen: $g = 0$, $\delta g \leq 0$.

Der Kontaktbereich $\Gamma_C^{(ij)}$ der Oberflächen i, j ergibt sich als Menge aller Punkte eines Körpers i , die zu einem anderen Körper j des Systems einen verschwindenden Abstand $g_{ij} = 0$ haben. Es gilt somit

$$\Gamma_C^{(ij)} = \{\vec{r}_i \mid g_{ij}(\vec{r}_i) = 0\} \quad \text{bzw.} \quad \Gamma_C^{(ji)} = \{\vec{r}_j \mid g_{ji}(\vec{r}_j) = 0\}. \quad (2.20)$$

Im Kontakt sind die räumlichen Positionen der Kontaktpunkte gleich, und es folgt

$$\hat{r}_i = \hat{r}_j, \quad \hat{r}_i \in \Gamma_C^{(ij)}, \quad \hat{r}_j \in \Gamma_C^{(ji)} \quad \text{und damit} \quad \Gamma_C^{(ij)} = \Gamma_C^{(ji)}. \quad (2.21)$$

Für $\Gamma_C^{(ij)} = \emptyset$ sind die Körper nicht im Kontakt.

2.2 Kinetik

Die Kinetik soll mit Hilfe des erweiterten Prinzips von Hamilton behandelt werden. Dieses erlaubt eine kompakte Darstellung dynamischer Probleme, ohne auf eine vorherige Diskretisierung angewiesen zu sein. Darüber hinaus stellt es zugleich eine integralschwache Formulierung als Ausgangspunkt für Näherungslösungen (z.B. im Sinne finiter Elemente) bereit. Zudem lassen sich à priori Aussagen über Symmetrieeigenschaften der Systemmatrizen des diskretisierten Problems treffen.

2.2.1 Mechanisches Prinzip

Bei Herleitung des Prinzips von Hamilton durch Integration des Prinzips der virtuellen Arbeit ergibt sich zunächst die allgemeine Form

$$\int_0^t \delta T dt + \int_0^t \delta W dt = 0. \quad (2.22)$$

Hierbei bezeichnet T die gesamte kinetische Energie des Systems und δW die gesamte virtuelle Arbeit des Systems, welche die virtuelle Arbeit der inneren und äußeren Kräfte sowie die virtuelle Formänderungsarbeit umfasst. Bei der Diskussion kontinuierlicher Systeme ist neben (2.22) noch die Angabe der wesentlichen Randbedingungen (Dirichletsche Randbedingungen) erforderlich. Häufig lassen diese sich für einen Körper i als linearer Differentialoperator

$$D[\vec{r}_i] = 0, \quad \vec{r}_i \in \Gamma_D^{(i)} \quad (2.23)$$

auf $\Gamma_D^{(i)}$ schreiben, der im Allgemeinen explizit zeitabhängig sein kann.

Die kinetische Energie $T = \sum_i T_i$ des Systems setzt sich additiv aus der kinetischen Energie T_i der Systembestandteile zusammen. In materieller Formulierung gilt hierbei für einen Einzelkörper i

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{\bar{B}_i} \rho_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i dV. \quad (2.24)$$

Das Potential des Systems setzt sich zusammen aus den inneren elastischen Potentialen der Körper sowie den äußeren Potentialen der konservativen Kräfte auf die Körper:

$$U = \sum_i \left(U_i^{(I)} + U_i^{(A)} \right). \quad (2.25)$$

Für die erste Variation des Potentials gilt

$$\delta U = \sum_i \left(\delta U_i^{(I)} + \delta U_i^{(A)} \right). \quad (2.26)$$

Beispielsweise gilt für einen linearelastischen Körper i , bei dem der Spannungs- und Verzerrungstensor (2. Stufe) über den symmetrischen Elastizitätstensor $\overset{\text{sym}}{C}_i$ (4. Stufe) gemäß

$$\vec{\sigma}_i = \overset{\text{sym}}{C}_i \cdot \cdot \vec{\varepsilon}_i \quad (2.27)$$

verknüpft sind, für das innere elastische Potential und seine Variation

$$U_i^{(I)} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_i} \vec{\varepsilon}_i \cdot \cdot \overset{\text{sym}}{C}_i \cdot \cdot \vec{\varepsilon}_i \, dV \quad \text{bzw.} \quad \delta U_i^{(I)} = \int_{\mathcal{B}_i} \delta \vec{\varepsilon}_i \cdot \cdot \overset{\text{sym}}{C}_i \cdot \cdot \vec{\varepsilon}_i \, dV. \quad (2.28)$$

Hierbei bezeichnet $\cdot \cdot$ das Doppelskalarprodukt zwischen zwei Tensoren, das auch als Verjüngung bezeichnet wird.

Die virtuelle Arbeit der elastischen Spannungen ist damit gegeben als

$$\delta W_i^{(I)} = -\delta U_i^{(I)} = - \int_{\mathcal{B}_i} \delta \vec{\varepsilon}_i \cdot \cdot \overset{\text{sym}}{C}_i \cdot \cdot \vec{\varepsilon}_i \, dV. \quad (2.29)$$

Die Verknüpfung der virtuellen Arbeiten einer Potentialgröße mit der Variation ihres Potentials lautet für alle anderen Potentialgrößen analog und es ergibt sich letztlich für die virtuelle Arbeit aller Potentialgrößen am System

$$\delta W_{pot} = -\delta U. \quad (2.30)$$

Fasst man also die virtuelle Arbeit aller Potentialgrößen als Variation des Gesamtpotentials U auf, so lässt sich durch Einführen der Lagrangefunktion $L = T - U$ Gleichung (2.22) zu

$$\delta \int_0^t L \, dt + \int_0^t (\delta W_{pl} + \delta W_C) \, dt = 0 \quad (2.31)$$

mit der virtuellen Arbeit der potentiallosen Kräfte δW_{pl} und der virtuellen Arbeit der Kontaktkräfte δW_C umschreiben. Weitere Details sind beispielsweise in [76] zu finden.

Die Trennung der Kontaktkräfte von den übrigen potentiallosen Kräften ist hierbei vorteilhaft, da ihnen im Folgenden besonderes Interesse zuteil wird.

Obgleich Kontaktkräfte sich nicht aus einem klassischen Potential ableiten lassen, wird häufig der nichtdissipative Anteil der Kontaktnormalspannungen in Form einer Potentialfunktion Π_C eingeführt, deren Variation dann u.a. die virtuelle Arbeit der Kontaktnormalspannungen liefert (siehe z.B. [97]). Die Systemgleichungen lauten dann

$$\delta \int_0^t (L - \Pi_C) \, dt + \int_0^t (\delta W_{pl} + \delta W_C^*) \, dt = 0, \quad (2.32)$$

wobei δW_C^* die virtuelle Arbeit der tangentialen Kontaktspannungen sowie des dissipations-behafteten Anteils der Normalspannungen im Kontakt beinhaltet. Diese Schreibweise erlaubt letztlich durch Auswechseln von Π_C die Anwendung verschiedener Normalkontaktformulierungen, ohne die restliche Dynamik stets neu anschreiben zu müssen.

2.2.2 Potentiallose Kräfte

Die virtuelle Arbeit δW_{pl} der potentiallosen Kräfte umfasst grundsätzlich alle Kräfte, die nicht in T oder U Berücksichtigung fanden. Hierzu zählen neben den nichtkonservativen Teilen der Kontaktspannungen auch Dämpfungskräfte. Diese kann man einteilen in

- innere Dämpfung infolge des dissipativen Werkstoffverhaltens
- äußere Dämpfung durch dissipative Kräfte von außen, wie z.B. Luftreibung.

Im Rahmen dieser Arbeit wird lediglich viskose Dämpfung berücksichtigt – andere Formen der Dämpfung, wie beispielsweise Fügestellenreibung, werden nicht betrachtet.

Die Modellierung von Dämpfungseffekten erweist sich in der praktischen Berechnung als recht problematisch. Nicht zuletzt liegt dies an der Schwierigkeit, die zahlreichen Mechanismen im Versuch voneinander abzugrenzen und experimentelle Daten der Einzelphänomene zu ermitteln.

Ein häufig in der Rotordynamik verwendeter Ansatz zur Modellierung viskoser Dämpfung besteht in der Annahme, dass die Dissipation abhängig ist von der Bewegungs- und der Deformationsgeschwindigkeit des Körpers [14]. Wird die Dissipation für kleine Geschwindigkeiten als proportional zur Bewegungs- und Deformationsgeschwindigkeit angesetzt, so lässt sich dann für den i -ten Körper die virtuelle Arbeit der Dämpfung als

$$\delta W_D^{(i)} = \delta W_{D,a}^{(i)} + \delta W_{D,i}^{(i)} = - \int_{\Omega_i} \delta \vec{p}_i \alpha_i (\varrho_i \dot{\vec{p}}_i) da - \int_{B_i} \delta \vec{\varepsilon}_i \cdot \overset{\parallel}{D}_i \cdot \dot{\vec{\varepsilon}}_i dV \quad (2.33)$$

schreiben. Der Operator $\cdot \cdot$ bezeichnet dabei das Skalarprodukt zwischen zwei Tensoren.

Der Anteil $\delta W_{D,a}^{(i)}$ der äußeren Dämpfung wird dabei als proportional zur Geschwindigkeit $\dot{\vec{p}}_i$ von Körperpunkten $\vec{p}_i(\mathbf{x})$ bezüglich des raumfesten Systems angenommen. Das Mitnehmen der Dichte wird sich später als praktisch erweisen, da der erste Summand dann gerade proportional zur Massenmatrix des Körpers ist.

Im Beitrag $\delta W_{D,i}^{(i)}$ der inneren Dämpfung beschreibt der Tensor $\overset{\parallel}{D}_i$ die Dissipation infolge kleiner materieller Deformationsgeschwindigkeiten $\dot{\vec{\varepsilon}}_i = \frac{d}{dt} \Big|_{\mathbf{x}} \vec{\varepsilon}_i$ und wird hier ebenfalls als konstant angenommen.

Während der erste Summand sicher selbstadjungiert ist, hängt dies beim zweiten von den Eigenschaften von $\overset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{D}}_i$ ab. Häufig wird der Dissipationstensor als Vielfaches des Elastizitätstensors gewählt, d.h. $\overset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{D}}_i = \beta_i \overset{\text{---}}{\underset{\text{---}}{C}}_i$.

Dämpfung, die wie beschrieben als proportional zu Massen- und Steifigkeitsoperator gewählt wird, bezeichnet man als proportionale Dämpfung oder auch als Rayleigh-Dämpfung. Werden für die Diskretisierung mitrotierende Koordinaten gewählt, entstehen aus der Dämpfung lediglich symmetrische Beiträge zu den Systemmatrizen. Wählt man bei der Diskretisierung bewegter Kontinua jedoch raumfeste Koordinaten, so entstehen aus der inneren Dämpfung auch schiefsymmetrische Anteile in der Matrix der lageproportionalen Kräfte. Diese sind beispielsweise für die Destabilisierung von Rotoren durch innere Dämpfung verantwortlich [14], [34].

Es muss zudem angemerkt werden, dass dieser Ansatz Frequenz- und Amplitudenabhängigkeit der Dämpfung sowie hysteretisches oder anisotropes Verhalten nicht berücksichtigt. Außerdem ist die Symmetrie des Dissipationstensors physikalisch nicht zwingend notwendig sondern lediglich eine Annahme.

2.2.3 Kontakt

Ist \vec{s}_{ij} der Randspannungsvektor in der Kontaktzone $\Gamma_C^{(ij)}$ des Körpers i und \vec{s}_{ji} der entsprechende Vektor in $\Gamma_C^{(ji)}$ auf j , so lautet die gesamte virtuelle Arbeit die Randspannungen in diesem Kontakt

$$\delta W_C^{(ij)} = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \delta \vec{r}_i \cdot \vec{s}_{ij} da + \int_{\Gamma_C^{(ji)}} \delta \vec{r}_j \cdot \vec{s}_{ji} da. \quad (2.34)$$

Da die Randspannungsvektoren \vec{s}_{ij} , \vec{s}_{ji} Schnittgrößen darstellen, gilt $\vec{s}_{ij} + \vec{s}_{ji} = \vec{0}$. Jeder dieser beiden Spannungsvektoren lässt sich gemäß

$$\vec{s} = \sigma_n \vec{e}_n + \tau \vec{e}_t \quad (2.35)$$

in Anteile normal und tangential zum lokalen Oberflächenelement zerlegen. Da die Einheitsvektoren \vec{e}_n , \vec{e}_t auf den beteiligten Oberflächen gemäß

$$\vec{e}_n^{(ij)} = -\vec{e}_n^{(ji)} \quad \text{und} \quad \vec{e}_t^{(ij)} = -\vec{e}_t^{(ji)} \quad (2.36)$$

gegenseitig gerichtet sind (siehe Abbildung 2.8), folgt für die Koordinaten der Spannungskomponenten

$$\sigma_n^{(ij)} = \sigma_n^{(ji)} \quad \text{und} \quad \tau^{(ij)} = \tau^{(ji)}. \quad (2.37)$$

Zudem ist die räumliche Ausdehnung beider Kontaktzonen identisch:

$$\Gamma_C^{(ij)} = \Gamma_C^{(ji)}. \quad (2.38)$$

Damit lässt sich (2.34) mit $\vec{s}_{ij} = \vec{s}_{ji}$ umschreiben zu

$$\delta W_C^{(ij)} = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \vec{s}_{ij} \, da. \quad (2.39)$$

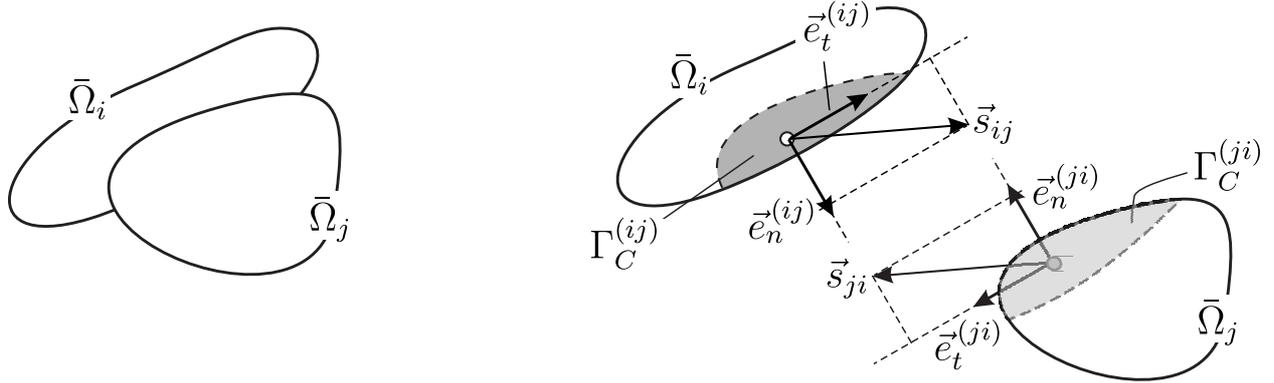


Abbildung 2.8: Kontaktspannungen und lokale Einheitsvektoren.

Mit (2.37) folgt

$$\delta W_C^{(ij)} = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \left(\sigma_n^{(ij)} \vec{e}_n^{(ij)} + \tau^{(ij)} \vec{e}_t^{(ij)} \right) \, da \quad (2.40)$$

$$= \delta W_{C,n}^{(ij)} + \delta W_{C,t}^{(ij)}. \quad (2.41)$$

2.2.3.1 Beitrag der Normalspannung

Unter der Voraussetzung, dass der Kontakt sich nicht öffnet, sondern bestehen bleibt, gilt $\delta g = 0$ und wegen

$$\delta W_{C,n}^{(ij)} = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \underbrace{(\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_n^{(ij)}}_{=\delta g=0} \sigma_n^{(ij)} \, da = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \delta g_{ij} \sigma_n^{(ij)} \, da = 0 \quad (2.42)$$

in Verbindung mit (2.19) verschwindet der Beitrag der Normalspannungskomponente $\sigma_n^{(ij)}$ zur virtuellen Arbeit der Kontaktkräfte. Für $\delta g_{ij} = 0$ stellt der Kontakt eine zweiseitige kinematische Nebenbedingung dar und die virtuelle Arbeit der damit einhergehenden Zwangskräfte ist null.

Es ist zu beachten, dass dies für einseitige Bindungen (d.h. Kontakte die sich öffnen können) im Allgemeinen nicht gilt: hier ist vielmehr $\delta g \leq 0$ und somit $\delta W_{C,n} = \int \delta g \lambda_n \, da \leq 0$ (Fouriersche Ungleichung, siehe [45]).

Obgleich die virtuelle Arbeit $\delta W_{C,n}$ der Kontaktnormalspannungen verschwindet und somit keinen direkten Einfluss auf durch eine Projektionsmethode gewonnene Bewegungsgleichungen hat, werden sie später zur Ermittlung der Scherspannungen im Kontakt benötigt. Es ist also notwendig, die Systemgleichungen unter Beachtung der Nebenbedingungen zu lösen und gleichzeitig die dazu notwendigen Zwangsgrößen zu ermitteln. Offensichtlich ist dies mit erhöhtem Aufwand verbunden.

Klassischerweise wird man hierbei die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren anwenden, da diese nicht auf einer Elimination der Zwangsgrößen beruht und die Nebenbedingung exakt repräsentiert. Daneben gibt es eine Vielzahl abgeschwächter Formulierungen (z.B. die große Klasse der regularisierten Probleme), die Näherungslösungen unter reduziertem Aufwand gestatten.

2.2.3.2 Beitrag der Scherspannungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich Kontakte $\Gamma_C^{(ij)}$ betrachtet, in denen Gleitreibung vorliegt. Diese muss stets durch eine explizite Beziehung (Reibungsmodell, konstitutive Gleichung) gegeben sein. Abhängig von Anwendungsfeld und Größenskala existiert eine große Vielfalt von Reibungsmodellen (siehe z.B. [6] oder [44]). Auf der Makroskala am weitesten verbreitet sind Reibungsmodelle nach Coulomb-Amontons, die trockene Reibung und Mischreibung zwischen Festkörpern beschreiben.

Die Amontons'schen Gesetze sind empirisch gewonnene Gesetze, die – aufbauend auf Arbeiten da Vincis – im Wesentlichen von Amontons formuliert und später von Coulomb vervollständigt wurden [3]. Sie postulieren in ihrer Urfassung, dass die Gleitreibungskraft \vec{F}_R unabhängig ist von der Kontaktfläche A . Dies lässt sich auch derart deuten, dass die Gleitreibung unabhängig von der Ausdehnung des Kontaktes als flächenspezifische Größe $\tau = \frac{dF_R}{dA}$ formuliert werden kann. Darüber besagen die Amontons'schen Gesetze die Proportionalität zwischen dem Betrag der Normal- und Reibungskraft, d.h. $F_R = \mu F_N$. Die Gleitreibungskraft ist somit eine eingeprägte Kraft, die jedoch von einer Zwangskraft abhängt.

Flächenspezifisch formuliert lautet die Gleitreibungsspannung

$$\tau = \frac{d(\mu F_N)}{dA} = \mu \frac{d(F_N)}{dA} = \mu \sigma_n, \quad (2.43)$$

wobei in den meisten Anwendungsfällen

$$\mu = \text{const} - \text{trockene Reibung} \quad \text{oder} \quad \mu = \mu(|\vec{v}_{rel}|) - \text{Mischreibung} \quad (2.44)$$

gewählt wird. Die Richtung der Gleitreibungskraft steht dabei der Relativbewegung der im Kontakt stehenden materiellen Punkte entgegen.

Darüber hinaus existieren detailliertere Reibungsmodelle, die über die Relativgeschwindigkeit hinaus weitere Einflussfaktoren (wie z.B. die Normalspannung, die Belastungsrate, usw.) berücksichtigen. Weitere Details hierzu finden sich beispielsweise in [3], [35].

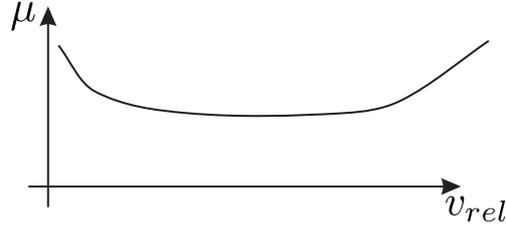


Abbildung 2.9: Reibung: Beispiel für die Abhängigkeit des Gleitreibungskoeffizienten μ von der Relativgeschwindigkeit v_{rel} der Kontaktpartner.

In einem Gleitreibungsgebiet $\Gamma_C^{(ij)}$ lautet also mit dem Reibgesetz (2.43) der Randspannungsvektor auf den Körper i

$$\vec{s}_{ij} = \sigma_n^{(ij)} \left(\vec{e}_n^{(ij)} + \mu \vec{e}_t^{(ij)} \right). \quad (2.45)$$

Dieser Randspannungsvektor \vec{s}_{ij} steht mit dem Spannungstensor $\vec{\sigma}_i$ über

$$\vec{s}_i = \vec{\sigma}_i \vec{e}_n^{(ij)} \quad (2.46)$$

in Verbindung, wobei $\vec{e}_n^{(ij)}$ die Flächennormale auf die Oberfläche von i im betrachteten Oberflächenpunkt darstellt. Der Spannungstensor $\vec{\sigma}_i$ ist durch eine Materialgleichung (innere konstitutive Gleichung) mit den Verzerrungen und gegebenenfalls den Verzerrungsgeschwindigkeiten verbunden. So gilt für

- einen elastischen Körper $\vec{\sigma}_i = \vec{\sigma}_i(\vec{\varepsilon}_i)$ und für
- einen viskoelastischen Körper $\vec{\sigma}_i = \vec{\sigma}_i(\vec{\varepsilon}_i, \dot{\vec{\varepsilon}}_i)$.

Während für rein elastische Körper die Kontaktnormalspannung also nur von der Deformation abhängt, ist sie für viskoelastische Körper zudem auch eine Funktion der materiellen Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\vec{\varepsilon}}_i$.

Es ist jedoch zu beachten, dass dieser Zusammenhang noch nicht ausreichend ist, die Kontaktnormalspannungen explizit zu berechnen, da die Verzerrungsfelder der Kontaktkörper zunächst ermittelt werden müssen.

Die Gleitreibungsspannungen sind grundsätzlich der Relativgeschwindigkeit der materiellen Kontaktpunkte entgegengesetzt. Im Allgemeinen gilt für den Richtungsvektor

$$\vec{e}_t^{(ij)} = -\frac{1}{|\vec{v}_{rel}^{(ij)}|} \vec{v}_{rel}^{(ij)} = -\vec{e}_t^{(ji)} \quad \text{mit } \vec{v}_{rel}^{(ij)} = \vec{v}(\hat{r}_i) - \vec{v}(\hat{r}_j). \quad (2.47)$$

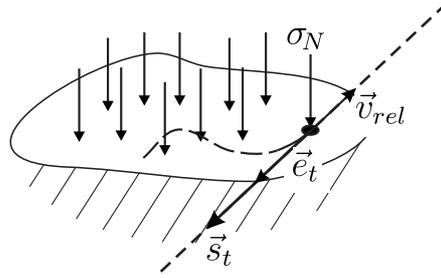


Abbildung 2.10: Gleitreibung: Relativgeschwindigkeit \vec{v}_{rel} , Normalspannung σ_N , Richtungsvektor \vec{e}_t der Gleitreibung und tangentielle Komponente \vec{s}_t des Randspannungsvektors.

Die Richtung $\vec{e}_t^{(ij)}$ des Spannungsvektors \vec{s}_i ist somit abhängig von der Relativbewegung der Kontaktpartner i, j und ist nicht à priori als Funktion des Ortes bekannt. Zudem ist der Richtungsvektor $\vec{e}_t^{(ij)}$ in einem Oberflächenpunkt $\hat{r} \in \Gamma_i$ stets Teil des Tangentialraums an den Körper $\bar{\Omega}_i$ in diesem Punkt. Der Richtungsvektor in $\Gamma_C^{(ij)}$ ist somit allgemein durch

$$\vec{e}_t^{(ij)} = \vec{e}_t^{(ij)} \left(\hat{r}_i, \vec{v}_{rel}^{(ij)} \right) \quad \text{für } \hat{r}_i \in \Gamma^{(ij)} \quad (2.48)$$

gegeben. Dies ist die allgemeine Form räumlicher Reibung. In Analogie zur Klassifizierung kinematischer Nebenbedingungen von Systemen wird diese Form der Reibung im Folgenden als *nicht-holonome Reibung* bezeichnet, da die zugehörige virtuelle Arbeit nicht als Funktion darstellbar ist, die nur von den generalisierten Koordinaten abhängt.

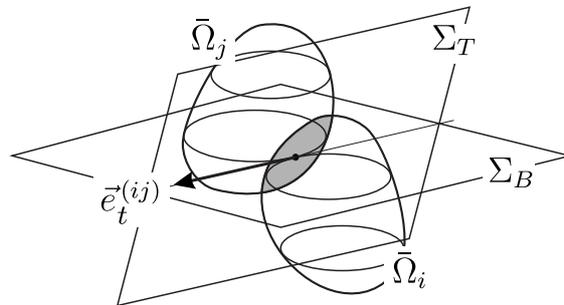


Abbildung 2.11: Holonome Gleitreibung. Die materiellen Punkte eines Kontaktpunktpaares zwischen den Platzierungen $\bar{\Omega}_i, \bar{\Omega}_j$ zweier Körper bewegen sich in der Ebene Σ_B . Der Richtungsvektor der Gleitreibung ist kollinear zur Schnittgeraden zwischen der Bewegungsebene Σ_B und der Tangentialebene Σ_T im Kontaktpunkt.

Ein wichtiger Sonderfall liegt jedoch vor, wenn die Randspannung infolge der Gleitreibung entlang einer bekannten Raumkurve wirkt. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn

- die beteiligten Körper ebene Bewegungen ausführen und die Tangentialebene im Kontakt nicht mit der Bewegungsebene zusammenfällt. Die Richtung der Reibspannung ist dann kollinear zur Schnittgeraden der Bewegungsebene Σ_B und der Tangentialebene Σ_T im Kontaktpunkt (siehe Abbildung 2.11).

- der Kontaktpunkt durch eine holonome Nebenbedingung an eine Raumkurve gebunden ist.

In beiden Fällen ist der Richtungsvektor $\vec{e}_t^{(ij)}$ als Tangentenvektor an eine Kurve gegeben, die vollständig über die Lage des Systems ausgedrückt werden kann.

Lediglich der Richtungssinn der Kurventangente muss nach wie vor über das Vorzeichen der Relativgeschwindigkeit ermittelt werden. In vielen Fällen – so z.B. nach Linearisierung der Bewegungsgleichungen – entfällt diese Abhängigkeit jedoch, und es gilt dann

$$\vec{e}_t^{(ij)} = \vec{e}_t^{(ij)}(\hat{r}_i) \quad \text{für } \hat{r} \in \Gamma_C^{(ij)}. \quad (2.49)$$

Diese Reibung wird im Folgenden als *holonome Reibung* bezeichnet, da sich ihre Richtung vollständig als Funktion der Lage der im Kontakt stehenden Körper darstellen lässt. In der Literatur findet sich bisweilen auch der Begriff der linienförmigen Reibung [93].

Der Beitrag der Gleitreibungsspannungen lautet damit

$$\delta W_{C,t}^{(ij)} = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \mu \sigma_n^{(ij)} \vec{e}_t^{(ij)} \cdot (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \, da. \quad (2.50)$$

2.2.3.3 Gesamte virtuelle Arbeit

Da der Beitrag der Normalspannungen zur virtuellen Arbeit verschwindet, verbleibt lediglich der Anteil der Tangentialspannungen infolge der Gleitreibung. Für Coulombsche Reibung lautet die gesamte virtuelle Arbeit der Kontaktspannungen somit

$$\delta W_C^{(ij)} = \delta W_{C,t}^{(ij)} = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \mu \sigma_n^{(ij)} \vec{e}_t^{(ij)} \cdot (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \, da. \quad (2.51)$$

Damit die Gleitreibung Einfluss auf die Systemdynamik nehmen kann, darf die Tangentialkomponente der Differenz der virtuellen Verschiebungen beider Kontaktpunkte nicht verschwinden.

Beispiele: Zunächst werden Vertikalschwingungen einer undehnbaren Saite betrachtet, die mit der Geschwindigkeit v_0 durch zwei Rollenlager bewegt wird und bei $x = x^*$ im Kontakt mit einem Massenpunkt steht (siehe Abbildung 2.12 a). Zwischen beiden herrscht die Reibung τ . Wird die Saite als unendlich dünn modelliert, so besteht kein Unterschied zwischen der Ober- und der Unterseite der Saite und alle Punkte der Saite bewegen sich ausschließlich in vertikaler Richtung. Aus der Normalkontaktbedingung folgt $\delta y = \delta w(x^*)$. Die Differenz $(\delta \vec{r}_{\text{Saite}} - \delta \vec{r}_m)$ zwischen den virtuellen Verschiebungen beider Punkte verschwindet und damit ist $\delta W_C = 0$. Die Reibung beeinflusst die Dynamik des Systems somit nicht. Es ist anzumerken, dass in diesem Beispiel sogenannte nichtmaterielle Randbedingungen vorliegen, die ihrerseits das Stabilitätsverhalten beeinflussen können [75].

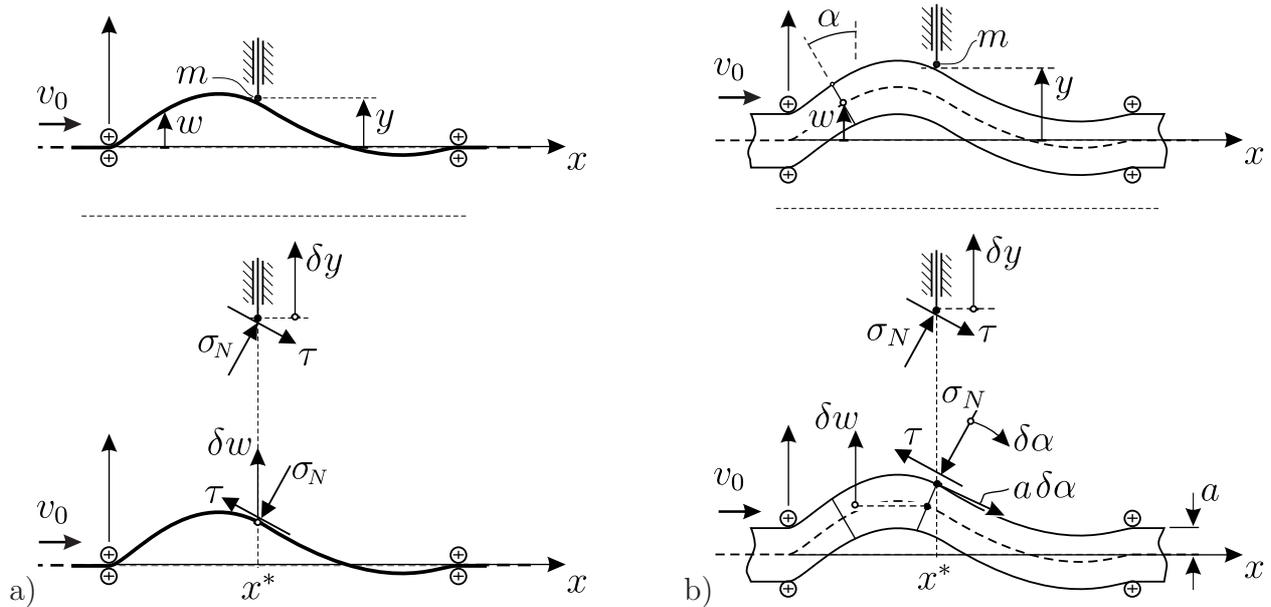


Abbildung 2.12: Beispiele zur virtuellen Arbeit der Reibung: a) Bewegte Saite. b) Bewegter Balken mit detaillierter Kontaktkinematik.

Als zweites Beispiel wird ein mit der Geschwindigkeit v_0 durch zwei Rollenlager bewegter Biegebalken betrachtet (siehe Abbildung 2.12 b). Unter Verwendung der kinematischen Annahme ebener Querschnitte lässt sich die virtuelle Verschiebung eines Kontaktpunktes an der Oberfläche mit Hilfe der vertikalen virtuellen Verschiebung δw des entsprechenden Punktes der neutralen Faser zusammen mit dem Beitrag aus der virtuellen Verkippung $\delta\alpha$ des Querschnittes ermitteln (siehe auch [29], [78], [83]). Im dargestellten Beispiel gilt für die virtuelle Verschiebung eines Punktes an der Oberseite des Balkens $\delta\vec{r}_{B,O} = (a \cos \alpha \delta\alpha, \delta w - a \sin \alpha \delta\alpha)^\top$, während die virtuelle Verschiebung der Masse $\delta\vec{r}_m = (0, \delta y)^\top$ lautet. Für $a > 0$ gilt offenbar $\vec{e}_t^{(B,O)} \cdot (\delta\vec{r}_{B,O} - \delta\vec{r}_m) \neq 0$ und damit auch $\delta W_C \neq 0$. Bei diesem System hat die Reibung somit Einfluss auf die Dynamik. Weitere Ausführungen finden sich in Kapitel 4.

2.3 Diskretisierung

Ausgangspunkt zur Diskretisierung von Feldproblemen ist häufig eine integralschwache Formulierung, die entweder direkt aus einem mechanischen Prinzip (z.B. dem der virtuellen Arbeit) resultiert oder aber durch entsprechende Umformulierung aus der zugrundeliegenden Feldgleichung entsteht (z.B. Verfahren der gewichteten Residuen). Daneben existieren noch andere Verfahren, wie z.B. Kollokationsverfahren oder Finite-Differenzen-Verfahren, auf die aber hier nicht näher eingegangen werden soll [19], [72], [76].

Das Prinzip von Hamilton soll im Folgenden als Ausgangspunkt für die Diskretisierung

dienen, da es einerseits physikalisch motiviert bereits eine integralschwache Formulierung bereitstellt und andererseits für selbstadjungierte Differentialoperatoren (im Ort) symmetrische Systemmatrizen garantiert. Insbesondere die letztgenannte Eigenschaft wird bei Stabilitätsuntersuchungen von Vorteil sein.

Konkret soll im Folgenden ein System von n Kontinua untersucht werden, die stationären Führungsbewegungen unterworfen sind. Auf die Kontinua wirken neben Trägheit und elastischen Kräften auch allgemeine potentiallose Kräfte sowie Kontaktkräfte.

Mit Gleichung (2.32) ist die Dynamik des Systems durch

$$\delta \int_0^t (L - \Pi_C) dt + \int_0^t (\delta W_{pl} + \delta W_C^*) dt = 0 \quad (2.52)$$

in Verbindung mit den wesentlichen Randbedingungen gegeben, wobei $L = T - U$ die Lagrangefunktion und δW_{pl} die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte des gesamten Systems repräsentiert. Da im Folgenden verschiedene Varianten zur Formulierung des Normalkontaktes vorgestellt werden sollen, wird der Einfluss des Normalkontaktes hier allgemein als Variation der (künstlichen) Potentialfunktion Π_C geschrieben. Die Formulierung des Normalkontaktes als Variationsproblem stellt dabei eine schwache Formulierung dar und eröffnet – je nach Formulierung – vielfältige Möglichkeiten für Approximationen. Die virtuelle Arbeit der restlichen Kontaktgrößen ist in δW_C^* zusammengefasst. Zur Formulierung des Problems im Sinne des Prinzips von Hamilton treten schließlich noch die wesentlichen (geometrischen) Randbedingungen.

Sind die Potentiale des Systems linear in den Verschiebungen, so lässt sich (2.52) nach Ausführen der Variationen und partieller Integration in der Zeit als

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\mathcal{B}_i} \left(\delta \vec{r}_i \cdot \varrho_i \vec{a}_i + \delta \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{C}_k \cdot \vec{\varepsilon}_i \right) dV - \delta W_{pl}^{(i)} \right\} \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \left(\delta \pi_C^{(ij)} - \delta w_C^{*(ij)} \right) da \end{aligned} \quad (2.53)$$

schreiben. Hierbei ist \vec{r}_i der Ortsvektor eines Masseteilchens des Körpers \mathcal{B}_i , $\Gamma_C^{(ij)}$ der Kontaktbereich zwischen Körper i und Körper j in räumlicher Darstellung und $\Pi_C^{(ij)} = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \pi_C^{(ij)} da$ bzw. $\delta W_C^{*(ij)} = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \delta w_C^{*(ij)} da$ das Normalkontaktpotential bzw. die virtuelle Arbeit der tangentialen Kontaktkräfte im Kontakt i - j . Die Doppelsumme auf der rechten Seite realisiert die Summation über alle möglichen Kontaktpaare, ohne eine Paarung doppelt zu berücksichtigen.

Die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte lässt sich gemäß

$$\delta W_{pl}^{(i)} = \delta W_D^{(i)} + \delta W_{pl,r}^{(i)} \quad (2.54)$$

in Anteile aus der Dämpfung und sonstige Beiträge aufteilen.

Wechsel auf raumfeste Koordinaten Obwohl alle Punkte eines bewegten elastischen Körpers i im Allgemeinen unterschiedliche Geschwindigkeiten haben, lässt sich in vielen Fällen dennoch eine gemeinsame Führungsbewegung abspalten. Die Bewegung des elastischen Körpers wird somit unterteilt in eine (quasi) Starrkörperbewegung und eine überlagerte Kontinuumsbewegung. Als Beispiel mag hier eine rotierende elastische Scheibe dienen: in vielen praxisrelevanten Fällen lässt sich dieser Scheibe – intuitiv – eine (”die”) Drehzahl zuordnen. Die Gesamtbewegung wird dann zusammengesetzt aus dieser Drehbewegung sowie überlagerten Kontinuumschwingungen.

Allgemein gilt dann für den Ortsvektor eines materiellen Teilchens \mathbf{X} des Körpers i

$$\vec{r}_i(\mathbf{X}, t) = \vec{b}_i(\mathbf{X}, t) + \vec{u}_i(\mathbf{X}, t), \quad (2.55)$$

wobei $\vec{b}_i(\mathbf{X}, t)$ die Führungsbewegung darstellt und $\vec{u}_i(\mathbf{X}, t)$ das überlagerte Verschiebungsfeld ist.

Geschwindigkeit und Beschleunigung eines materiellen Punktes ergeben sich als materielle Zeitableitungen (d.h. für $\mathbf{X} = \text{const}$) zu

$$\vec{v}_i(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathbf{X}} \vec{r}_i(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{b}_i(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_i(\mathbf{X}, t) = \vec{v}_{i,F} + \vec{v}_{i,rel}, \quad (2.56)$$

$$\vec{a}_i(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{\mathbf{X}} \vec{r}_i(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{b}_i(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{u}_i(\mathbf{X}, t) = \vec{a}_{i,F} + \vec{a}_{i,rel}. \quad (2.57)$$

Ist die Führungsbewegung \vec{b} eine Starrkörperbewegung bezüglich des raumfesten Systems, so lässt sich mit der Identität

$$\vec{b}_i(\mathbf{X}, t) = \vec{b}_i(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)) = \vec{b}(\mathbf{x}) \quad (2.58)$$

ein Zusammenhang zwischen den mitbewegten körperfesten Koordinaten $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^\top$ und den räumlichen Koordinaten $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\top$ herstellen. Für stationäre Führungsbewegungen hat dieser Zusammenhang die Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{v}_T t \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{v}_T t \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad \text{und} \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \quad (2.59)$$

Dabei beinhaltet die Spaltenmatrix $\mathbf{v}_T = [v_{T,1}, v_{T,2}, v_{T,3}]^\top$ die durch die Führungsbewegung verursachten zeitlichen Änderungen $v_{T,k} = \dot{x}_k$ der Koordinaten x_k . Mit diesen Beziehungen lassen sich Geschwindigkeit und Beschleunigung (2.56), (2.57) implizit als Funktion der räumlichen Koordinaten ausdrücken:

$$\vec{v}_i(\mathbf{x}) = \vec{v}_i((\mathbf{X}, t), t) \quad \text{und} \quad \vec{a}_i(\mathbf{x}) = \vec{a}_i(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t). \quad (2.60)$$

Da diese Darstellung explizit zeitabhängige Raumkoordinaten beinhaltet, ist sie nicht zum Aufbau von Formulierungen geeignet, die mit Ansatzfunktionen in räumlichen Koordinaten

arbeiten. Es muss daher auf räumliche Vektorfelder $\vec{p}_i(\mathbf{x}, t)$ übergegangen werden, die \mathbf{x} und t als unabhängige Variable haben.

Mit dem räumlichen Verschiebungsfeld $\vec{w}_i(\mathbf{x}, t)$ und (2.58) lässt sich dann das räumliche Feld

$$\vec{p}_i(\mathbf{x}, t) = \vec{b}_i(\mathbf{x}) + \vec{w}_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.61)$$

formulieren.

Der Zusammenhang zwischen den Vektorfeldern $\vec{r}_i(\mathbf{X}, t)$ und $\vec{p}_i(\mathbf{x}, t)$ ist durch die Forderung gegeben, dass die Auslenkungen beider Felder zu allen Zeitpunkten identisch sind, d.h.

$$\vec{p}_i(\mathbf{x}, t) \stackrel{!}{=} \vec{r}_i(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) \quad (2.62)$$

$$\rightsquigarrow \vec{b}_i(\mathbf{x}) + \vec{w}_i(\mathbf{x}, t) \stackrel{!}{=} \vec{b}_i(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)) + \vec{u}_i(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t), \quad (2.63)$$

woraus sich nach Subtraktion der Führungsbewegung (2.58) der Zusammenhang beider Felder zu

$$\vec{w}_i(\mathbf{x}, t) = \vec{u}_i(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) \quad (2.64)$$

ergibt. Während das Feld \vec{p}_i originär in räumlichen Koordinaten formuliert ist, ist das materiell angesprochene Feld lediglich durch den Zusammenhang $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ zu einem räumlichen Feld umgeschrieben worden. Zeitliche Differentiation des Feldes $\vec{p}_i(\mathbf{x}, t)$ erfolgt bei $\mathbf{x} = \text{const}$ und ergibt $\dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{w}}_i$. Für stationäre Führungsbewegungen gilt $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_T = -\dot{\mathbf{X}}$ und aus (2.64) folgt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{d}{dt} \{ \vec{u}_i(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)) \} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_i(\mathbf{X}, t) + \sum_k \dot{X}_k \frac{\partial}{\partial X_k} \vec{u}_i(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_i(\mathbf{X}, t) - \sum_k v_{T,k} \frac{\partial}{\partial X_k} \vec{u}_i(\mathbf{X}, t). \quad (2.66)$$

Ein Vergleich mit (2.56) zeigt, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}_i(\mathbf{X}, t) = \vec{v}_i - \vec{v}_{iF} \quad (2.67)$$

gilt. Zudem ist $\frac{\partial}{\partial X_k} \vec{u}_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{w}_i$. Schließlich erhält man zwischen dem räumlichen Feld \vec{p}_i und dem materiellen Feld \vec{r}_i , das die Ableitung materieller Geschwindigkeiten erlaubt, den Zusammenhang

$$\dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{w}}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{iF} - \sum_k v_{T,k}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{w}_i. \quad (2.68)$$

Analog dazu ergibt sich für die Beschleunigung

$$\ddot{\vec{p}}_i = \ddot{\vec{w}}_i = \vec{a}_i - \vec{a}_{iF} - \sum_k v_{T,k}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_k} \vec{w}_i - \sum_k \sum_\ell v_{T,k}^{(i)} v_{T,\ell}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \vec{w}_i. \quad (2.69)$$

Zusammenfassend lassen sich also die kinematischen Größen \vec{r}_i , \vec{v}_i , \vec{a}_i eines materiellen Teilchens mittels

$$\vec{r}_i = \vec{p}_i = \vec{b}_i + \vec{w}_i, \quad (2.70)$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{iF} + \dot{\vec{w}}_i + \sum_k v_{T,k}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{w}_i, \quad (2.71)$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_{iF} + \ddot{\vec{w}}_i + \sum_k v_{T,k}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_k} \vec{w}_i + \sum_k \sum_\ell v_{T,k}^{(i)} v_{T,\ell}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_\ell} \vec{w}_i \quad (2.72)$$

in Abhängigkeit von einem räumlichen Feld $\vec{w}_i(\mathbf{x}, t)$ angeben. Für die Führungsgrößen \vec{a}_{iF} und \vec{v}_{iF} gilt hierbei

$$\vec{v}_{iF} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{b}_i \quad \text{und} \quad \vec{a}_{iF} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{b}_i. \quad (2.73)$$

Für ein stationäres Feld sind sie zeitlich konstant, können jedoch vom Ort abhängig sein.

Anders als beim Feld \vec{r}_i sind dabei \mathbf{x} und t voneinander unabhängige Variable, sodass $\dot{\vec{w}}_i = \frac{d}{dt} \vec{w}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \vec{w}_i}{\partial t}$ ist. Aus der Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v}_i eines materiellen Teilchens lässt sich nun leicht seine virtuelle Verrückung als

$$\delta \vec{r}_i = \delta \vec{w}_i \quad (2.74)$$

angeben.

Da die durch \vec{b}_i dargestellte Starrkörperbewegung keine Deformationen des Körpers bewirkt, folgt mit dem Zusammenhang $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ (d.h. $\text{Grad}_{\mathbf{X}} \{ \} = \text{grad}_{\mathbf{x}} \{ \}$)

$$\vec{\varepsilon}_i = \frac{1}{2} \left[\text{grad} \{ \vec{w}_i \} + \text{grad} \{ \vec{w}_i \}^\top \right] \quad (2.75)$$

für den linearisierten Verzerrungstensor $\vec{\varepsilon}_i$.

Wegen $\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$, d.h. $\text{Grad}_{\mathbf{X}} \{ \} = \text{grad}_{\mathbf{x}} \{ \}$, ist somit

$$\vec{\varepsilon}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left[\text{grad} \{ \vec{r}_i \} + \text{grad} \{ \vec{r}_i \}^\top \right] = \vec{\varepsilon}_i(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t). \quad (2.76)$$

Wie zuvor ist bei Ermittlung der materiellen Zeitableitung wiederum die durch die Führungsbewegung hervorgerufene Koordinatenänderung zu berücksichtigen. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \vec{\varepsilon}_i(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\varepsilon}_i + \sum_k \dot{X}_k \frac{\partial}{\partial X_k} \vec{\varepsilon}_i = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\varepsilon}_i - \sum_k v_{T,k}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{\varepsilon}_i \quad (2.77)$$

Damit lässt sich die virtuelle Arbeit $\delta W_{D,i}^{(i)}$ der inneren Dämpfung ebenfalls von materiellen auf raumfeste Koordinaten umschreiben (siehe Gleichung (2.33)). Die virtuelle Arbeit $\delta W_{D,a}^{(i)}$ der äußeren Dämpfung ist bereits vom Ansatz her in raumfesten Koordinaten formuliert.

Die Bewegungsgleichungen des Systems lauten damit in raumfesten Koordinaten \mathbf{x}

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega_i} \left(\delta \vec{w}_i \cdot \varrho_i \left[\ddot{\vec{w}}_i + \sum_k v_{T,k}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \dot{\vec{w}}_i + \sum_k \sum_{\ell} v_{T,k}^{(i)} v_{T,\ell}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_{\ell}} \vec{w}_i + \vec{a}_{F,i} \right] \right. \right. \quad (2.78)$$

$$\left. + \delta \vec{\varepsilon}_i \cdot \overset{\parallel}{\underset{\parallel}{C}}_k \cdot \vec{\varepsilon}_i + \delta \vec{\varepsilon}_i \cdot \beta_i \overset{\parallel}{\underset{\parallel}{D}}_i \cdot \left[\dot{\vec{\varepsilon}}_i + \sum_k v_{T,k}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{\varepsilon}_i \right] + \delta \vec{w}_i \cdot \varrho_i \alpha_i \dot{\vec{w}}_i \right) J dv - \delta W_{pl,r} \left. \right\} \quad (2.79)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \left(\delta \pi_C^{(ij)} - \delta w_C^{*(ij)} \right) da. \quad (2.80)$$

2.3.1 Diskretisierung ohne Kontakt

Zur Diskretisierung des räumlichen Feldes $\vec{w}_i(\mathbf{x})$ des Körpers i wird nun ein d -gliedriger Ansatz der Form

$$\vec{w}_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^d \vec{R}_{mi}(\mathbf{x}) q_{im}(t) + \Delta_i^{(d)} \quad (2.81)$$

gewählt, wobei \vec{R}_{mi} vektorielle Ortsansatzfunktionen darstellen, $q_{im} = q_{im}(t)$ die zugehörigen generalisierten Koordinaten sind und $\Delta_i^{(d)}$ der verbleibende Fehler ist. Da sowohl Verfahren mit globalen Ansatzfunktionen als auch solche mit lokalen diesem Schema entsprechen, gelten die folgenden Überlegungen für analytische Handrechnungen ebenso wie für Berechnungen mit kommerziellen FEM-Paketen.

Fasst man die Ortsansatzfunktionen für den i -ten Körper in der Zeilenmatrix

$$\Phi_i = [\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{R}_n]_i \quad (2.82)$$

und die zugehörigen generalisierten Koordinaten in der Spaltenmatrix

$$\mathbf{q}_i = [q_1, \dots, q_n]_i^{\top} \quad (2.83)$$

zusammen, so lässt sich die Näherungslösung des Feldes (2.81) sowie der entsprechenden Ableitungen kompakt als

$$\begin{aligned} \vec{w}_i &\approx \Phi_i \mathbf{q}_i \quad , \quad \dot{\vec{w}}_i \approx \Phi_i \dot{\mathbf{q}}_i \quad , \quad \ddot{\vec{w}}_i \approx \Phi_i \ddot{\mathbf{q}}_i \\ \sum_k v_{T,k}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{w}_i &\approx \sum_k v_{T,k}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi_i \mathbf{q}_i = \left[\sum_k v_{T,k}^{(i)} \Phi_{i,x_k} \right] \mathbf{q}_i \\ \sum_k \sum_{\ell} v_{T,k}^{(i)} v_{T,\ell}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_{\ell}} \vec{w}_i(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_k \sum_{\ell} v_{T,k}^{(i)} v_{T,\ell}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_{\ell}} \Phi_i \mathbf{q}_i = \left[\sum_k \sum_{\ell} v_{T,k}^{(i)} v_{T,\ell}^{(i)} \Phi_{i,x_k x_{\ell}} \right] \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (2.84)$$

schreiben. Aus der Geschwindigkeit folgt für die Variation

$$\delta \vec{w}_i \approx \mathbf{\Phi}_i \delta \mathbf{q}_i = \delta \mathbf{q}_i^\top \mathbf{\Phi}_i^\top.$$

Typische Beispiele für Ortsansatzfunktionen sind lokal begrenzte Funktionen, die nur in einem kleinen Bereich nicht verschwinden, oder globale Systeme von Ansatzfunktionen, die den gesamten Bereich des Kontinuums abdecken. Die erste Variante bildet die Basis der wichtigen Klasse von FE-Verfahren, während die zweite Variante für analytische Rechnungen von großem Wert ist.

Abhängig von der Art des Ansatzes werden verschieden starke Anforderungen an die Ortsansatzfunktionen gestellt. Allen gemein ist, dass die Ansatzfunktionen linear unabhängig sein müssen, um eindeutige Gleichungssysteme zu erhalten. Zudem müssen sie ausreichende Differenzierbarkeit aufweisen, damit alle geforderten Ortsableitungen darstellbar sind. Darüber hinaus wird in der Regel verlangt, dass alle bis auf eine Ansatzfunktion auf dem Rand verschwinden, um eine eindeutige Zuordnung der wesentlichen (Dirichletschen) Randbedingung vornehmen zu können. Für die Ableitungen wird dies im Allgemeinen nicht gefordert. Aufgrund ihrer örtlichen Beschränktheit ist diese Forderung bei lokalen Ansatzfunktion in der Regel einfach zu erfüllen, während sie bei System globaler Ansatzfunktionen gesondert beachtet werden muss.

Weitere Details zur Wahl der Ansatzfunktionen finden sich beispielsweise in [42], [73], [81].

Die Diskretisierung des in (2.80) auftretenden Tensor-Skalarprodukts, des inneren elastischen Potentials sowie der inneren Dämpfung erfordert an sich einen Übergang auf Indexschreibweise, da diese Rechenoperation symbolisch nicht mehr durchführbar ist. Ist der Verzerrungstensor $\vec{\varepsilon}$ jedoch symmetrisch, so lassen sich mit Hilfe der Voigtschen Notation (z.B. [2]) mit $\mathbf{e} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{12}]^\top$ die Tensorskalarprodukte in Matrizennotation schreiben und man erhält für die Variation des inneren elastischen Potentials

$$\delta U = \int_{\Omega_i} \delta \mathbf{e}_i^\top \mathbf{C}_i \mathbf{e}_i J dv \quad (2.85)$$

sowie für den Anteile der inneren Dämpfung an der virtuellen Arbeit der potentiallosen Kräfte

$$\delta W_{D,i}^{(i)} = \int_{\Omega_i} \delta \mathbf{e}^\top \tilde{\mathbf{D}}_i \left(\dot{\mathbf{e}} + \sum_k v_{T,k}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e} \right) J dv. \quad (2.86)$$

Zudem lässt sich zeigen, dass \mathbf{e}_i und $\delta \mathbf{e}_i^\top$ als

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{q}_i, \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{e}_i^\top = \mathbf{q}_i^\top \mathbf{B}_i^\top \quad (2.87)$$

ausgedrückt werden können, wobei die Matrizen \mathbf{B}_i nur Ortsableitungen der Koordinaten der Ansatzfunktionen $\vec{R}_{ki}(\mathbf{x})$ beinhalten (siehe beispielsweise [15], [16]).

Einsetzen in (2.80) liefert zunächst

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \left(\delta \mathbf{q}_i^\top \left[\varrho_i \mathbf{\Phi}_i^\top \cdot \mathbf{\Phi}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \left[\varrho_i \sum_k v_{T,k}^{(i)} \mathbf{\Phi}_i^\top \cdot \mathbf{\Phi}_{i,x_k} \right] \dot{\mathbf{q}}_i \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left[\varrho_i \sum_k \sum_\ell v_{T,k}^{(i)} v_{T,\ell}^{(i)} \mathbf{\Phi}_i^\top \cdot \mathbf{\Phi}_{i,x_k x_\ell} \right] \mathbf{q}_i \right] + \delta \mathbf{q}_i^\top \left[\mathbf{B}_i^\top \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \mathbf{q}_i \right] \right) J dv \\
& + \int_{\Omega_i} \delta \mathbf{q}_i \left[\alpha_i \varrho_i \mathbf{\Phi}_i^\top \cdot \mathbf{\Phi}_i \dot{\mathbf{q}}_i + \beta_i \mathbf{B}_i^\top \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{q}}_i + \beta_i \sum_k v_{T,k}^{(i)} \mathbf{B}_i^\top \mathbf{C}_i \mathbf{B}_{i,x_k} \mathbf{q}_i - \delta W_{pl,r}^{(i)} \right] J dv \quad (2.88) \\
& = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \left(\delta \pi_C^{(ij)} - \delta w_C^*{}^{(ij)} \right) da
\end{aligned}$$

und führt unter der Voraussetzung voneinander unabhängiger generalisierter Koordinaten q_{im} schließlich für jeden Körper i auf die Matrix-Differentialgleichung

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + (\mathbf{D}_i + \mathbf{G}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + (\mathbf{K}_i + \mathbf{N}_{D,i}) \mathbf{q}_i = \mathbf{F}_{C,i} + \mathbf{F}_{pl,i} \quad (2.89)$$

mit den Systemmatrizen

$$\mathbf{M}_i = \int_{\Omega_i} \varrho_i \mathbf{\Phi}_i^\top \cdot \mathbf{\Phi}_i J dv \quad , \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_i^\top \quad (2.90)$$

$$\mathbf{D}_i = \alpha_i \mathbf{M}_i + \beta_i \mathbf{K}_i \quad , \quad \mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i^\top \quad (2.91)$$

$$\mathbf{G}_i = \int_{\Omega_i} \varrho_i \sum_k v_{T,k}^{(i)} \mathbf{\Phi}_i^\top \cdot \mathbf{\Phi}_{i,x_k} J dv \quad , \quad \mathbf{G}_i = -\mathbf{G}_i^\top \quad (2.92)$$

$$\mathbf{K}_i = \int_{\Omega_i} \left(\mathbf{B}_i^\top \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i + \left[\varrho_i \sum_k \sum_\ell v_{T,k}^{(i)} v_{T,\ell}^{(i)} \mathbf{\Phi}_i^\top \cdot \mathbf{\Phi}_{i,x_k x_\ell} \right] \right) J dv \quad , \quad \mathbf{K}_i = \mathbf{K}_i^\top \quad (2.93)$$

$$\mathbf{N}_{D,i} = \int_{\Omega_i} \beta_i \sum_k v_{T,k}^{(i)} \mathbf{B}_i^\top \mathbf{C}_i \mathbf{B}_{i,x_k} J dv \quad , \quad \mathbf{N}_{D,i} = -\mathbf{N}_{D,i}^\top \quad (2.94)$$

und der Spaltenmatrix $\mathbf{F}_{C,i}$, der durch die Diskretisierung der virtuellen Arbeit δW_C der Kontaktkräfte entsteht. Sonstige potentiallose Kräfte sind in der Matrix $\mathbf{F}_{pl,i}$ zusammengefasst.

Diese Systemmatrizen werden dabei als

- Massenmatrix \mathbf{M}_i ,
- gyroskopische Matrix \mathbf{G}_i ,
- Dämpfungsmatrix \mathbf{D}_i ,
- Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_i ,

- zirkulatorische Matrix $\mathbf{N}_{D,i}$ der inneren Dämpfung

bezeichnet. Es ist zu beachten, dass aus der Linearisierung der nichtkonservativen Kontaktkräfte weitere Beiträge auch zu diesen Matrizen entstehen.

Die gyroskopische Matrix \mathbf{G}_i enthält die Führungsgeschwindigkeiten $v_{T,k}^{(i)}$ linear, während in der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} sogar Quadrate der Elemente von $\mathbf{v}_T^{(i)}$ auftreten können.

Die zirkulatorischen Anteile $\mathbf{N}_{D,i}$ aus der inneren Dämpfung sind proportional zum Produkt $\beta_i v_{T,k}^{(i)}$ und somit für kleine Dämpfungen $\beta_i \ll 1$ und kleine Führungsgeschwindigkeiten $v_{T,k}^{(i)} \ll 1$ klein von quadratischer Ordnung. In vielen praktisch relevanten Fällen können sie daher im Vergleich zu den im Folgenden dargestellten nichtsymmetrischen Anteilen der Reibungslinearisierung vernachlässigt werden.

2.3.2 Diskretisierung der Kontakte

Die Diskretisierung von Kontaktproblemen bringt in der praktischen Umsetzung eine Vielzahl von Problemen mit sich: diese reichen von der Ermittlung der in Kontakt stehenden Bereiche bzw. Knoten über die Formulierung der Nichteindringbedingung bis hin zur Auswahl numerisch effizienter Algorithmen. Dementsprechend vielfältig sind die Methoden, die in den letzten Jahrzehnten im Bereich der Strukturmechanik – und hier insbesondere im Bereich der FE-Methoden – entstanden sind. Für Weiteres sei auf [2], [47], [96] oder [97] verwiesen.

Im Folgenden sollen die wichtigsten Kontaktformulierungen grundlegend vorgestellt werden. Das Augenmerk liegt dabei auf der grundsätzlichen Struktur der resultierenden Bewegungsgleichungen und hierbei insbesondere der Störungsgleichungen, anhand derer letztlich die Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt werden.

Die virtuelle Arbeit der Kontaktkräfte am System ist allgemein gegeben durch

$$\delta W_C = \sum_i^n \sum_{j=i+1}^n \int_{\Gamma_{CG}^{(ij)}} \left(\underbrace{(\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_n^{(ij)}}_{=\delta g_{ij}} \sigma_n^{(ij)} + (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_t^{(ij)} \mu \sigma_n^{(ij)} \right) da \quad (2.95)$$

$$= \sum_i^n \sum_{j=i+1}^n \int_{\Gamma_{CG}^{(ij)}} \left(\delta g_{ij} \sigma_n^{(ij)} + (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_t^{(ij)} \mu \sigma_n^{(ij)} \right) da. \quad (2.96)$$

Die Summation $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n$ stellt eine Summe über alle Kontaktpaarungen i - j dar, wobei jede Paarung nur einmal berücksichtigt wird.

Obgleich die virtuelle Arbeit der Kontaktnormalspannung $\sigma_n^{(ij)}$ unter der Voraussetzung eines zweiseitigen "idealen" Kontaktes verschwindet, muss diese bei der Formulierung des Problems beibehalten werden, da sie für die Formulierung der Gleitreibungsspannungen im

Kontakt benötigt wird. Im Allgemeinen wird die virtuelle Arbeit der Kontaktnormalspannungen an den zur Diskretisierung verwendeten Ansatzfunktionen nämlich nur in der Summe der Ansatzfunktionen, jedoch nicht für jede einzelne verschwinden. Die Formulierung im Sinne einer virtuellen Arbeit bietet also eine abgeschwächte Formulierung des Problems.

Unter diesem Aspekt lassen sich somit zwei grundsätzliche Herangehensweisen unterscheiden:

- beliebige geeignete Ansatzfunktionen Φ_i : die virtuelle Arbeit der Kontaktnormalspannungen verschwindet nur in der Summe über alle beteiligten Ansatzfunktionen. In dieser Arbeit werden
 - die Methode der Lagrange-Multiplikatoren
 - eine Penalty-Formulierung

als typische grundsätzliche Verfahren zur Formulierung der Nichteindringbedingung diskutiert. Eine Übersicht über weitere Verfahren ist in [97] zu finden.

- spezielle Ansatzfunktionen $\tilde{\Phi}$: gelingt es, Lösungsansätze für \vec{r}_i, \vec{r}_j zu finden, die so voneinander abhängen, dass in den Kontaktzonen die Nichteindringbedingung von vornherein erfüllt ist, so verschwindet die virtuelle Arbeit der Normalspannungen identisch. Natürlich wird es nur in besonderen Fällen möglich sein, derartige Funktionen zu konstruieren. Es ist jedoch zu erwarten, dass solche Formulierungen aufgrund der natürlicherweise gegebenen Erfüllung der Nichteindringbedingung relativ übersichtliche Gleichungen hervorbringen.

Unabhängig von der gewählten Formulierung treten stets der Richtungsvektor der Gleitreibungskraft sowie der Gleitreibungskoeffizient μ auf.

Wie in Kapitel 2.2.3.2 diskutiert, ist die Richtung \vec{e}_t der Gleitreibungskraft allgemein durch die Relativgeschwindigkeit im Kontakt als

$$\vec{e}_t^{(ij)} = -\frac{1}{|\vec{v}_{rel}^{(ij)}|} \vec{v}_{rel}^{(ij)} \quad (2.97)$$

definiert. Mit der Diskretisierung (2.84) der Geschwindigkeit folgt für die Relativgeschwindigkeit

$$\vec{v}_{rel}^{(ij)} \approx \Phi_i \dot{\mathbf{q}}_i + \left[\sum_k v_{T,k}^{(i)} \Phi_{i,x_k} \right] \mathbf{q}_i - \Phi_j \dot{\mathbf{q}}_j - \left[\sum_k v_{T,k}^{(j)} \Phi_{j,x_k} \right] \mathbf{q}_j. \quad (2.98)$$

Somit ist die Relativgeschwindigkeit eine Funktion der generalisierten Lagen $\mathbf{q}_{i/j}$ und Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_{i/j}$ sowie der Führungsgeschwindigkeiten $\mathbf{v}_T^{(i)}, \mathbf{v}_T^{(j)}$ und es gilt für *nicht*holonome Reibung (siehe 2.2.3.2)

$$\vec{e}_t \approx \vec{e}_t^N \left(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_j, \mathbf{v}_T^{(i)}, \mathbf{v}_T^{(j)} \right). \quad (2.99)$$

Im Sonderfall *holonomer Reibung* (siehe 2.2.3.2) lässt sich die Richtung der Gleitreibungskraft allein aus der Konfiguration des Systems (d.h. der Kontur der Körper) und ohne Heranziehung der generalisierten Geschwindigkeiten ermitteln. Es folgt somit

$$\vec{e}_t \approx \vec{e}_t^H(\mathbf{q}_i) \quad \text{oder} \quad \vec{e}_t \approx \vec{e}_t^H(\mathbf{q}_j), \quad (2.100)$$

wobei zwischen der Beschreibung in Koordinaten des Körpers i oder j frei gewählt werden kann.

Bei der Berechnung technischer Probleme wird zumeist der Fall eines konstanten Gleitreibungskoeffizienten oder eines von der Relativgeschwindigkeit im Kontakt abhängigen berücksichtigt. Im ersten Fall ist

$$\mu = \text{const}, \quad (2.101)$$

während im zweiten Fall

$$\mu = \mu(\vec{v}_{rel}) \approx f_\mu \left(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_j, \mathbf{v}_T^{(i)}, \mathbf{v}_T^{(j)} \right) \quad (2.102)$$

gilt.

2.3.2.1 Lagrangesche Multiplikatoren

Ausgangspunkt ist die Potentialfunktion

$$\Pi_C^L = \sum_{(ij)} \int_{\Gamma_C^{(ij)}} g_{ij} \lambda_n^{(ij)} da \quad (2.103)$$

zur Beschreibung des Normalkontaktes. Hierbei ist der Lagrangesche Multiplikator $\lambda_n^{(ij)}$ physikalisch mit der Kontaktnormalspannung zu identifizieren, d.h. $\lambda_n^{(ij)} = \sigma_n^{(ij)}$.

Variation dieser Potentialfunktion liefert

$$\delta \Pi_C^L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \left(\int_{\Gamma_C^{(ij)}} \delta g_{ij} \lambda_n^{(ij)} da + \int_{\Gamma_C^{(ij)}} g_{ij} \delta \lambda_n^{(ij)} da \right). \quad (2.104)$$

Durch (2.103) werden die Lagrangemultiplikatoren $\lambda_n^{(ij)}$ als zusätzliche Unbekannte des Problems eingeführt und sind nicht explizit abhängig von den generalisierten Koordinaten \mathbf{q}_i , \mathbf{q}_j . Daher sind die Variationen δg_{ij} und $\delta \lambda_n^{(ij)}$ unabhängig voneinander und Einsetzen von (2.104) in die Systemgleichung (2.88) liefert zum einen die virtuelle Arbeit der Kontaktkräfte

$$\delta W_C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \int_{\Gamma_{CG}^{(ij)}} \left(\delta g_{ij} \lambda_n^{(ij)} + (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_t^{(ij)} \mu \lambda_n^{(ij)} \right) da \quad (2.105)$$

und zum anderen als zweite Gleichung eine schwache Formulierung der Nichteindringbedingung

$$0 = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \delta \lambda_n^{(ij)} g_{ij} \, da \quad (2.106)$$

für den Kontakt $i - j$.

Zur weiteren Auswertung der Systemgleichungen (2.88) sowie der Nebenbedingung (2.106) ist es über die Diskretisierung der Lagekoordinaten \vec{r}_i hinaus notwendig, die Abstandsfunktionen g_{ij} sowie die Kontaktnormalspannungen $\lambda_n^{(ij)}$ zu diskretisieren. Hierzu werden die Ansätze

$$g_{(ij)} = [g_1^i(\mathbf{x})q_{i1} + \dots + g_n^i(\mathbf{x})q_{in}] - [g_1^j(\mathbf{x})q_{j1} + \dots + g_m^j(\mathbf{x})q_{jm}] \quad (2.107)$$

$$= \boldsymbol{\theta}_i \mathbf{q}_i - \boldsymbol{\theta}_j \mathbf{q}_j \quad , \quad \boldsymbol{\theta}_i \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad , \quad \boldsymbol{\theta}_j \in \mathbb{R}^{1 \times m} = \text{const} \quad (2.108)$$

und

$$\lambda_n^{(ij)} = [\Psi_1(\mathbf{x})\Lambda_1 \dots \Psi_\ell(\mathbf{x})\Lambda_\ell] = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Lambda} \quad , \quad \boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{R}^{1 \times \ell} = \text{const} \quad (2.109)$$

benutzt. Die entsprechenden Variationen lauten

$$\delta g_{(ij)} = \delta \mathbf{q}_i^\top \boldsymbol{\theta}_i^\top - \delta \mathbf{q}_j^\top \boldsymbol{\theta}_j^\top \quad \text{und} \quad \delta \lambda_n^{(ij)} = \delta \boldsymbol{\Lambda}^\top \boldsymbol{\Psi}^\top. \quad (2.110)$$

Hierbei bezeichnen m und n die Anzahl der für die Körper i bzw. j verwendeten Ansatzfunktionen und ℓ ist die zur Diskretisierung des Normalspannungsfeldes gewählte Anzahl von Ansätzen. Werden lokale Ansatzfunktionen gewählt, tragen bei weitem nicht alle Ansatzfunktionen zur Spaltfunktion in einem Kontaktbereich bei: in diesem Fall wird $\boldsymbol{\theta}$ viele Null-Einträge haben. Grundsätzlich ist $m \neq n$ und ℓ kann prinzipiell frei gewählt werden – durch geschickte Wahl der Diskretisierungen beider Körper und des Normalspannungsfeldes lässt sich jedoch der Aufwand mitunter deutlich reduzieren ([2], [97]).

Bei der Diskretisierung der Tangentialkomponente $(\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_t$ der virtuellen Relativverschiebung treten für *holonome Reibung* die Zeilenmatrizen

$$\mathbf{t}_H^{(i)}(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\Phi}_i \cdot \vec{e}_{t,H}^{(ij)}, \quad (2.111)$$

$$\mathbf{t}_H^{(j)}(\mathbf{q}_j) = \boldsymbol{\Phi}_j \cdot \vec{e}_{t,H}^{(ji)} \quad (2.112)$$

und für *nichtholonome Reibung* die Zeilenmatrizen

$$\mathbf{t}_H^{(i)}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_j, \mathbf{v}_T^{(i)}, \mathbf{v}_T^{(j)}) = \boldsymbol{\Phi}_i \cdot \vec{e}_{t,N}^{(ij)}, \quad (2.113)$$

$$\mathbf{t}_H^{(j)}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_j, \mathbf{v}_T^{(i)}, \mathbf{v}_T^{(j)}) = \boldsymbol{\Phi}_j \cdot \vec{e}_{t,N}^{(ji)} \quad (2.114)$$

auf. Die Skalarprodukte gelten dabei zwischen den Elementen der Matrix $\Phi_{i/j}$ der Ansatzfunktionen sowie den Tangentenvektoren.

Mit diesen Diskretisierungsansätzen folgt für die virtuelle Arbeit der Kontaktspannungen im Kontakt i - j

$$\begin{aligned} \delta W_C^{(ij)} = & \int_{\Gamma_{CG}^{(ij)}} \delta \mathbf{q}_i^\top \left(\boldsymbol{\theta}_i^\top \boldsymbol{\Psi} + \mu [\mathbf{t}_{H/N}^{(i)}]^\top \boldsymbol{\Psi} \right) \boldsymbol{\Lambda} \\ & - \delta \mathbf{q}_j^\top \left(\boldsymbol{\theta}_j^\top \boldsymbol{\Psi} + \mu [\mathbf{t}_{H/N}^{(j)}]^\top \boldsymbol{\Psi} \right) \boldsymbol{\Lambda} da \end{aligned} \quad (2.115)$$

sowie die schwache Formulierung der Nichteindringbedingung

$$0 = \int_{\Gamma_{CG}^{(ij)}} \delta \boldsymbol{\Lambda}^\top \boldsymbol{\Psi}^\top (\boldsymbol{\theta}_i \mathbf{q}_i - \boldsymbol{\theta}_j \mathbf{q}_j) da. \quad (2.116)$$

Im Folgenden werden die Abkürzungen

$$\mathbf{N}_{i/j} = \int_{\Gamma_{CG}^{(ij)}} \boldsymbol{\theta}_{i/j}^\top \boldsymbol{\Psi} da \quad , \quad \mathbf{N}_i \in \mathbb{R}^{n \times \ell}, \mathbf{N}_j \in \mathbb{R}^{m \times \ell}, \quad (2.117)$$

$$\mathbf{T}_{i/j} = \int_{\Gamma_{CG}^{(ij)}} \mu [\mathbf{t}_{H/N}^{(i)}]^\top \boldsymbol{\Psi} da \quad , \quad \mathbf{T}_i \in \mathbb{R}^{n \times \ell}, \mathbf{T}_j \in \mathbb{R}^{m \times \ell} \quad (2.118)$$

verwendet. Die Matrizen \mathbf{N} und \mathbf{T} stellen die Verknüpfung zwischen der diskreten Normalkraft und den Normal- bzw. Tangentialspannungen im Kontakt dar. Sie sind dabei im Allgemeinen nicht quadratisch oder gar symmetrisch. Da μ je nach Reibungsmodell von den generalisierten Koordinaten abhängen kann, wird der Koeffizient unter dem Integral gelassen.

Mit den Abkürzungen folgt für das Kontaktpaar $i - j$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_i \\ \dot{\mathbf{q}}_j \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i + \mathbf{G}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_j + \mathbf{G}_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_i \\ \dot{\mathbf{q}}_j \end{pmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i + \mathbf{N}_{D,i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_j + \mathbf{N}_{D,i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i + \mathbf{T}_i \\ -\mathbf{N}_j - \mathbf{T}_j \end{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{0}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i \\ -\mathbf{N}_j \end{bmatrix}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Diese Gleichungen stellen ein differentialalgebraisches Gleichungssystem dar. Es ist dabei zu beachten, dass \mathbf{N} nur für kleine Bewegungen um eine stationäre Lösung eine konstante Matrix ist und \mathbf{T} im Allgemeinen nichtlinear von den Systemkoordinaten abhängt. Im Fall holonomer Reibung gilt $\mathbf{T}^H = \mathbf{T}(\mu, \mathbf{q})$, im Falle räumlicher (nichtholonomer) Reibung $\mathbf{T}^N = \mathbf{T}(\mu, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_j, \mathbf{v}_T^{(i)}, \mathbf{v}_T^{(j)})$.

Mit den Abkürzungen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i + \mathbf{G}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_j + \mathbf{G}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i + \mathbf{N}_{D,i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_j + \mathbf{N}_{D,i} \end{bmatrix}, \quad (2.120)$$

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i \\ -\mathbf{N}_j \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_i \\ -\mathbf{T}_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \end{pmatrix} \quad (2.121)$$

lässt sich (2.119) zu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}\mathbf{q} + (\tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{T}})\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{0}, \quad (2.122)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}^\top \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.123)$$

umschreiben. Nach zweifacher Zeitdifferentiation der Nebenbedingung (2.123) lässt sich (2.122), (2.123) auf die Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & (\tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{T}}) \\ \tilde{\mathbf{N}}^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}\mathbf{q} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

bringen und mit Standardverfahren nach den Unbekannten $\ddot{\mathbf{q}}$ und $\boldsymbol{\Lambda}$ lösen. Da \mathbf{T} im Allgemeinen von den generalisierten Koordinaten \mathbf{q} und $\dot{\mathbf{q}}$ abhängt, stellt (2.124) ein nichtlineares Gleichungssystem dar.

Linearisierung um eine stationäre Lösung mit

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \Delta\dot{\mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}) = \boldsymbol{\Lambda}_0 + \Delta\boldsymbol{\Lambda} \quad (2.125)$$

ergibt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & (\tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{T}}_0) \\ \tilde{\mathbf{N}}^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\ddot{\mathbf{q}} \\ \Delta\boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{P} + \mathbf{H}_1)\Delta\dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{Q} + \mathbf{H}_0)\Delta\mathbf{q} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.126)$$

Die Matrizen $\mathbf{H}_{0/1}$ wurden im Rahmen der Linearisierung der Reibungskräfte eingeführt. Sie sind gemäß

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Lambda}] (\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) &= [\tilde{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Lambda}]_0 + \left. \frac{\partial [\tilde{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Lambda}]}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 \Delta\mathbf{q} + \left. \frac{\partial [\tilde{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Lambda}]}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_0 \Delta\dot{\mathbf{q}} \\ &= [\tilde{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Lambda}]_0 + \left(\underbrace{\left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\Lambda} \right|_0}_{=\mathbf{H}_0} + \tilde{\mathbf{T}} \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 \right) \Delta\mathbf{q} + \left(\underbrace{\left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\Lambda} \right|_0}_{=\mathbf{H}_1} + \tilde{\mathbf{T}} \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_0 \right) \Delta\dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\tilde{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Lambda} \right]_0 + \mathbf{H}_0\Delta\mathbf{q} + \mathbf{H}_1\Delta\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{T}}_0 \left(\tilde{\mathbf{T}} \frac{\partial\boldsymbol{\Lambda}}{\partial\mathbf{q}} \Big|_0 \Delta\mathbf{q} + \tilde{\mathbf{T}} \frac{\partial\boldsymbol{\Lambda}}{\partial\dot{\mathbf{q}}} \Big|_0 \Delta\dot{\mathbf{q}} \right) \\
&= \left[\tilde{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Lambda} \right]_0 + \mathbf{H}_0\Delta\mathbf{q} + \mathbf{H}_1\Delta\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{T}}_0\Delta\boldsymbol{\Lambda} \quad (2.127)
\end{aligned}$$

definiert. Mit der Definition der Matrix $\tilde{\mathbf{T}}$ folgt

$$\mathbf{H}_0 = \int_{\Gamma_{CG}^{(ij)}} \left(\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{q}} [\mathbf{t}_{N/H}^{(i)}]^\top \boldsymbol{\Psi} + \mu \frac{\partial[\mathbf{t}_{N/H}^{(i)}]^\top}{\partial\mathbf{q}} \boldsymbol{\Psi} \right) da, \quad (2.128)$$

$$\mathbf{H}_1 = \int_{\Gamma_{CG}^{(ij)}} \left(\frac{\partial\mu}{\partial\dot{\mathbf{q}}} [\mathbf{t}_{N/H}^{(i)}]^\top \boldsymbol{\Psi} + \mu \frac{\partial[\mathbf{t}_{N/H}^{(i)}]^\top}{\partial\dot{\mathbf{q}}} \boldsymbol{\Psi} \right) da. \quad (2.129)$$

Die Matrizen \mathbf{H}_0 und \mathbf{H}_1 beinhalten also die Abhängigkeit von Betrag und Richtung des Reibspannungsvektors von den generalisierten Koordinaten \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ des Systems. Der Einfluss der Normalspannungsschwankungen $\Delta\boldsymbol{\Lambda}$ auf die Tangentialkräfte wird durch $\tilde{\mathbf{T}}_0$ vermittelt.

Aussagen zur Stabilität des mechanischen Systems anhand der Systemmatrizen sind jedoch von Formulierung (2.126) ausgehend nicht möglich. Für Stabilitätsuntersuchungen ist es daher sinnvoll, die Zwangskräfte $\boldsymbol{\Lambda}$ in den differentialalgebraischen Gleichungen (2.126) zu eliminieren, um schließlich ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ohne algebraische Nebenbedingung zu erhalten. Dieses kann dann auf übliche Weise auf Stabilität untersucht werden.

Durch etwas Rechnung erhält man aus (2.126) die linearisierte Zwangskraft $\Delta\boldsymbol{\Lambda}$ als explizite Funktion der Koordinaten gemäß

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{\Lambda}(\Delta\mathbf{q}, \Delta\dot{\mathbf{q}}) &= - \left(\tilde{\mathbf{N}}^\top \mathbf{M}^{-1} (\tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{T}}_0) \right)^{-1} \left[\tilde{\mathbf{N}}^\top \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{P} + \mathbf{H}_1) \Delta\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{N}}^\top \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{Q} + \mathbf{H}_0) \Delta\mathbf{q} \right] \quad (2.130) \\
&= \mathbf{L}_1 \Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}_0 \Delta\mathbf{q}. \quad (2.131)
\end{aligned}$$

Die Matrizen \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_0 hängen dabei über $\tilde{\mathbf{N}}$ und $\tilde{\mathbf{T}}$ von den Ansatzfunktionen ab, die zur Diskretisierung des Systems gewählt wurden, sowie natürlich vom Linearisierungspunkt.

2.3.2.1.1 Reibungsfreier Kontakt Für den idealen, reibungsfreien Kontakt gilt

$$\mathbf{H}_{0/1} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{0}.$$

Die um die Referenzlösung \mathbf{q}_0 linearisierten Bewegungsgleichungen lauten damit

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + \left[\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{N}} \left(\tilde{\mathbf{N}}^\top \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{N}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{N}}^\top \mathbf{M}^{-1} \right] \mathbf{P}\Delta\dot{\mathbf{q}} & \quad (2.132) \\
+ \left[\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{N}} \left(\tilde{\mathbf{N}}^\top \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{N}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{N}}^\top \mathbf{M}^{-1} \right] \mathbf{Q}\Delta\mathbf{q} &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Über die Symmetrieeigenschaften der entstehenden Matrizen lassen sich jedoch im Allgemeinen kaum Aussagen treffen. Zwar sind \mathbf{M}^{-1} und $\tilde{\mathbf{N}} \left(\tilde{\mathbf{N}}^\top \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{N}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{N}}^\top$ symmetrische Ausdrücke, doch ist das Produkt symmetrischer Matrizen nicht zwingend symmetrisch (vgl. den Satz von Taussky über die Zerlegung beliebiger Matrizen in ein Produkt zweier symmetrischer Matrizen, u.a. in [33]). Liegt keine Dämpfung vor, d.h. ist $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{N}_{D,i} = \mathbf{0}$, und ist $\mathbf{K}^* = \left[\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{N}} \left(\tilde{\mathbf{N}}^\top \mathbf{M}^{-1} \tilde{\mathbf{N}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{N}}^\top \mathbf{M}^{-1} \right] \mathbf{K}$ nicht symmetrisch, so muss jedoch aus physikalischen Gründen eine Transformation existieren, die \mathbf{K}^* symmetrisiert, ohne dabei die Symmetrie von \mathbf{M} zu zerstören. Es liegt dann der Fall vor, dass sich trotz Konservativität des Systems eine Darstellung mit unsymmetrischen Matrizenoperatoren ergibt: dies wird mitunter als pseudokonservatives System bezeichnet. Für eine weitergehende Behandlung und zur Symmetrisierung solcher Systeme siehe [33].

2.3.2.1.2 Holonome Reibung mit konstantem Gleitreibungskoeffizienten Für *holonome Reibung*, deren Richtung an eine Raumkurve gebunden ist, und einen *konstanten Gleitreibungswert* $\mu = \text{const}$ gilt

$$\tilde{\mathbf{T}} = [\mathbf{T}_i^H, -\mathbf{T}_j^H]^\top = \tilde{\mathbf{T}}(\mu, \mathbf{q}).$$

Die Matrix \mathbf{H}_1 verschwindet dann und die Matrizen $\tilde{\mathbf{T}}_0$ sowie \mathbf{H}_0 hängen nur von den Lagekoordinaten \mathbf{q}_0 im Linearisierungspunkt ab, nicht jedoch von den Geschwindigkeiten.

Die geschwindigkeitsproportionalen Terme $\mathbf{P} = \mathbf{D} + \mathbf{G}$ hängen linear von den Führungsgeschwindigkeiten ab, während sie in der Struktursteifigkeit sogar quadratisch auftreten können.

Für holonome Reibung und einen konstanten Gleitreibungskoeffizienten lässt sich somit die Zwangskraft in der Form

$$\Delta \mathbf{\Lambda}^H = \mathbf{L}_1^H(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_T, \mu) \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}_0^H(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_T, \mu) \Delta \mathbf{q} \quad (2.133)$$

ausdrücken.

In die linearisierte Bewegungsgleichung eingesetzt, folgt

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{D} + \mathbf{G} + \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{L}_1^H(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_T, \mu) \right) \Delta \dot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{Q} + \mathbf{H}_0 + \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{L}_0^H(\mathbf{q}_0, \mathbf{v}_T, \mu) \right) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (2.134)$$

wobei über die Symmetrieeigenschaften der Reibungsbeiträge $\tilde{\mathbf{N}} \mathbf{L}_{0/1}^H$ keine weiteren Aussagen getroffen werden können. Vielmehr werden die Eigenschaften dieser Matrizen von den gewählten Ansatzfunktionen in Φ , θ und Ψ abhängen.

2.3.2.1.3 Allgemeine Reibung Für *nichtholonome Reibung*, deren Richtung sich lediglich aus der Relativgeschwindigkeit der Kontaktpartner ableiten lässt, oder einen *ge-*

geschwindigkeitsabhängigen Gleitreibungskoeffizienten $\mu = \mu(v_{rel})$ gilt

$$\tilde{\mathbf{T}} = [\mathbf{T}_i^N, -\mathbf{T}_j^N]^\top = \tilde{\mathbf{T}}(\mu, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}_T).$$

Die aus der Linearisierung der Reibkraft entstehenden Matrizen $\mathbf{H}_{0/1}$ sowie $\tilde{\mathbf{T}}_0$ hängen dann sowohl von den Lagen \mathbf{q} wie auch von den Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ im Linearisierungspunkt ab. Liegt nichtholonome Reibung oder ein geschwindigkeitsabhängiger Gleitreibungskoeffizient vor, so lässt sich die Zwangskraft in der Form

$$\Delta \mathbf{\Lambda}^N = \mathbf{L}_1^N(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{v}_T, \mu) \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{L}_0^N(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{v}_T, \mu) \Delta \mathbf{q} \quad (2.135)$$

ausdrücken. Insbesondere wird $\mathbf{L}_1^N \neq \mathbf{L}_1^H$ sein, da hier \mathbf{H}_1 nicht verschwindet.

In die linearisierte Bewegungsgleichung eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{D} + \mathbf{G} + \mathbf{H}_1 + \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{L}_1^N(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{v}_T, \mu) \right) \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ + \left(\mathbf{Q} + \mathbf{H}_0 + \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{L}_0^N(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{v}_T, \mu) \right) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.136)$$

wobei über die Symmetrieeigenschaften der Reibungsbeiträge $\tilde{\mathbf{N}} \mathbf{L}_{0/1}^N$ wiederum keine weiteren Aussagen getroffen werden können.

Die um eine Grundlösung linearisierten Systemgleichungen für nichtholonome Reibung oder $\mu = \mu(v_{rel})$ und die Formulierung des Normalkontaktes mittels Lagrangescher Multiplikatoren lauten somit

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}_{LM}^N(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{v}_T, \mu) \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_{LM}^N(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{v}_T, \mu) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.137)$$

2.3.2.2 Penalty-Verfahren

Ein grundsätzliches Charakteristikum vom Kontaktproblemen besteht in der kinematischen Nebenbedingung, dass die beteiligten Körper einander nicht durchdringen dürfen. Die zur Einhaltung dieser Forderung notwendigen Zwangsgrößen hängen dabei von der vollständigen Lösung der Bewegungsgleichungen ab und lassen sich nicht als explizite Funktion der Zustandsvariablen ausdrücken.

Die Grundidee von Penalty-Verfahren besteht darin, den nichtglatten Charakter "harter" Nebenbedingungen durch eine sogenannte Regularisierung abzuschwächen. Die algebraischen Nebenbedingungen werden hierzu durch einen direkt von den Zustandsvariablen abhängigen Term ersetzt, der die Zwangskräfte approximieren soll.

Ist die Systemdynamik durch die Bewegungsgleichung (2.80) gegeben, so lässt sich der Normalkontakt durch Hinzufügen der Potentialfunktion

$$\Pi_C^P = \sum_{(ij)} \int_{\Gamma_C^{(ij)}} c_R^{(ij)} g_{ij}^2 \, da \quad \rightarrow \quad \delta \Pi_C^P = \sum_{(ij)} \int_{\Gamma_C^{(ij)}} c_R^{(ij)} g_{ij} \, \delta g_{ij} \, da \quad (2.138)$$

berücksichtigen. Der Koeffizient $c_R^{(ij)}$ ist hierbei der sogenannte Regularisierungsparameter. Es soll noch erwähnt werden, dass auch nichtlineare Potentialfunktionen üblich sind, an den grundsätzlichen Ergebnissen ändert dies jedoch nichts.

Anders als bei (2.104) entsteht bei der Variation dieses Potentials keine simultan zu erfüllende algebraische Gleichung. Es ergibt sich daher keine differentialalgebraische Gleichung, sondern lediglich eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Die augenfällige Analogie von (2.138) zu Federpotentialen ist motiviert durch die häufig angebrachte physikalische Interpretation dieser Regularisierung als Repräsentation der Steifigkeit der mikroskopischen Kontaktschicht. Deutet man (2.138) als elastisches Potential des Kontaktes, so ist es naheliegend, die Kontaktnormalspannung als

$$\sigma_n^{(ij)} = c_R^{(ij)} g_{ij} \quad (2.139)$$

anzusetzen. Die virtuelle Arbeit der Kontaktkräfte im Kontakt $i - j$ ist dann

$$\delta W_C = c_R^{(ij)} \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \left(\delta g_{ij} g_{ij} + \mu (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_t^{(ij)} g_{ij} \right) da. \quad (2.140)$$

Mit g_{ij} und $(\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) \cdot \vec{e}_t^{(ij)}$ aus (2.110) und (2.99),(2.100) lautet die Diskretisierung der virtuellen Arbeit für einen Kontakt zwischen den Körpern i und j

$$\delta W_C^{(ij)} = c_R^{(ij)} \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \left(\delta \mathbf{q}_i^\top \left(\boldsymbol{\theta}_i^\top \boldsymbol{\theta}_i \mathbf{q}_i - \boldsymbol{\theta}_i^\top \boldsymbol{\theta}_j \mathbf{q}_j + \mu \boldsymbol{\Phi}_i^\top \cdot \vec{e}_t^{(ij)} (\boldsymbol{\theta}_i \mathbf{q}_i - \boldsymbol{\theta}_j \mathbf{q}_j) \right) \right) \quad (2.141)$$

$$+ \delta \mathbf{q}_j^\top \left(-\boldsymbol{\theta}_j^\top \boldsymbol{\theta}_i \mathbf{q}_i + \boldsymbol{\theta}_j^\top \boldsymbol{\theta}_j \mathbf{q}_j - \mu \boldsymbol{\Phi}_j^\top \cdot \vec{e}_t^{(ij)} (\boldsymbol{\theta}_i \mathbf{q}_i - \boldsymbol{\theta}_j \mathbf{q}_j) \right) da. \quad (2.142)$$

Im Folgenden werden die Abkürzungen

$$\boldsymbol{\Theta}_{k\ell} = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \boldsymbol{\theta}_k^\top \boldsymbol{\theta}_\ell da \quad k, \ell = i, j \quad \text{mit } \boldsymbol{\Theta}_{k\ell} = \boldsymbol{\Theta}_{\ell k}^\top \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Theta}_{k\ell} = \text{const} \quad (2.143)$$

und

$$\mathbf{T}_{k\ell}^{H/N} = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \mu [\mathbf{t}_k^{H/N}]^\top \boldsymbol{\theta}_\ell da \quad \text{mit } \mathbf{T}_{k\ell}^{H/N} \neq \mathbf{T}_{\ell k}^{H/N} \quad (2.144)$$

verwendet. Die Zeilenmatrix $\mathbf{t}_k^{H/N} = \boldsymbol{\Phi}_k \cdot \vec{e}_{t,H/N}^{(ij)}$ mit den Projektionen der Richtung der Gleitreibungsspannung auf die Ansatzfunktionen in $\boldsymbol{\Phi}_k$ hängt dabei von der Art der Reibung ab. Es lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

- Für *holonome Reibung* kann die Richtung der Gleitreibung vollständig mittels der Lagekoordinaten ausgedrückt werden. Daraus folgt $\mathbf{t}_k^H = \mathbf{t}_k^H(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$ und schließlich $\mathbf{T}_{k\ell}^H = \mathbf{T}_{k\ell}^H(\mu, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$.

- Für *nichtholonome Reibung* ist die Richtung der Gleitreibung nur über die Relativgeschwindigkeiten im Kontakt zu ermitteln. Daher gilt allgemein $\mathbf{t}_k^N = \mathbf{t}_k^N(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_j, \mathbf{v}_T^{(i)}, \mathbf{v}_T^{(j)})$ und somit $\mathbf{T}_{kl}^N = \mathbf{T}_{kl}^N(\mu, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_j, \mathbf{v}_T^{(i)}, \mathbf{v}_T^{(j)})$.

In beiden Fällen kann μ ebenfalls eine Funktion der Systemkoordinaten und insbesondere der generalisierten Geschwindigkeiten sein.

Nun lässt sich die virtuelle Arbeit der Kontaktkräfte kompakt als

$$\delta W_C^{(ij)} = c_R^{(ij)} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{q}_i \\ \delta \mathbf{q}_j \end{pmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Theta_{ii} + \mathbf{T}_{ii}^{H/N} & -\Theta_{ij} - \mathbf{T}_{ij}^{H/N} \\ -\Theta_{ji} - \mathbf{T}_{ji}^{H/N} & \Theta_{jj} + \mathbf{T}_{jj}^{H/N} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_j \end{pmatrix} \quad (2.145)$$

$$= c_R^{(ij)} \delta \mathbf{q}^\top [\tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{T}}] \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^\top \mathbf{F}_C^P \quad (2.146)$$

mit $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_i^\top, \mathbf{q}_j^\top)^\top$ und

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \Theta_{ii} & -\Theta_{ij} \\ -\Theta_{ji} & \Theta_{jj} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}^\top, \quad \tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{ii}^{H/N} & -\mathbf{T}_{ij}^{H/N} \\ -\mathbf{T}_{ji}^{H/N} & \mathbf{T}_{jj}^{H/N} \end{bmatrix} \neq \tilde{\mathbf{T}}^\top \quad (2.147)$$

schreiben. Dabei ist $\tilde{\mathbf{N}} = \text{const}$ und $\tilde{\mathbf{T}}$ je nach Art der Reibung von den Systemkoordinaten abhängig.

Linearisierung der Kontaktkraft um eine Referenzlösung mit $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}$ ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_C(\mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}) &\approx c_R^{(ij)} \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}) + c_R^{(ij)} \tilde{\mathbf{T}}_0 \mathbf{q}_0 + c_R^{(ij)} \left. \frac{\partial(\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_0 \Delta \mathbf{q} + c_R^{(ij)} \left. \frac{\partial(\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_0 \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{F}_{C,0} + c_R^{(ij)} \tilde{\mathbf{N}} \Delta \mathbf{q} + c_R^{(ij)} \left(\underbrace{\left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{q} \right|_0}_{=\mathbf{H}_0^*} + \tilde{\mathbf{T}}_0 \right) \Delta \mathbf{q} + c_R^{(ij)} \underbrace{\left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathbf{q} \right|_0}_{=\mathbf{H}_1^*} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ &= \mathbf{F}_{C,0} + c_R^{(ij)} \mathbf{H}_0^* \Delta \mathbf{q} + c_R^{(ij)} \mathbf{H}_1^* \Delta \dot{\mathbf{q}} + c_R^{(ij)} (\tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{T}}_0) \Delta \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Die Ähnlichkeit dieses Ergebnisses mit der mittels Lagrange-Multiplikatoren gewonnenen generalisierten Kontaktkraft wird klar, wenn man die Kontaktkraft Λ mit $c_R^{(ij)} \mathbf{q}$ und $\Delta \Lambda$ mit $c_R^{(ij)} \Delta \mathbf{q}$ identifiziert. Umschreiben liefert

$$\mathbf{F}_C(\mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}) \approx \underbrace{\mathbf{F}_{C,0} + \underbrace{\left. \frac{\partial(\tilde{\mathbf{T}})}{\partial \mathbf{q}} c_R^{(ij)} \mathbf{q} \right|_0}_{\hat{\approx} \Lambda_0}}_{\hat{\approx} \mathbf{H}_0} \Delta \mathbf{q} + \underbrace{\left. \frac{\partial(\tilde{\mathbf{T}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} c_R^{(ij)} \mathbf{q} \right|_0}_{\hat{\approx} \Lambda_0}}_{\hat{\approx} \mathbf{H}_1} \Delta \dot{\mathbf{q}} + (\tilde{\mathbf{N}} + \tilde{\mathbf{T}}_0) \underbrace{c_R^{(ij)} \Delta \mathbf{q}}_{\triangleq \Delta \Lambda}, \quad (2.149)$$

woran die Ähnlichkeit mit Gleichung (2.127) leicht zu erkennen ist.

Die Differentialgleichung für die Störungen $\Delta \mathbf{q}$ lautet mit den Matrizen aus (2.148) allgemein

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{D} + \mathbf{G} + c_R^{(ij)}\mathbf{H}_1^*\right)\Delta\dot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{Q} + c_R^{(ij)}\left(\tilde{\mathbf{N}} + \mathbf{H}_0^*\right)\right)\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.150)$$

Die Matrizen $\mathbf{H}_{0/1}^*$ drücken die Abhängigkeit der Tangentialspannungen im Kontakt von den generalisierten Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten aus, während $\tilde{\mathbf{N}}$ die Abhängigkeit der Normalspannungskomponenten vermittelt.

Die hier gewählte Regularisierung des Normalkontaktes ist ausschließlich auf Lageebene ("Kontaktsteifigkeit") formuliert. Hierdurch erklärt sich, dass hier – anders als bei der Formulierung mit Lagrangeschen Multiplikatoren – der Normalkontakt lediglich Einträge in der Steifigkeitsmatrix zur Folge hat und keine geschwindigkeitsproportionalen Terme auftreten.

2.3.2.2.1 Reibungsfreier Kontakt Liegt ein reibungsfreier Kontakt vor, so verschwindet die Matrix $\tilde{\mathbf{T}}$ sowie ihre Ableitungen $\mathbf{H}_{0/1}$. Die linearisierte Bewegungsgleichung lautet dann

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\Delta\dot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{Q} + c_R^{(ij)}\tilde{\mathbf{N}}\right)\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.151)$$

Anders als bei der Formulierung mit Lagrange-Multiplikatoren lässt sich bei der hier gewählten Beschreibung feststellen, dass $\tilde{\mathbf{N}}$ sicher symmetrisch ist. Somit werden durch das Hinzufügen eines Normalkontaktes mittels der Penalty-Methode die Symmetrieeigenschaften des Systems nicht verändert.

2.3.2.2.2 Holonome Reibung mit konstantem Gleitreibungskoeffizienten Für den Sonderfall *holonomer Reibung* in Verbindung mit einem *konstanten Gleitreibungskoeffizienten* $\mu = \text{const}$ ist $\mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$ und der Einfluss der Reibung auf die geschwindigkeitsproportionalen Terme verschwindet:

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\Delta\dot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{Q} + c_R^{(ij)}\left(\tilde{\mathbf{N}} + \mathbf{H}_0\right)\right)\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.152)$$

Auffällig ist auch hier, dass alle aus dem Kontakt herrührenden Beiträge gleichermaßen durch den Regularisierungsparameter $c_R^{(ij)}$ beeinflusst werden.

2.3.2.2.3 Allgemeine Reibung Ist die Richtung der Gleitreibungsspannung nicht als eine nur von den verallgemeinerten Lagekoordinaten \mathbf{q} abhängige Funktion darstellbar oder der Gleitreibungswert eine Funktion der Relativgeschwindigkeit, verschwinden die Matrizen

\mathbf{T} und $\mathbf{H}_{0/1}$ im Allgemeinen nicht. In diesem Fall lautet die um die Referenzlösung \mathbf{q}_0 linearisierte Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{D} + \mathbf{G} + c_R^{(ij)}\mathbf{H}_1^*\right)\Delta\dot{\mathbf{q}} + \left(\mathbf{Q} + c_R^{(ij)}\left(\tilde{\mathbf{N}} + \mathbf{H}_0^*\right)\right)\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.153)$$

2.3.2.2.4 Anmerkungen zum Penalty-Verfahren Insgesamt tritt die für Penalty-Formulierungen typische Eigenschaft zutage, dass die Systemgleichungen direkt vom Regularisierungsparameter (hier $c_R^{(ij)}$) abhängen. Es ist daher zu erwarten, dass die Lösungen des Systems ebenfalls von diesem Parameter beeinflusst werden.

Sind keine physikalisch untermauerten Werte im Sinne einer Kontaktsteifigkeit für diesen Parameter verfügbar, so ist zumindest eine Konvergenzuntersuchung der Lösung in Abhängigkeit von $c_R^{(ij)}$ durchzuführen. Es lässt sich zeigen, dass für $c_R^{(ij)} \rightarrow \infty$ die mittels des Penalty-Verfahrens generierte Lösung gegen die mit Lagrange-Multiplikatoren gewonnene konvergiert (siehe [97]). Leider ist dies kein geeigneter Weg für praktische Berechnungen, da mit steigendem Regularisierungsparameter das Problem numerisch meist schlecht konditioniert ist. Zudem gilt diese Konvergenzaussage zunächst nur für den Normalkontakt, sodass der Einfluss der Regularisierungsparameters auf die Reibkräfte noch einer näheren Untersuchung bedarf.

2.3.2.3 Spezielle Ansatzfunktionen

Mit der Kontaktspannung $\vec{s}_i = \sigma_n^{(ij)}\vec{e}_n^{(ij)} + \tau^{(ij)}\vec{e}_t^{(ij)}$ am Körper i lautet die virtuelle Arbeit des Kontaktes $\Gamma_C^{(ij)}$

$$\begin{aligned} \delta W_C^{(ij)} &= \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \left(\sigma_n^{(ij)} (\delta\vec{r}_i - \delta\vec{r}_j) \cdot \vec{e}_n^{(ij)} + \tau^{(ij)} (\delta\vec{r}_i - \delta\vec{r}_j) \cdot \vec{e}_t^{(ij)} \right) da \\ &= \delta W_{C,n}^{(ij)} + \delta W_{C,t}^{(ij)}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

In einfachen Fällen wird es möglich sein, die Ansatzfunktionen so zu wählen, dass das Verbot des gegenseitigen Ineinandereindringens schon durch den Ansatz erfüllt ist. Dafür muss die Bedingung

$$\delta\vec{r}_i \cdot \vec{e}_n^{(ij)} \stackrel{!}{=} \delta\vec{r}_j \cdot \vec{e}_n^{(ij)} \quad \rightsquigarrow \delta\vec{r}_i \cdot \vec{e}_n^{(ij)} - \delta\vec{r}_j \cdot \vec{e}_n^{(ij)} = 0 \quad (2.155)$$

gelten. Die tangentialen Bewegungen dürfen dabei jedoch nicht eingeschränkt sein, d.h.

$$\delta\vec{r}_i \cdot \vec{e}_t^{(ij)} \quad , \quad \delta\vec{r}_j \cdot \vec{e}_t^{(ij)} \quad \text{unabhängig} \quad \rightsquigarrow \quad \text{i.a.} \quad \delta\vec{r}_i \cdot \vec{e}_n^{(ij)} - \delta\vec{r}_j \cdot \vec{e}_n^{(ij)} \neq 0. \quad (2.156)$$

Offenbar verschwindet die virtuelle Arbeit $\delta W_{C,n}^{(ij)}$ dann identisch und es verbleiben nur noch die Anteile der tangentialen Spannungen. Da bereits durch die Wahl der Ansatzfunktionen

die kinematische Nebenbedingungen für den Normalkontakt erfüllt ist, stellt diese Form eine Formulierung in Minimalform dar.

Sind geeignete Ansatzfunktionen jeweils in den Zeilenmatrizen $\tilde{\Phi}$ zusammengefasst, so lautet die gesamte virtuelle Arbeit im Kontakt

$$\delta W_C^{(ij)} = \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \tau^{(ij)} \left(\delta \mathbf{q}_i^\top \tilde{\Phi}_i^\top - \delta \mathbf{q}_j^\top \tilde{\Phi}_j^\top \right) \cdot \vec{e}_t^{(ij)} da = \delta W_{C,t}^{(ij)}. \quad (2.157)$$

Der Betrag $\tau^{(ij)}$ der Reibspannung in einem Kontaktpunkt ist wiederum durch ein Reibungsmodell beschrieben. Nach Coulomb folgt

$$\tau^{(ij)} = \mu |\sigma_n^{(ij)}| \quad (2.158)$$

mit der Gleitreibungszahl μ , die im Folgenden als konstant, d.h.

$$\mu = \text{const}, \quad (2.159)$$

oder als Funktion des Betrages der Relativgeschwindigkeit im Kontakt ($\mu = \mu(\vec{v}_{rel})$) betrachtet wird. Da die Relativgeschwindigkeit von der Lage und den Geschwindigkeitskoordinaten der Körper sowie den Führungsgeschwindigkeiten abhängt, gilt in diesem Fall

$$\mu = \mu(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_j, \mathbf{v}_T^{(i)}, \mathbf{v}_T^{(j)}). \quad (2.160)$$

In beiden Fällen hängt die Reibspannung von der Normalspannung σ_n im Kontakt ab. Diese lässt sich jedoch nicht mehr aus den Lagrange-Multiplikatoren oder aus der Penalty-Formulierung ("Steifigkeit") des Kontaktes bestimmen. Sie ist aber mit Hilfe der Spannungstensoren der Körper bestimmbar. Ist $\vec{\sigma}_i$ der Cauchy-Spannungstensor des i -ten Körpers, $\hat{\mathbf{x}}$ die räumliche Koordinate eines Oberflächenpunktes und $\vec{e}_n^{(ij)}$ die Oberflächennormale in diesem Punkt, so ist die Kontaktnormalspannung als

$$\sigma_n^{(ij)} = \left(\vec{\sigma}_i(\hat{\mathbf{x}}) \vec{e}_n \right) \cdot \vec{e}_n \quad (2.161)$$

gegeben. Der Spannungstensor $\vec{\sigma}_i$ ist durch ein Materialgesetz mit dem Verzerrungstensor $\vec{\varepsilon}_i$ verknüpft. Nach Zerlegung in einem Koordinatensystem und Einführung der Voigtschen Notation [2]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{12})^\top \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{13} \ \sigma_{12})^\top \quad (2.162)$$

für den Spannungs- und Verzerrungstensor gilt mit $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{q}$ für *elastisches Material*

$$\boldsymbol{\sigma}^E = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{q} \quad (2.163)$$

und für *viskoelastische Materialien*

$$\boldsymbol{\sigma}^V = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}. \quad (2.164)$$

Ist $\mathbf{e}_n = [n_1 \ n_2 \ n_3]^\top$ die Zerlegung der Körpnormalen \vec{e}_n im betrachteten Oberflächenpunkt $\hat{\mathbf{x}}$, lässt sich damit die Spaltenmatrix $\mathbf{n} = [n_1^2 \ n_2^2 \ n_3^2 \ 2n_2n_3 \ n_1n_2 + n_1n_3 \ n_1n_3 + n_1n_2]^\top$ aufbauen, mit deren Einträgen das Skalarprodukt des Spannungsvektors auf den Normalvektor in Voigtscher Notation als $\mathbf{n}^\top \boldsymbol{\sigma}$ geschrieben werden kann. Es folgt damit für elastische Materialien

$$\sigma_n^{(ij)} = \mathbf{n}^\top \boldsymbol{\sigma}^E = \mathbf{n}^\top \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{q} \quad (2.165)$$

und für für viskoelastische Materialien

$$\sigma_n^{(ij)} = \mathbf{n}^\top \boldsymbol{\sigma}^V = \mathbf{n}^\top [\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}]. \quad (2.166)$$

Fasst man die Projektionen der diskretisierten Gleitreibungsrichtung \vec{e}_t auf die Ansatzfunktionen wieder in den Zeilenmatrizen $\mathbf{t}_{i/j} = \boldsymbol{\Phi}_{i/j} \cdot \vec{e}_t$ zusammen, so lassen sich auch hier folgende Fälle unterscheiden:

- für *holonome Reibung* lässt sich die Richtung der Gleitreibung in Abhängigkeit der Lagekoordinaten $\mathbf{q}_{i/j}$ als $\mathbf{t}_{i/j}^H = \mathbf{t}_{i/j}^H(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$ ausdrücken, während bei
- *nichtholonome Reibung* diese Richtung nur über die Relativgeschwindigkeiten im Kontakt zu ermitteln ist. Es gilt dann $\mathbf{t}_{i/j}^N = \mathbf{t}_{i/j}^N(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_j, \mathbf{v}_T^{(i)}, \mathbf{v}_T^{(j)})$.

In die virtuelle Arbeit eingesetzt ergibt das mit den Abkürzungen $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_i^\top, \mathbf{q}_j^\top]^\top$ und $\tilde{\mathbf{t}} = [\mathbf{t}_i^\top, -\mathbf{t}_j^\top]^\top$ für elastische Materialien

$$\delta W_{C,t}^E = \delta \mathbf{q}^\top \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \mu [\tilde{\mathbf{t}}^{H/N}]^\top \mathbf{n}^\top \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{q} \, da = \delta \mathbf{q}^\top \mathbf{T}_C^{H/N} \mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^\top \mathbf{F}_{E,R}^{H/N} \quad (2.167)$$

und für viskoelastische Materialien

$$\begin{aligned} \delta W_{C,t}^V &= \delta \mathbf{q}^\top \int_{\Gamma_C^{(ij)}} \mu [\tilde{\mathbf{t}}^{H/N}]^\top \mathbf{n}^\top [\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}] \, da = \delta \mathbf{q}^\top \mathbf{T}_C^{H/N} \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}^\top \mathbf{T}_D^{H/N} \dot{\mathbf{q}} \\ &= \delta \mathbf{q}^\top \mathbf{F}_{V,R}^{H/N}. \end{aligned} \quad (2.168)$$

Die hierdurch definierten verallgemeinerten Kontaktkräfte lassen sich um eine Referenzlösung \mathbf{q}_0 mit $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}$ linearisieren. Für allgemeines \mathbf{T} und allgemeines (viskoelastisches)

Materialverhalten gilt für die Linearisierung

$$\mathbf{F}_R(\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}) \approx [\mathbf{T}_C\mathbf{q}]_0 + \left. \frac{\partial}{\partial\mathbf{q}} (\mathbf{T}_C\mathbf{q} + \mathbf{T}_D\dot{\mathbf{q}}) \right|_0 \Delta\mathbf{q} + \left. \frac{\partial}{\partial\dot{\mathbf{q}}} (\mathbf{T}_C\mathbf{q} + \mathbf{T}_D\dot{\mathbf{q}}) \right|_0 \Delta\dot{\mathbf{q}} \quad (2.169)$$

$$\begin{aligned} &= [\mathbf{T}_C\mathbf{q}]_0 + \left(\left. \frac{\partial\mathbf{T}_C}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{q} + \mathbf{T}_C + \frac{\partial\mathbf{T}_D}{\partial\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} \right) \right|_0 \Delta\mathbf{q} \\ &\quad + \left(\left. \frac{\partial\mathbf{T}_C}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\mathbf{q} + \frac{\partial\mathbf{T}_D}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{T}_D \right) \right|_0 \Delta\dot{\mathbf{q}} \quad (2.170) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [\mathbf{T}_C\mathbf{q}]_0 + (\mathbf{H}_{C,0} + \mathbf{T}_{C,0} + \mathbf{H}_{D,0}) \Delta\mathbf{q} \\ &\quad + (\mathbf{H}_{C,1} + \mathbf{H}_{D,1} + \mathbf{T}_{D,0}) \Delta\dot{\mathbf{q}} \quad (2.171) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{F}_{R,0} + (\mathbf{H}_0 + \mathbf{T}_{C,0}) \Delta\mathbf{q} + (\mathbf{H}_1 + \mathbf{T}_{D,1}) \Delta\dot{\mathbf{q}}. \quad (2.172)$$

Der Beitrag $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{C,0} + \mathbf{H}_{D,0}$ zur lageproportionalen Matrix berücksichtigt dabei die Lageabhängigkeit der Richtung der tangentialen Oberflächenkräfte, während $\mathbf{T}_{C,0}$ den Einfluss der Lageänderungen auf die Normalkraft und somit auf die Reibungskraft vermittelt. Analog drücken die Matrizen $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{C,1} + \mathbf{H}_{D,1}$ und $\mathbf{T}_{D,1}$ den Einfluss der generalisierten Geschwindigkeiten auf räumliche Orientierung und Betrag der Reibkräfte im Kontakt aus.

2.3.2.3.1 Reibungsfreier Kontakt Da die Ansatzfunktionen à priori die Nichteindringbedingung erfüllen, ist der Fall des reibungsfreien Kontaktes bereits durch die diskretisierten Ausgangsgleichungen stets erfüllt. Die linearisierten Differentialgleichungen lauten in diesem Fall schlicht

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G}) \Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.173)$$

Offensichtlich ist es durch die Wahl spezieller Ansatzfunktionen möglich, auch für Probleme mit kinematischen Nebenbedingungen Bewegungsgleichungen in Standardform zu generieren. Dieses Vorgehen stellt somit die kontinuierliche Analogie zur Berücksichtigung kinematischer Nebenbedingungen bei der Wahl generalisierter Koordinaten dar.

2.3.2.3.2 Holonome Reibung mit konstantem Gleitreibungskoeffizient Kann die Richtung der Gleitreibungsspannung als Funktion der generalisierten Koordinaten \mathbf{q} ausgedrückt werden, so gilt $\mathbf{T}_C = \mathbf{T}_C^H(\mu, \mathbf{q})$ und $\mathbf{T}_D = \mathbf{T}_D^H(\mu, \mathbf{q})$.

Lässt sich die Kontaktnormalspannung aus einem *elastischen Materialgesetz* ermitteln, dann ist $\mathbf{T}_D = \mathbf{0}$ sowie $\mathbf{T}_C^H = \mathbf{T}_C^H(\mu, \mathbf{q})$ und damit $\mathbf{H}_{C,1} = \mathbf{0}$. Beinhaltet das System keine Körper mit viskoelastischem Verhalten, verschwindet zudem die Matrix der inneren Dämpfung und es gilt $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Die linearisierten Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G}) \Delta\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{Q} + \mathbf{H}_0 + \mathbf{T}_{C,0}) \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.174)$$

Sobald einer der Körper innere Dämpfung aufweist, trifft dies nicht mehr zu und es wird $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$. Tritt dieser Körper mit einem elastischen Körper in Kontakt, so kann jedoch aufgrund des Schnittprinzips stets das elastische Materialgesetz des rein elastischen Körpers zur Berechnung der Kontaktspannungen herangezogen werden. Die linearisierten Bewegungsgleichungen lauten in diesem Fall

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G}) \Delta\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{Q} + \mathbf{H}_0 + \mathbf{T}_{C,0}) \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.175)$$

Ist das Materialverhalten beider Kontaktpartner durch *viskoelastische Materialgesetze* gegeben, so ist $\mathbf{T}_D \neq \mathbf{0}$. Für holonome Reibung gilt jedoch $\mathbf{T}_D = \mathbf{T}_D(\mathbf{q})$ und somit $\mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$. Die linearisierten Bewegungsgleichungen sind dann

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G} + \mathbf{T}_{D,0}) \Delta\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{Q} + \mathbf{H}_0 + \mathbf{T}_{C,0}) \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.176)$$

2.3.2.3.3 Allgemeine Reibung Im allgemeinen Fall lässt sich die Richtung der Gleitreibungskraft nur über die Relativgeschwindigkeit im Kontakt ermitteln. Zudem ist der Gleitreibungskoeffizient in vielen Anwendungsfällen vom Betrag der Relativgeschwindigkeit abhängig. In diesem Fall gilt also $\mathbf{T}_C = \mathbf{T}_C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ bzw. $\mathbf{T}_C = \mathbf{T}_C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Lässt sich die Kontaktnormalspannung über ein *rein elastisches Materialgesetz* ausdrücken, so gilt $\mathbf{T}_D = \mathbf{0}$ und somit $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{C,0}$ sowie $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{C,1}$. Damit lauten die linearisierten Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G} + \mathbf{H}_{C,1}) \Delta\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{Q} + \mathbf{H}_{C,0} + \mathbf{T}_{C,0}) \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.177)$$

Die Matrix $\mathbf{H}_{C,0}$ beinhaltet dabei die Abhängigkeit der Reibkrafttrichtung von den generalisierten Lagekoordinaten \mathbf{q} , während $\mathbf{H}_{C,1}$ den Einfluss der generalisierten Geschwindigkeiten ausdrückt.

Im allgemeinen Fall ist sowohl die Reibung (nach Richtung und Betrag) als auch die Kontaktnormalspannung von den generalisierten Koordinaten abhängig. Es gilt dann $\mathbf{T}_D \neq \mathbf{0}$ und somit $\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_{C,0} + \mathbf{H}_{D,0}$ und $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{C,1} + \mathbf{H}_{D,1}$. Damit lautet die um die Referenzlösung \mathbf{q}_0 linearisierte Differentialgleichung in ihrer allgemeinsten Form

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G} + \mathbf{H}_1 + \mathbf{T}_{D,0}) \Delta\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{Q} + \mathbf{H}_0 + \mathbf{T}_{C,0}) \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.178)$$

Kapitel 3

Zur Stabilität stationärer Lösungen

In reibungsbehafteten Systemen treten häufig Schwingungen ohne äußere Anregung oder sonstige Einflussnahme auf. Man spricht hierbei von *selbsterregten Schwingungen*, da ihr Auftreten und ihre Erscheinungsweise vollständig vom System bestimmt sind und nicht von außen aufgeprägt oder gesteuert werden (siehe beispielsweise [53]). Sie stellen damit in gewisser Weise den Gegensatz zu zwangserregten Schwingungen dar.

Eine in der technischen Anwendung typische Situation ist ein stationär betriebenes System, in dem aus einem stationären Betriebspunkt heraus Schwingungen entstehen. Dies lässt sich als kinetische Instabilität der betrachteten stationären Lösung interpretieren. Um die Mechanismen hinter reibungserregten Schwingungen zu verstehen, ist es also notwendig, eine Stabilitätsuntersuchung des Systemzustandes durchzuführen, aus dem heraus die Schwingungen entstehen.

Ausgehend von den bisher gewonnenen Erkenntnissen hinsichtlich Form und Struktur der beschreibenden Systemgleichungen wird im Folgenden untersucht, welche Arten von Instabilitäten auftreten können.

Da dies im Hinblick auf reibungserregte Schwingungen geschehen soll, werden die zirkulatorischen Beiträge $\mathbf{N}_{D,i}$ aus der inneren Dämpfung im Folgenden vernachlässigt.

3.1 Grundsätzliches zur Stabilität

Als Bestandteil der alltäglichen Sprache scheint der Begriff der "Stabilität" eine klar definierte Bedeutung zu haben – doch erkennt man schnell, wie schwierig es ist, diesem Begriff eine konkrete physikalisch-mathematische Bedeutung zu geben. Insbesondere zeigt sich, dass der Begriff der Stabilität stark vom betrachteten Objekt bzw. den interessierenden Eigenschaften abhängt.

Moderne, physikalisch-mathematische Stabilitätsbegriffe basieren im Wesentlichen auf folgenden Überlegungen: Gegenstand der Betrachtungen sind eine Grundbewegung (Referenzbe-

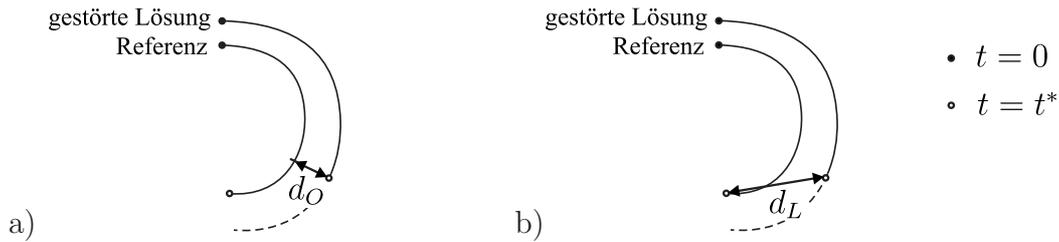


Abbildung 3.1: Zur Stabilitätsdefinition: a) orbitale Stabilität. b) Ljapunow-Stabilität.

wegung), deren Stabilität untersucht werden soll, sowie eine benachbarte Bewegung, die man als Reaktion des Systems auf eine anfängliche Störung interpretieren kann. Da bislang nicht näher definiert wurde, welche Art von System betrachtet wird, ist die Interpretation des Begriffs "Bewegung" im Sinne einer zeitlichen Abfolge von eindeutig beschreibbaren Zuständen zunächst hinreichend genau.

Um die Entfernung zweier Zustände während der Bewegung zu messen, werden nun geeignete skalare Abstandsmaße eingeführt. Das Verhalten dieses Abstandes entscheidet dann über die Stabilität des untersuchten Referenzzustandes: bewirkt eine begrenzte anfängliche Störung ebenfalls nur begrenzte Abstände zwischen gestörtem Zustand und Referenz, so bezeichnet man die zugrundegelegte Referenzbewegung des betrachteten Systems als *stabil*, andernfalls wird sie als *instabil* bezeichnet.

Obwohl der Begriff "Zeit" bisher nicht verwendet wurde, lässt der Verweis auf das "Verhalten des Abstandes" bereits erahnen, dass Stabilität grundsätzlich ein kinetisches Problem darstellt. Letztlich wird die Bewegung eines Zustandes um eine interessierende Referenzbewegung beobachtet und bewertet. Neben dieser allgemeinen kinetischen Stabilitätsformulierung gibt es auch eine Reihe statischer Formulierungen (beispielsweise der Satz von Lagrange-Dirichlet), die oft gute Dienste leisten, jedoch in manchen Fällen – wie z.B. bei der Betrachtung von Flatter-Instabilitäten – versagen. Dieser Exkurs ist insofern von Interesse, als es nicht zuletzt *Probleme mit Folgelasten* waren, die in der Mitte des vergangenen Jahrhunderts als Beispiel für Probleme dienten, die nur mit einer kinetischen Stabilitätsdefinition behandelt werden können (siehe [5], [49], [98] und Abschnitt 1.3.1).

Wie sich später zeigen wird, führen die betrachteten Probleme mit nichtkonservativen Kontaktkräften i.a. auf eben solche Probleme, sodass zur Beurteilung der Stabilität die kinetische Stabilitätstheorie herangezogen werden muss.

In den genannten Erläuterungen wurde stets von Abständen zwischen zwei Bewegungen, d.h. Folgen von Zuständen, gesprochen – ohne dass näher definiert wurde, durch was das jeweilige Paar von Zuständen, zwischen denen ein Abstand gemessen wird, zu definieren ist. Es zeigt sich, dass diese Definition von entscheidender Bedeutung für die Beurteilung des Stabilitätsverhaltens sein kann. Die wichtigsten Definitionen sind:

- Ist ein Zustand der gestörten Bewegung gegeben, so wird der Abstand zum – im Sinne

des Abstandsmaßes – nächstgelegenen Zustandes der Referenzbewegung ermittelt. Dies erfasst also die Nähe der Bahnkurven zueinander, ohne Beachtung der Zeitpunkte, wann die entsprechenden Zustände erreicht werden (siehe Abbildung 3.1 a). Da die Zeit keine Rolle spielt wird diese Definition als rein geometrisch bezeichnet [49] und dient als Grundlage für die sogenannte *orbitale Stabilität*.

- Eine Alternative besteht darin, beide Zustände zu einem gemeinsamen Zeitpunkt auszuwählen: denkt man sich beide Bewegungen (also Referenz und gestörte Bewegung) gleichzeitig gestartet, so entspricht dies einem "Schappschuss" zu einem Zeitpunkt. Da diese Definition die Zeit als bestimmende Größe beinhaltet, spricht man hier von einer kinematischen Definition und wählt diese im Rahmen der *Stabilitätstheorie nach Ljapunow* (siehe z.B. [18], [49], [76]).

Darüber hinaus wurde bislang der Begriff des "Abstandes" nicht näher konkretisiert. Die Schwierigkeiten bei einer Definition werden offenbar, wenn man sich vor Augen hält, dass ein Skalar gefunden werden soll, der die Konfiguration (Zustand) eines unendlich-dimensionalen Kontinuums charakterisiert. Hierzu gibt es prinzipiell zwei Herangehensweisen:

- Definition eines Maßes, das die Auslenkung eines Kontinuums skalar beschreiben kann: eine naheliegende Möglichkeit besteht hierbei beispielsweise in der Wahl einer Energie als Maß für Deformation und Bewegung des Kontinuums. Der Vorteil einer solchen Methode liegt darin, dass die partiellen Differentialgleichungen ohne vorherige Umformung zum Gegenstand der Untersuchung gemacht werden. Die Schwierigkeit besteht u.a. in der geeigneten Formulierung eines Energiemaßes.
- Diskretisierung der partiellen Bewegungsgleichungen führt auf endlich-dimensionale Koordinatenvektoren in einem Konfigurationsraum zur Beschreibung des Zustands des Kontinuums. Dies gestattet die Verwendung herkömmlicher Abstandsmaße (z.B. Euklidische Vektornorm), setzt jedoch eine konsistente Diskretisierung voraus. Auch für diskretisierte Systeme ist die alternative Verwendung einer Energienorm möglich.

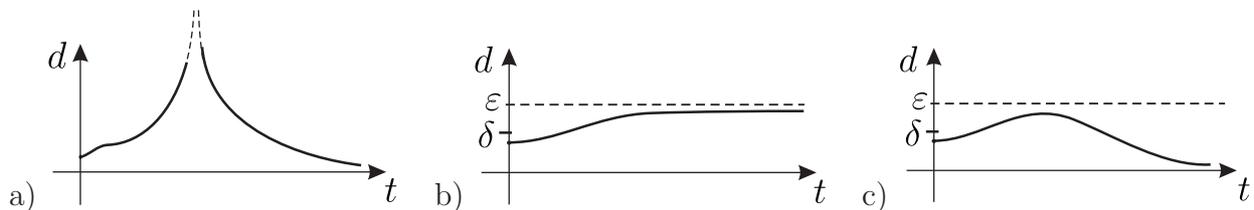


Abbildung 3.2: Verhalten der Referenz: a) attraktiv. b) stabil. c) asymptotisch stabil.

Ist ein geeignetes Abstandsmaß eingeführt, so muss schließlich noch der Begriff der Stabilität anhand dieses Maßes definiert werden [18], [21].

Geht der Abstand d für $t \rightarrow \infty$ langfristig gegen null, so bezeichnet man die untersuchte Referenz als *attraktiv*. Dabei wird keine weitere Beschränkung des Abstandes vorgenommen (siehe Abbildung 3.2 a).

Lässt man während der gesamten Bewegung maximal den Abstand ε zwischen Lösung und Referenz zu, so wird für orbitale Stabilität und Ljapunow-Stabilität in der Regel gefordert, dass ein gleichmäßig stetiger Zusammenhang zwischen diesem Maximalabstand ε und dem Anfangsabstand $\delta = \delta(\varepsilon)$ besteht. Unter dieser Voraussetzung ist es möglich, unabhängig vom betrachteten Zeitpunkt für jede beliebig kleine Fehlerschranke ε ein geeignetes $\delta(\varepsilon)$ zu finden, um diese Schranke einzuhalten (siehe Abbildung 3.2 b). Ist dies erfüllt, wird die Referenzlösung im Sinne des zugrundegelegten Stabilitätsbegriffs als *stabil* bezeichnet.

Ist die Referenz sowohl stabil als auch attraktiv, so wird sie als *asymptotisch stabil* bezeichnet (siehe Abbildung 3.2 c).

3.2 Energetische Vorbetrachtung

Eine energetische Betrachtung lässt sich mittels einer Energienorm h aufbauen, die einen Zustand geeignet charakterisiert. Zur Beurteilung des Abstandes zwischen einer Lösung und einer Referenzlösung lässt sich dann die Differenz Δh der Energien heranziehen [49]. Dabei sollen die zu vergleichenden Zustände zu ein und demselben Zeitpunkt gewählt werden, sodass eine Stabilitätsdefinition im Sinne Ljapunows zugrundegelegt wird.

In Übertragung der für endlichdimensionale Systeme üblichen Begriffe auf Kontinua (siehe beispielsweise 3.3) werden im Folgenden drei Fälle unterschieden:

- Die Energienorm geht langfristig gegen null: es gilt dann $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta h = 0$ und die Abweichung zwischen gestörter Lösung und Referenzlösung verschwindet für $t \rightarrow \infty$. Die betrachtete stationäre Lösung wird dann als attraktiv bezeichnet. Bleibt die Energienorm zudem während des zeitlich Grenzübergangs stets begrenzt im Sinne Ljapunowschen Stabilitätsdefinition (s.o.), so ist das Verhalten des System asymptotisch stabil. Ist das Systemverhalten und damit Δh keine explizite Funktion der Zeit, lässt sich die Bedingung durch $\frac{d}{dt} \Delta h < 0$ ersetzen.
- Ist $\Delta h = 0$, so kann das System als grenzstabil betrachtet werden. Insbesondere in diesem Grenzfall ist jedoch auf die erwähnte Problematik hinzuweisen, dass ein integrales Maß mitunter lokale Geschehnisse verdeckt.
- Für $\Delta h > 0$ ist das System instabil.

Es ist dabei zu beachten, dass ein solches Energieintegral nur auf notwendige Kriterien führen kann. Denn selbst wenn das Energieintegral unverändert bleibt, können lokale Bewegungen auftreten (siehe hierzu [39], [43]).

Aus dem allgemeinen Arbeitssatz folgt, dass die zeitliche Änderung der Gesamtenergie h eines Körpers dem Leistungsfluss über die Systemgrenzen entspricht (siehe z.B. [12]). Im Folgenden wird nun ein Körper betrachtet, der sich in einer stationären Ruhelage befindet und an dem außer den Kontaktkräften nur Zwangskräfte angreifen, die keine Leistungen haben sollen. Liegt nur ein Kontakt vor, so gilt für die Änderung der Energie des betrachteten Körpers

$$\frac{d}{dt}h = \int_{\Gamma_C} \vec{s} \cdot \dot{\vec{u}} da. \quad (3.1)$$

Nun soll geklärt werden, in welchem Zusammenhang \vec{u} und \vec{s} stehen müssen, um eine positive oder negative Leistungsbilanz in diesem Kontakt zu bewirken.



Abbildung 3.3: Zur Leistungsbilanz der Kontaktkräfte ($v_{rel} > \dot{u}$).

Zunächst soll einer Idee aus [70] folgend, die Leistung in Abhängigkeit des Phasenwinkels zwischen Schwankungen der Spannung und der Verschiebung angegeben werden. Es wird ein punktförmiger Kontakt betrachtet, dessen Position $u = u(t)$ als Funktion der Zeit bekannt sei. Er wird durch die vertikale Kraft $F(t)$ auf einen sich mit einer Transportgeschwindigkeit v_0 bewegenden Untergrund ("Förderband") gepresst. Infolgedessen wirkt im Kontakt die Normalkraft $N(t) = F(t)$ sowie die Reibkraft $R = \mu N$. Dabei wird angenommen, dass lediglich Gleitreibung vorliegt, die ihre Richtung nicht ändert, d.h. $v_0 > \max|\dot{u}|$.

Die Änderung der Gesamtenergie h durch die Arbeit der Reibkraft lautet $\dot{h} = \mu N(t)\dot{u}(t)$. Durch Integration über einen Zyklus lässt sich die durch die Reibkraft geleistete Arbeit ermitteln, welche dann als Kriterium zur Beurteilung der Stabilität dienen soll.

Ist die Verschiebung mit $u(t) = \hat{u} \cos \omega t$ gegeben und schwankt die Normalkraft mit der gleichen Kreisfrequenz, jedoch verschoben um die Phase φ , d.h. $N(t) = N_0 + \hat{N} \cos(\omega t - \varphi)$, so gilt über einen Zyklus die Bilanz

$$\Delta h = \oint \dot{h} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} -\omega \hat{u} \sin \omega t \mu (N_0 + \hat{N} \cos(\omega t - \varphi)) d(\omega t) = -\mu \hat{u} \hat{N} \pi \cos \varphi. \quad (3.2)$$

Offensichtlich ist für Phasenwinkel $\varphi \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ die über einen Zyklus eingetragene Energie Δh positiv und die Ruhelage somit instabil.

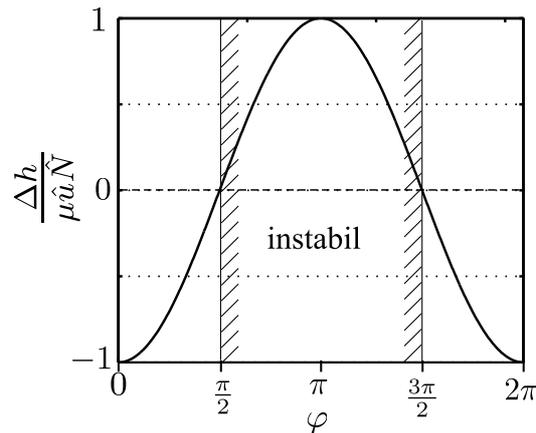


Abbildung 3.4: Arbeit Δh der Kontaktkraft über einen Zyklus in Abhängigkeit von der Phasenlage.

Auffällig ist hierbei, dass weder die Amplituden \hat{N} , \hat{u} der Normalkraft bzw. Auslenkung noch der Gleitreibungswert μ oder die Vorspannung N_0 einen Einfluss auf die Stabilität haben. Einzig die Phasenlage φ entscheidet hierüber.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, dass zwischen u und R keine Phasenbeziehung besteht, sondern R von der Geschwindigkeit von u abhängt. Dies ist beispielsweise der Fall bei der sogenannten "fallenden Kennlinie", bei der in der Nähe einer stationären Lösung der Gleitreibungswert durch $\mu \approx \mu_0 + c_\mu v_{rel}$ mit $v_{rel} = v_0 - \dot{u}$ gegeben ist. In diesem Fall lautet die Arbeit Δh der Kontaktkraft über einen Zyklus

$$\Delta h = \oint \dot{h} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} -\omega \hat{u} \cos \omega t (\mu_0 + c_\mu v_0 - c_\mu (-\omega \sin \omega t) N_0) d(\omega t) = -\omega c_\mu \hat{u} \pi. \quad (3.3)$$

Offensichtlich ist Δh für $c_\mu < 0$ positiv und die Reibkraft führt dem System Energie zu. Dies steht im Einklang mit dem bekannten Mechanismus der "fallenden Kennlinie" (siehe Abschnitt 1.3.2 oder beispielsweise auch [61]).

3.3 Stabilität des diskretisierten Systems

Bei der Berechnung von (Näherungs-)Lösungen partieller Differentialgleichungen wird man in der Praxis auf Separationsansätze zurückgreifen, die letztlich auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen führen. Die Koordinaten jeder dieser Differentialgleichungen lassen sich als Punktkoordinaten des entsprechenden Zustands in einem Zustandsraum interpretieren. Mit dieser Interpretation liegt es nahe, als Abstandsmaß für die Stabilitätsuntersuchungen den Euklidischen Abstand zweier Punkt im Zustandsraum aufzufassen.

Im Folgenden wird angenommen, dass die zirkulatorischen Anteile $\mathbf{N}_{D,i}$ aus der inneren Dämpfung verglichen mit denen aus der Linearisierung der Reibungskräfte vernachlässigbar

sind. Es wird daher $\mathbf{N}_{D,i} = \mathbf{0}$ gesetzt. Wie in Kapitel 2 gezeigt, werden die zu untersuchenden Systeme dann durch Differentialgleichungen der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.4)$$

beschrieben, wobei $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ die i.a. nichtlinearen Kontaktkräfte und übrigen Kräfte repräsentiert (siehe Gleichung (2.89)). Soll nun eine stationäre Lösung \mathbf{q}_0 auf ihre Stabilität untersucht werden, so lautet der Abstand $\Delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_0(t)$ zwischen einer Lösung $\mathbf{q}(t)$ und dieser Grundlösung

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0). \quad (3.5)$$

Diese Abstandsdefinition als Differenz einer Lösung zur Referenzlösung zu *einem* gegebenen Zeitpunkt bedeutet dabei übrigens, dass eine Stabilitätsdefinition im Sinne Ljapunows gewählt wurde.

Im Folgenden wird angenommen, dass die rechte Seite ausreichende Differenzierbarkeit aufweist und lokal über eine Taylor-Reihe approximiert werden kann. Ist die Lösung $\mathbf{q}(t)$ benachbart zur Referenzlösung, so lässt sich die rechte Seite damit als

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} \Delta\mathbf{q} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} \Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{O}(2) \quad (3.6)$$

ausdrücken, wobei $\mathcal{O}(2)$ die Gesamtheit der Terme ab zweiter Ordnung andeutet.

Mit

$$\mathbf{P}_R = - \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}_R = - \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0} \quad (3.7)$$

lauten die linearisierten Differentialgleichungen für die Störung $\Delta\mathbf{q}$

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G} + \mathbf{P}_R)\Delta\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{Q}_R)\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

Diese werden als Störungsgleichungen der ersten Näherung oder auch als Variationsgleichungen bezeichnet (z.B. [49]). Wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, sind die Gleitreibungskräfte für stationäre, autonome Bewegungen nicht zeitabhängig. Diese Matrizen hängen jedoch im Allgemeinen von den gewählten Kontaktformulierungen ab: Details hierzu finden sich in Kapitel 2.3.2.

Somit sind alle Systemmatrizen in (3.8) zeitlich konstant und nur vom Linearisierungspunkt (d.h. der Grundlösung \mathbf{q}_0) abhängig.

Da Gleichung (3.8) ein System linearer, homogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten darstellt, lässt sich das Zeitverhalten der Störungen $\Delta\mathbf{q}$ bequem anhand einer Eigenwertanalyse beurteilen. Mit dem Ansatz $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{r}e^{\lambda t}$ erhält man das quadratische

Eigenwertproblem

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + (\mathbf{D} + \mathbf{G} + \mathbf{P}_R)\lambda + (\mathbf{K} + \mathbf{Q}_R)] \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

mit den Eigenwerten λ und den Eigenvektoren \mathbf{r} .

Stellt \mathbf{q}_0 eine hyperbolische Ruhelage dar, d.h. sind alle Realteile der Eigenwerte λ von null verschieden, so lässt sich die Stabilität des Systems (3.4) in der Nähe von \mathbf{q}_0 anhand der linearisierten Störungsgleichungen untersuchen (siehe [34]).

Mit einer Norm $|\cdot|$ lautet der Abstand d der gestörten Lösung \mathbf{q} von der Referenzlösung \mathbf{q}_0 dann

$$d = |\Delta\mathbf{q}| = |\mathbf{r}e^{\lambda t}| = |\mathbf{r}|e^{\lambda t}. \quad (3.10)$$

Sind die Eigenwerte λ des Systems (3.9) bekannt, so ist die Stabilität der trivialen Lösung der Störungsgleichung (3.9) – und damit der Referenzlösung \mathbf{q}_0 – vollständig bestimmt. Man unterscheidet folgende Fälle:

- $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ ($i = 1, \dots, n$): alle Eigenwerte der Störungsgleichung (3.9) haben negative Realteile. Alle Lösungsanteile klingen ab und die untersuchte Lösung wird als *asymptotisch stabil* bezeichnet.
- $\max\{\operatorname{Re}\{\lambda_i\}\} = 0$ ($i = 1, \dots, n$): es gibt Eigenwerte zur Störungsgleichung (3.9), deren Realteil nicht verschwindet.

Die untersuchte Ruhelage des zugrundeliegende nichtlinearen System ist damit kein hyperbolischer Punkt und eine Beurteilung der Stabilität anhand der linearisierten Gleichung ist nicht mehr zulässig. Eine Stabilitätsbeurteilung ist nur unter Berücksichtigung höherer Glieder der Taylor-Entwicklung möglich. In der Praxis ist dies jedoch nur selten notwendig, da durch die beiden anderen Fälle das Stabilitätsgebiet hinreichend eingeschlossen ist.

- $\max\{\operatorname{Re}\{\lambda_i\}\} > 0$ ($i = 1, \dots, n$): mindestens ein Eigenwert der Störungsgleichung (3.9) hat einen positiven Realteil. Für beliebige Anfangsstörungen wird somit mindestens eine der Eigenlösungen zu einem Aufklingen der Gesamtlösung führen. Die untersuchte Referenzlösung ist damit als *instabil* zu bezeichnen.

Wie zuvor besteht auch beim diskretisierten System eine alternative Herangehensweise in der Betrachtung der zeitlichen Entwicklung eines Energieausdruckes. Ist die sogenannte Hamilton-Funktion h als Funktion der Systemmatrizen gegeben, so lassen sich durch Umformulierung von (3.8) Matrixgleichungen für $\frac{d}{dt}h$ angeben. Das Verhalten von h kann dann mitunter vollständig auf Basis von Matrizeneigenschaften (wie Definitheit, Symmetrie) begründet werden.

3.3.1 Matrizeneigenschaften und Stabilität

Ausgehend von Symmetrieeigenschaften der Systemmatrizen lassen sich in manchen Fällen bereits grundlegende Aussagen über ihren Einfluss auf das Stabilitätsverhalten treffen.

Ist \mathbf{A} eine reelle quadratische Matrix und \mathbf{u} eine reelle Spaltenmatrix, so gilt

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top : \mathbf{u}^\top \mathbf{A} \mathbf{u} > 0 \quad (\mathbf{A} \text{ ist positiv definit}) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{u}^\top \mathbf{A} \mathbf{u} \geq 0 \quad (\mathbf{A} \text{ ist positiv semidefinit}) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top : \mathbf{u}^\top \mathbf{A} \mathbf{u} = 0. \quad (3.13)$$

Für viele mechanische Systeme führt die Linearisierung um eine Grundlösung auf Gleichungssysteme der Form

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D}_{eff} + \mathbf{G}_{eff}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_{eff} + \mathbf{N}) \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

die kleine Bewegungen um die Referenzlösung beschreiben. Der Index $(\)_{eff}$ deutet hierbei an, dass die Matrizen i.a. nicht mehr nur aus den Beiträgen der Strukturdynamik bestehen, sondern auch die symmetrischen bzw. schief-symmetrischen Anteile aus der Linearisierung der Kontaktkräfte beinhalten.

Hierbei ist die Massenmatrix aus physikalischen Gründen immer positiv definit, d.h. $\mathbf{M}_{eff} > 0$. Zudem wird im Folgenden angenommen, dass die Steifigkeitsmatrix ebenfalls positiv definit ist ($\mathbf{K} > 0$). Die Systemmatrizen weisen folgende Symmetrieeigenschaften auf:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top, \quad \mathbf{D}_{eff} = \mathbf{D}_{eff}^\top, \quad \mathbf{K}_{eff} = \mathbf{K}_{eff}^\top, \quad \mathbf{G}_{eff} = -\mathbf{G}_{eff}^\top, \quad \mathbf{N} = -\mathbf{N}^\top. \quad (3.15)$$

Linksmultiplikation von Gleichung (3.14) mit $\dot{\mathbf{q}}^\top$ führt nach kurzer Rechnung unter Beachtung der Beziehungen

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top \mathbf{K}_{eff} \mathbf{q}$$

für die kinetische und potentielle Energie auf

$$\frac{d}{dt} (T + U) = -\dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{D}_{eff} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{N} \mathbf{q}. \quad (3.16)$$

Da $\mathbf{M}, \mathbf{K}_{eff} > 0$ angenommen wird, stellt die Summe $h = T + U$ eine geeignete Ljapunow-Funktion dar ([18], [49], [56]) und kann zur Beurteilung der Stabilität herangezogen werden.

Offensichtlich wird eine positiv definite Dämpfungsmatrix ($\mathbf{D}_{eff} > 0$) dem System wegen $\dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{D}_{eff} \dot{\mathbf{q}} > 0$ Energie entziehen. Fehlen die zirkulatorischen Beiträge ($\mathbf{N} = \mathbf{0}$), so gilt $\dot{h} = -\dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{D}_{eff} \dot{\mathbf{q}}$ und die Gesamtenergie nimmt ab. Ist die Dämpfungsmatrix lediglich positiv

semidefinit $\mathbf{D}_{eff} \geq 0$, so wird dem System im Allgemeinen ebenfalls Energie entzogen. Da lediglich $\dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{D}_{eff} \dot{\mathbf{q}} \geq 0$ sichergestellt ist, können in Sonderfällen Schwingungsmuster existieren, bei denen die Gesamtenergie $h = T + U$ unverändert bleibt. Konkret sind dies Bewegungen, für welche die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ während der gesamten Bewegung im Kern der Dämpfungsmatrix liegen, d.h. $\dot{\mathbf{q}} \in \ker \mathbf{D}_{eff}$, und damit $\dot{h} = \dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{D}_{eff} \dot{\mathbf{q}} = 0$. In vielen Fällen jedoch existieren trotz nur semidefiniter Dämpfung $\mathbf{D} \geq 0$ keine ungedämpften Eigenbewegungen: man spricht dann von durchdringender Dämpfung.

Der Beitrag des schief-symmetrischen Anteils \mathbf{N} zur lageproportionalen Matrix ist leider nicht so einfach auf Basis von Matrizeneigenschaften zu untersuchen und wird im weiteren Verlauf der Arbeit eingehend diskutiert.

Die gyrokopische Matrix \mathbf{G}_{eff} leistet keinen direkten Beitrag zur Leistungsbilanz, da für reelle Lösungen \mathbf{q} stets $\dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{G}_{eff} \dot{\mathbf{q}} = 0$ gilt. Indirekt kann \mathbf{G}_{eff} jedoch durchaus das Stabilitätsverhalten beeinflussen. Im Allgemeinen sind Lösungen des Systems mit gyrokopischen Einflüssen unterschiedlich zu denen ohne: hierdurch ist es möglich, durch gyrokopische Einflüsse instabile Lösungen zu vermeiden. Im allgemeinen Fall ist das gesamte System zu diskutieren, dessen Verhalten durch das Zusammenspiel aller Systemmatrizen bestimmt wird. Bekannte Beispiele sind gyrokopische Stabilisierung instabiler $\mathbf{M-K}$ -Systeme oder Destabilisierung zirkulatorischer $\mathbf{M-K-N}$ -Systeme durch gyrokopische Einflüsse.

Da weitere ähnlich einfache Aussagen allein auf Basis der Symmetrie- und Definitheitseigenschaften der Systemmatrizen kaum möglich bzw. bekannt sind, ist in der Regel eine Untersuchung der Eigenwerte des Systems notwendig.

3.3.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Zunächst sollen allgemeine Eigenschaften quadratischer Eigenwertprobleme diskutiert werden. Für allgemeine mechanische Systeme führt der Ansatz $\mathbf{q} = \mathbf{r}e^{\lambda t}$ auf das nichtsymmetrische quadratische Eigenwertproblem

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}\lambda + \mathbf{Q}] \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top, \mathbf{P} \neq \mathbf{P}^\top, \mathbf{Q} \neq \mathbf{Q}^\top). \quad (3.17)$$

Hierbei wurden die geschwindigkeitsproportionalen Anteile zur Matrix $\mathbf{P} = \mathbf{D} + \mathbf{G}$ zusammengefasst. Die Matrix $\mathbf{Q} = \mathbf{K} + \mathbf{N}$ beinhaltet die lageproportionalen Anteile.

Zum Eigenwertproblem (3.17) lässt sich auch das sogenannte *Linkseigenwertproblem*

$$\ell^\top [\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}\lambda + \mathbf{Q}] = \mathbf{0} \quad \leftrightarrow \quad [\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}^\top \lambda + \mathbf{Q}^\top] \ell = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

formulieren. Sinngemäß wird Gleichung (3.17) in diesem Zusammenhang auch als *Rechtseigenwertproblem* bezeichnet. Beide Eigenwertprobleme haben identische Eigenwerte λ , die

Rechts- und Linkseigenvektoren \mathbf{r} bzw. $\boldsymbol{\ell}$ sind jedoch nur für symmetrische Systemmatrizen $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\top$ gleich.

Die folgenden Überlegungen werden für das Rechtseigenwertproblem (3.17) dargestellt, lassen sich jedoch völlig analog auf das Linkseigenwertproblem (3.18) übertragen.

Das allgemeine quadratische Eigenwertproblem (3.17) hat $2n$ Eigenwerte λ samt der zugehörigen Eigenvektoren \mathbf{r} . Im Allgemeinen sind sowohl die Eigenwerte als auch die Eigenvektoren komplexe Größen. Setzt man nun $\lambda = \varrho + j\omega$ und $\mathbf{r} = \mathbf{a} + j\mathbf{b}$ in (3.17) ein und trennt Real- und Imaginärteil, so erhält man das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(\varrho^2 - \omega^2) + \mathbf{P}\varrho + \mathbf{Q} & -2\varrho\omega\mathbf{M} - \omega\mathbf{P} \\ 2\varrho\omega\mathbf{M} + \omega\mathbf{P} & \mathbf{M}(\varrho^2 - \omega^2) + \mathbf{P}\varrho + \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

3.3.2.1 Symmetrien des komplexen Spektrums, Eigenvektoren

Ist das Eigenpaar $(\lambda = \varrho + j\omega, \mathbf{r} = \mathbf{a} + j\mathbf{b})$ eine Lösung dieses Gleichungssystems, so ist das konjugiert-komplexe Eigenpaar $(\bar{\lambda} = \varrho + j(-\omega), \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{a} + j(-\mathbf{b}))$ ebenfalls eine Lösung, wie man leicht durch Einsetzen prüfen kann. Dies bedeutet, dass die Eigenwerte des Systems (3.19) stets symmetrisch zur reellen Achse auftreten (vgl. Abbildung 3.5 a).

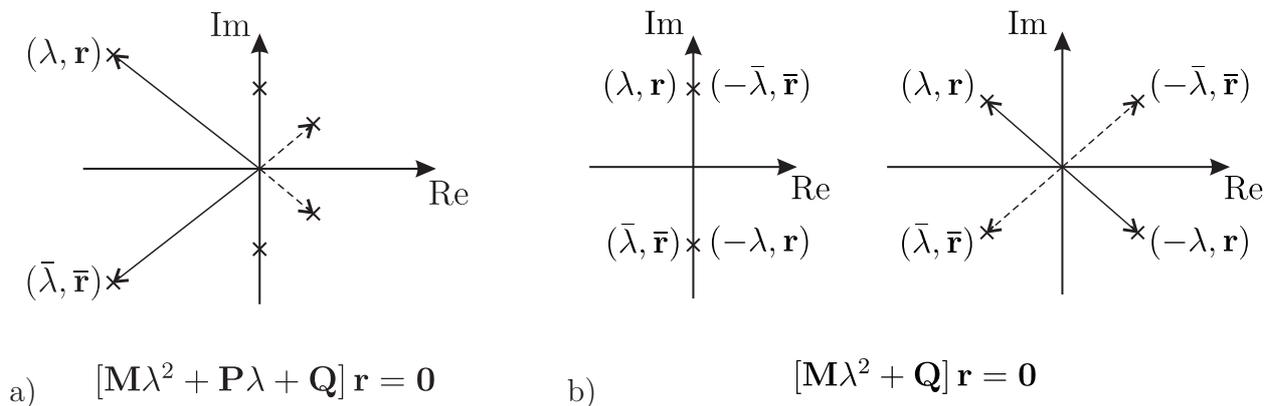


Abbildung 3.5: Zur Lage von Eigenwerten in der komplexen Ebene. Mögliche Positionen der komplexen Eigenwerte λ sind mit \times gekennzeichnet. In Klammern sind die Eigenpaare bestehend aus einem Eigenwert und seinem Eigenvektor \mathbf{r} zusammengefasst. a) Das Spektrum allgemeiner quadratischer Eigenwertprobleme ist stets symmetrisch zur reellen Achse. b) Das Spektrum quadratischer Eigenwertprobleme mit $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ist sowohl zur reellen wie auch zur imaginären Achse symmetrisch.

Darüber hinaus kann man sich leicht davon überzeugen, dass für $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ gilt: ist λ eine Lösung des Gleichungssystems, so wird es auch von $-\lambda$ erfüllt. Mit dem zuvor Festgestellten gilt dann, dass zu jeder Lösung λ auch $-\lambda$, $\bar{\lambda}$ und $-\bar{\lambda}$ Lösungen sind.

Dies bedeutet, dass die Eigenwerte von Systemen der Form

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{Q}]\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

ohne geschwindigkeitsproportionale Terme sowohl symmetrisch zur reellen wie auch zur imaginären Achse auftreten. Die zugehörigen Eigenpaare lauten (λ, \mathbf{r}) und $(-\lambda, \mathbf{r})$, $(\bar{\lambda}, \bar{\mathbf{r}})$, $(-\bar{\lambda}, \bar{\mathbf{r}})$.

Es soll an dieser Stelle betont werden, dass diese Eigenschaften nicht von den Symmetrieeigenschaften der Matrizen \mathbf{P} oder \mathbf{Q} abhängen.

3.3.2.2 Existenz reeller Eigenvektoren

Obwohl Eigenvektoren im Allgemeinen komplexe Größen sind, lassen sich für viele praktisch bedeutsame Systeme reelle Eigenvektoren finden. Hierbei ist anzumerken, dass in jedem Fall komplexe Vielfache eines Eigenvektors wiederum Eigenvektoren sind.

Reelle Eigenvektoren \mathbf{r} zu einem Eigenwert $\lambda = \varrho + j\omega$ zeichnen sich durch die Form $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, d.h. $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ aus. Setzt man Schwingungen voraus ($\omega \neq 0$), so kann Gleichung (3.19) zu

$$\begin{bmatrix} -(\varrho^2 + \omega^2)\mathbf{M} + \mathbf{Q} \\ 2\varrho\mathbf{M} + \mathbf{P} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

umgeschrieben werden. Dies ist ein System von $2n$ Gleichungen für n Unbekannte in \mathbf{a} . Folglich muss \mathbf{a} sowohl die obere als auch die untere Teilgleichung in (3.21) simultan erfüllen.

Dabei können zwei Fälle unterschieden werden:

- $\varrho = 0$: der Eigenwert liegt auf der imaginären Achse und \mathbf{a} ist ein Eigenvektor des zugehörigen Systems ohne geschwindigkeitsproportionale Anteile: $-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{Q}$. Dies ist der Fall, wenn

$$\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \text{gilt oder aber} \quad \mathbf{a} \in \ker\{\mathbf{P}\} \quad (3.22)$$

und damit \mathbf{a} Element des Kerns von \mathbf{P} ist.

- $\varrho \neq 0$: der Eigenwert liegt nicht auf der imaginären Achse und \mathbf{a} muss gleichzeitig eine Lösung der Matrixgleichungen

$$(\varrho^2 + \omega^2)\mathbf{a} = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q})\mathbf{a} \quad \wedge \quad 2\varrho\mathbf{a} = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P})\mathbf{a}$$

sein. Mit anderen Worten heißt dies, dass \mathbf{a} gleichzeitig ein Eigenvektor der Matrizen $(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q})$ und $(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P})$ sein muss. Vormultiplikation dieser Gleichungen mit jeweils der anderen Matrix ergibt

$$(\varrho^2 + \omega^2)(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P})\mathbf{a} = [(\varrho^2 + \omega^2)2\varrho]\mathbf{a} = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q})\mathbf{a} \quad (3.23)$$

$$\wedge \quad 2\varrho(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q})\mathbf{a} = [2\varrho(\varrho^2 + \omega^2)]\mathbf{a} = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P})\mathbf{a}. \quad (3.24)$$

Für $\varrho \neq 0$ und $\omega \neq 0$ gilt diese Beziehung offenbar nur, wenn die Matrizen vertauschbar sind (kommutieren), d.h. wenn die sogenannte *Vertauschbarkeitsrelation*

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}) = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P})(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}) \quad (3.25)$$

erfüllt ist [60].

Entsprechen die Matrizen \mathbf{P} und \mathbf{Q} eines allgemeinen $\mathbf{M}\text{-}\mathbf{P}\text{-}\mathbf{Q}$ -Systems der Vertauschbarkeitsbedingung (3.25), so sind die Eigenvektoren des zugehörigen $\mathbf{M}\text{-}\mathbf{Q}$ -Systems gleichzeitig auch Eigenvektoren des $\mathbf{M}\text{-}\mathbf{P}\text{-}\mathbf{Q}$ -Systems. Wie zuvor gezeigt, existieren zu einem grenzstabilen $\mathbf{M}\text{-}\mathbf{Q}$ -System stets reelle Eigenvektoren.

Erfüllt die Matrix \mathbf{P} die Vertauschbarkeitsbedingung, so spricht man häufig von *modaler Dämpfung*. Ein gängiges Beispiel hierfür ist die sogenannte proportionale Dämpfung (Rayleigh-Dämpfung) mit $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{Q}$.

Für beliebige geschwindigkeitsproportionale Anteile, die diese besonderen Bedingungen nicht erfüllen, werden im Allgemeinen nur komplexe Eigenvektoren zu finden sein. Insbesondere sind die Eigenvektoren dissipationsloser gyroskopischer Systeme (d.h. der Form $\mathbf{M}\text{-}\mathbf{G}\text{-}\mathbf{Q}$) stets komplexwertig.

Ein im Weiteren interessanter Sonderfall liegt vor, wenn trotz verschwindender geschwindigkeitsproportionaler Anteile der Realteil eines Eigenwertes nicht verschwindet, d.h. wenn $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ und $\varrho \neq 0$ gilt. In diesem Fall kann die zweite Matrixgleichung in (3.21) nur durch die triviale Lösung $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ erfüllt werden. Da dies kein Eigenvektor ist, ist auch für diese Systeme offenbar ein komplexwertiger Eigenvektor nötig.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass reelle Eigenvektoren nur für

- grenzstabile Systeme ohne geschwindigkeitsproportionale Anteile ($\varrho = 0$, $\mathbf{P} = \mathbf{0}$),
- für Systeme, bei denen die Matrix der geschwindigkeitsproportionalen Kräfte \mathbf{P} mit der Matrix der lageproportionalen Kräfte \mathbf{Q} vertauschbar ist (kommutiert) oder
- in Spezialfällen, wenn der entsprechende Eigenvektor Element des Kerns von \mathbf{P} ist,

gefunden werden können. Ansonsten können nur komplexwertige Eigenvektoren angegeben werden.

3.3.2.3 Reelle Darstellung von Eigenvektoren

Ein komplexes Vielfaches eines Eigenvektors ist stets ebenfalls ein Eigenvektor. Mit den Eulerschen Gleichungen lassen sich die Elemente eines beliebigen Eigenvektors gemäß

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + j\mathbf{b} = (r_1 e^{j\varphi_1}, \dots, r_n e^{j\varphi_n})^\top$$

als komplexe Zeiger schreiben. Sind alle diese komplexen Zeiger in der komplexen Ebene entlang einer gemeinsamen Geraden ausgerichtet, d.h. wenn

$$\varphi_i \bmod \pi = \varphi = \text{const}, \quad i = 1, \dots, n$$

gilt, dann ist der Vektor $\tilde{\mathbf{r}} = e^{-j\varphi} \mathbf{r}$ ein rein reellwertiger Eigenvektor zu dem ursprünglich komplexwertigen \mathbf{r} (vgl. Abb. 3.6 a).

Man überzeugt sich leicht davon, dass solche Eigenvektoren \mathbf{r} , bei denen alle komplexen Einträge das gleiche Winkelargument aufweisen, sich bezüglich des Rayleigh-Quotienten genauso verhalten wie ihr reellwertiges Pendant $\tilde{\mathbf{r}}$.

Im Folgenden sind unter dem Begriff des reellen Eigenvektors solche Eigenvektoren gemeint, die entweder rein reelle Einträge aufweisen oder durch Multiplikation mit einem geeigneten komplexen Vorfaktor in ihr reelles Pendant überführt werden können.

Wenn es nicht möglich ist, einen komplexen skalaren Multiplikator zu bestimmen, der einen Eigenvektor in sein reelles Pendant überführt, so wird dieser Eigenvektor als komplexer Eigenvektor bezeichnet (Abb. 3.6 b). In diesem Fall ist mindestens einer seiner Einträge eine komplexe Zahl.

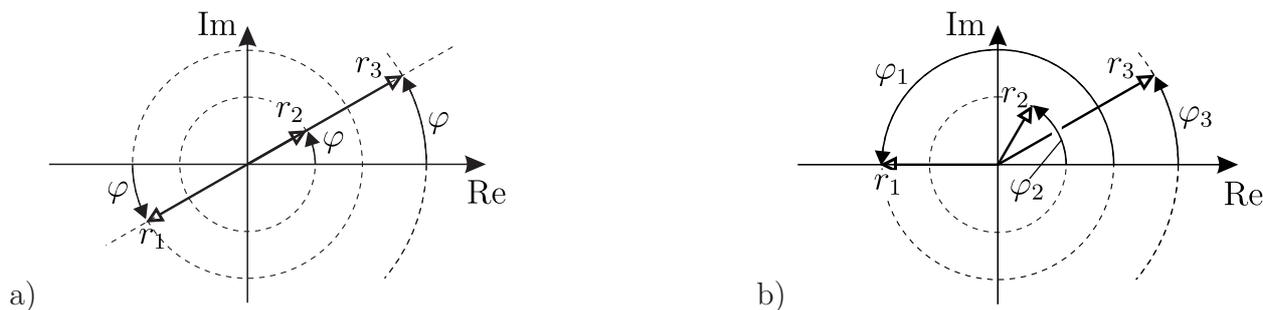


Abbildung 3.6: Zur reellen Darstellbarkeit von Eigenvektoren:

a) der Eigenvektor $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^\top$ ist reell darstellbar, b) \mathbf{r} ist nicht reell darstellbar.

Da numerische Algorithmen zur Lösung von Eigenproblemen insbesondere für unsymmetrische Eigenwertprobleme häufig komplexe Eigenvektoren ermitteln – obwohl reellwertige Pendants existieren – sind diese Überlegungen nützlich um zu überprüfen, ob ein Eigenvektor "echt" komplex ist, oder eine reellwertige Repräsentation existiert.

3.3.3 Zusammenhang zwischen Eigenvektoren und Eigenwerten: der Rayleigh-Quotient

3.3.3.1 Lineares Eigenwertproblem

Der verallgemeinerte Rayleigh-Quotient einer Matrix \mathbf{A} ist definiert als

$$R[\mathbf{u}] = \frac{\mathbf{u}'\mathbf{A}\mathbf{u}}{\mathbf{u}'\mathbf{u}}, \quad (3.26)$$

wobei $()' = (\bar{})^{\top}$ die konjugiert-komplexe Transponierte bezeichnet und \mathbf{u} ein komplexer Vektor ist.

Das lineare Eigenwertproblem der Matrix \mathbf{A} lautet

$$[\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{r}_i = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

Fällt \mathbf{u} mit einem Eigenvektor \mathbf{r}_i von \mathbf{A} zusammen, so liefert der Rayleigh-Quotient den zugehörigen Eigenwert:

$$R[\mathbf{r}_i] = \frac{\mathbf{r}_i'\mathbf{A}\mathbf{r}_i}{\mathbf{r}_i'\mathbf{r}_i} = \lambda_i. \quad (3.28)$$

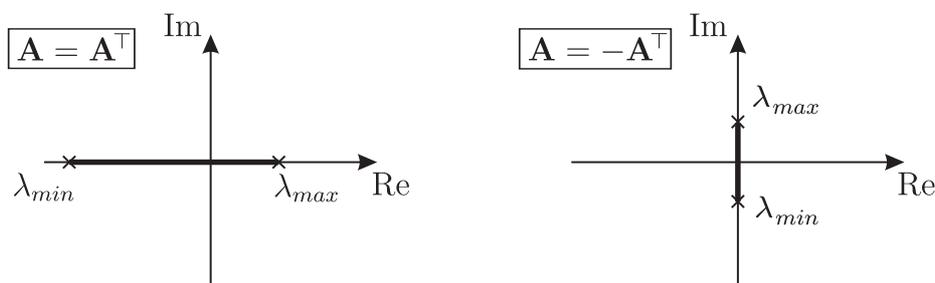


Abbildung 3.7: Eingrenzung von Eigenwerten (min-max):

a) symmetrische Matrix. b) schiefsymmetrische Matrix.

Ist $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}$ eine *symmetrische Matrix*, so ist der Rayleigh-Quotient $R[\mathbf{u}]$ eine rein reelle Größe – selbst wenn der Testvektor \mathbf{u} komplexwertig ist. Man kann zeigen, dass für beliebige Vektoren \mathbf{u}

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}: \quad R[\mathbf{u}] = a, \quad \lambda_{min} \leq a \leq \lambda_{max}, \quad a \in \mathbb{R} \quad (3.29)$$

gilt, wobei λ_{min} und λ_{max} der kleinste bzw. größte Eigenwert sind (siehe Abbildung 3.7).

Ist andererseits $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\top}$ eine *schiefsymmetrische Matrix*, so ist der Rayleigh-Quotient eine rein komplexwertige Zahl. Ist der Testvektor reell (oder besitzt eine reelle Darstellung), so verschwindet der Rayleigh-Quotient. In diesem Fall haben nämlich alle Komponenten des Testvektors das gleiche Winkelargument φ_i . Dann kann \mathbf{u} umgeschrieben werden zu

$\mathbf{u} = e^{j\varphi}\mathbf{u}_r$, wobei \mathbf{u}_r eine reelle Größe ist. Damit lautet der Rayleigh-Quotient für eine schiefsymmetrische Matrix \mathbf{A} und einen reellen Testvektor

$$R[\mathbf{u}] = \mathbf{u}'\mathbf{A}\mathbf{u} = e^{-j\varphi}\mathbf{u}_r'\mathbf{A}e^{+j\varphi}\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_r'\mathbf{A}\mathbf{u}_r = 0.$$

Zusammenfassend gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = -\mathbf{A}^\top, \mathbf{u} = \mathbf{a} + j\mathbf{b} \in \mathbb{C}, \mathbf{b} \neq 0: & \quad R[\mathbf{u}] = ja, \quad \lambda_{min} \leq ja \leq \lambda_{max}, \quad a \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{b} = 0: & \quad R[\mathbf{u}] = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Man kann zudem zeigen, dass die Eigenwerte schiefsymmetrischer Matrizen symmetrisch zur reellen Achse sind, sodass zu jedem λ auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert der Matrix ist. Hieraus folgt, dass der Wertebereich einer schiefsymmetrischen Matrix \mathbf{A} ebenfalls symmetrisch zur reellen Achse ist, d.h. $\lambda_{min} = -\lambda_{max}$ ist (siehe Abbildung 3.7).

Weitere Details sind in [33] oder [99] zu finden.

3.3.3.2 Quadratische Eigenwertprobleme

Linksmultiplikation des quadratischen Eigenwertproblems (3.17) mit der konjugiert-komplexen Transponierten des Eigenvektors $\mathbf{r}'_i = \bar{\mathbf{r}}^\top$ des Eigenvektors \mathbf{r} liefert unter Annahme massennormierter Eigenvektoren, d.h. $m = \mathbf{r}'_i\mathbf{M}\mathbf{r}_i = 1$, für die Eigenwerte λ_i die Gleichung

$$\lambda_{i,1/2} = -\frac{d + jg}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - g^2 - 4k + j(2dg - 4n)}, \quad (3.31)$$

mit den Einschließungen

$$d = \mathbf{r}'_i\mathbf{D}\mathbf{r}_i \in [\lambda[\mathbf{D}]_{min}, \lambda[\mathbf{D}]_{max}] \quad , \quad (3.32)$$

$$jg = \mathbf{r}'_i\mathbf{G}\mathbf{r}_i \in [\lambda[\mathbf{G}]_{min}, \lambda[\mathbf{G}]_{max}] \quad , \quad (3.33)$$

$$k = \mathbf{r}'_i\mathbf{K}\mathbf{r}_i \in [\lambda[\mathbf{D}]_{min}, \lambda[\mathbf{K}]_{max}] \quad , \quad (3.34)$$

$$jn = \mathbf{r}'_i\mathbf{N}\mathbf{r}_i \in [\lambda[\mathbf{D}]_{min}, \lambda[\mathbf{D}]_{max}] \quad . \quad (3.35)$$

Die aus den antimetrischen Matrizen \mathbf{G} und \mathbf{N} herrührenden reellen Skalare $g, n \in \mathbb{R}$ sind nur dann ungleich null, wenn \mathbf{r} nicht reell dargestellt werden kann (siehe Abschnitt 3.3.2.3). Weitere Details finden sich beispielsweise in [33], [82].

3.3.3.3 Orientierung der Rechtseigenvektoren

Im Folgenden wird die Orientierung der Rechtseigenvektoren zueinander diskutiert. Dies geschieht in Anlehnung an die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren unter Verwendung eines reellen Skalarproduktes.

Hierzu wird das quadratische Eigenwertproblem

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{Q}] \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

mit $\mathbf{Q} = \mathbf{K} + \mathbf{N}$ betrachtet.

Linksmultiplikation von (3.36) mit \mathbf{r}_k^\top ergibt

$$\mathbf{r}_k^\top \mathbf{M} \mathbf{r}_i \lambda_i^2 + \mathbf{r}_k^\top \mathbf{K} \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k^\top \mathbf{N} \mathbf{r}_i = 0. \quad (3.37)$$

Vertauschen der Indizes und Subtraktion führt unter Beachtung der besonderen Eigenschaften quadratischer Formen mit symmetrischen bzw. schief-symmetrischen Matrizen (siehe 3.3.1) auf

$$(\lambda_k^2 - \lambda_i^2) \mathbf{r}_k^\top \mathbf{M} \mathbf{r}_i = -2 \mathbf{r}_k^\top \mathbf{N} \mathbf{r}_i. \quad (3.38)$$

Zeigt das System grenzstabile Schwingungen, so gilt $\lambda_i^2 = -\omega_i^2 \in \mathbb{R}^-$, $\varrho = 0$. Folglich ist auch die Differenz $\lambda_k^2 - \lambda_i^2$ eine reelle Größe. Für reelle Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{N} existiert somit immer ein Satz reellwertiger Eigenvektoren, die im Folgenden als massennormiert gemäß

$$i = k : \quad \mathbf{r}_i^\top \mathbf{M} \mathbf{r}_i \stackrel{!}{=} 1 \quad (3.39)$$

angenommen werden.

Dieses Ergebnis korrespondiert mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.3.2.2: für Systeme mit $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ und $\varrho = 0$ existieren stets reelle Eigenvektoren.

Gleichung (3.38) zeigt, dass Orthogonalität zweier Eigenvektoren $\mathbf{r}_{i/k}$ bezüglich der Massennorm \mathbf{M} für *symmetrische Systemmatrizen* (d.h. $\mathbf{N} = \mathbf{0}$) und unterschiedliche Eigenwerte stets erfüllt ist, da für $\lambda_i \neq \lambda_k$

$$(\lambda_k^2 - \lambda_i^2) \mathbf{r}_k^\top \mathbf{M} \mathbf{r}_i = 0 \quad (3.40)$$

gilt. Fallen beide Eigenwerte zusammen, so verschwindet $(\lambda_k^2 - \lambda_i^2)$ und über $\mathbf{r}_k^\top \mathbf{M} \mathbf{r}_i$ lassen sich keine weiteren Aussagen treffen. Im Allgemeinen lassen sich dann \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_k so wählen, dass Orthogonalität bezüglich \mathbf{M} gegeben ist.

Für *nichtsymmetrische Systemmatrizen* (also $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$), ist $\mathbf{r}_k^\top \mathbf{N} \mathbf{r}_i = 0$ nur dann erfüllt, wenn \mathbf{r}_k und \mathbf{r}_i kollineare Vektoren sind, oder wenn einer von ihnen Teil des Kerns von \mathbf{N} ist, also wenn $\mathbf{r}_{i,k} \in \ker\{\mathbf{N}\}$ ist. Somit gilt im Allgemeinen

$$i \neq k : \quad \mathbf{r}_k^\top \mathbf{M} \mathbf{r}_i = -2 \frac{\mathbf{r}_k^\top \mathbf{N} \mathbf{r}_i}{(\omega_i^2 - \omega_k^2)} \neq 0. \quad (3.41)$$

Fallen beide Eigenwerte zusammen, so folgt aus $(\lambda_i^2 - \lambda_k^2) \mathbf{r}_k^\top \mathbf{M} \mathbf{r}_i = -2\mathbf{r}_k^\top \mathbf{N} \mathbf{r}_i$ mit $\lambda_k = \lambda_i$, dass

$$0 = -2\mathbf{r}_k^\top \mathbf{N} \mathbf{r}_i \quad (3.42)$$

gelten muss. Für $\mathbf{r}_{i,k} \notin \ker\{\mathbf{N}\}$ ist dies nur erfüllt, wenn beide Vektoren zusammenfallen, also $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_i$ gilt.

Es lässt sich für Systeme ohne geschwindigkeitsproportionale Anteile Folgendes zusammenfassen:

- sind alle Systemmatrizen symmetrisch, d.h. $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top$ und $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^\top$ (und somit $\mathbf{N} = \mathbf{0}$), kann immer ein System von Eigenvektoren angegeben werden, die orthogonal bezüglich der Massenmatrix sind. Selbst im Fall mehrfacher Eigenwerte existiert ein vollständiger Satz von Eigenvektoren.
- ist die lageproportionale Matrix unsymmetrisch, d.h. ist $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$, sind die Eigenvektoren im Allgemeinen nicht mehr orthogonal bezüglich \mathbf{M} . Insbesondere können für zusammenfallende Eigenwerte auch die zugehörigen Eigenvektoren zusammenfallen. Dies bedeutet, dass die geometrische Vielfachheit nicht mehr der algebraischen entspricht.

Zeigt das System für $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ keine grenzstabilen Schwingungen mehr, d.h. ist $\rho \neq 0$, so sind die Eigenvektoren zwingend komplexwertig (siehe 3.3.2.2). Somit verliert die Definition der Orthogonalität mittels eines reellen Skalarproduktes ihre Brauchbarkeit.

Gleiches gilt für gyroskopische Systeme $\mathbf{P} = \mathbf{G} = -\mathbf{G}^\top$, die ebenfalls komplexe Eigenvektoren haben.

Einzig für den Sonderfall geschwindigkeitsproportionaler Terme, welche die Vertauschbarkeitsbedingung (3.25) erfüllen, lässt sich der Orthogonalitätsbegriff auf Basis eines reellen Skalarproduktes weiter verwenden, da dann reelle Eigenvektoren existieren.

Wie zuvor gezeigt, verliert die Vektorbasis der Rechtseigenvektoren ihre Orthogonalität, wenn die Systemmatrizen nicht mehr symmetrisch sind. In diesem allgemeinen Fall lässt sich jedoch ein Satz von Rechts- und Linkseigenvektoren angeben, sodass zwischen einem Links- und dem zugehörigen Rechtseigenvektor Orthogonalität im erweiterten Sinn vorliegt (siehe [82], [99]).

3.3.4 Parametereinfluss auf das Eigenwertspektrum

Mechanische Systeme hängen in der Regel von einer Vielzahl von Parametern, wie z.B. Form- oder Betriebsparameter, ab. Fasst man diese p Parameter in einem Parametervektor $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_p)^\top$ zusammen, so lautet nach der Algebraisierung das quadratische Rechtseigenwertproblem

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}\lambda + \mathbf{Q})\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{L}_0(\lambda)\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

mit dem Rechtseigenvektor \mathbf{r} und Systemmatrizen $\mathbf{M}(\mathbf{p})$, $\mathbf{P}(\mathbf{p})$ und $\mathbf{Q}(\mathbf{p})$, die glatt von \mathbf{p} abhängen sollen. Das zugehörige Linkseigenwertproblem ist dann

$$\ell^\top (\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{P}\lambda + \mathbf{Q}) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \ell^\top \mathbf{L}_0(\lambda) = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

mit dem Linkseigenvektor ℓ . Der Matrixoperator $\mathbf{L}_0(\lambda)$ repräsentiert hierbei die von λ abhängige Matrizenschar.

Der Eigenwert λ ist in beiden Fällen (3.43), (3.44) durch die Determinante

$$\det \mathbf{L}_0(\lambda) = \det \mathbf{L}_0(\lambda)^\top = 0$$

gegeben. Da eine skalare Gleichung durch Transposition nicht geändert wird, sind die Eigenwerte des Rechtseigenwertproblems und des zugehörigen Linkseigenwertproblems identisch.

In den meisten Fällen hat das charakteristische Polynom $\det \mathbf{L}_0 = 0$ einfache Nullstellen und die zugehörigen Eigenwerte werden als *einfach* bezeichnet. Zu jedem einfachen Eigenwert existiert genau ein Eigenvektor.

Hat das charakteristische Polynom eine k -fache Nullstelle, so treten k gleiche Eigenwerte auf und k bezeichnet man als die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes. Die Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren, die zu einem k -fachen Eigenwert gefunden werden kann, wird als geometrische Vielfachheit k_g bezeichnet. Allgemein gilt $1 \leq k_g \leq k$.

Wie in 3.3.2 gezeigt, haben mehrfache (k -fache) Eigenwerte von **M-K**-Systemen einen vollen Satz von Eigenvektoren (d.h. $k_g = k$). Auch für allgemeinere System kann dieser Fall auftreten. Entspricht die algebraische Vielfachheit der geometrischen, d.h. ist $k = k_g$ und $k > 1$, so spricht man von *halbeinfachen* Eigenwerten. Halbeinfache Eigenwerte treten in praktischen Problemen häufig dann auf, wenn Symmetrie in dem Sinne vorliegt, dass eine Struktur zwei Schwingungsformen mit ein- und derselben Frequenz aufweist (z.B. homogene Kreisplatte).

Existiert zu einem k -fachen Eigenwert nur ein Satz von $k_g < k$ Eigenvektoren, so wird dieser Eigenwert als *nicht-halbeinfach* bezeichnet. Für den Sonderfall, dass zu einem mehrfachen (k -fachen) Eigenwert nur ein einziger Eigenvektor existiert, spricht man von einem nicht-derogatorischen Eigenwert.

Sind für einen Parametersatz \mathbf{p} die Eigenwerte und Eigenvektoren bekannt, so ist es grundsätzlich von Interesse, wie sich die Systemeigenschaften bei Veränderung eines oder mehrerer Parameter verändern. Von besonderer Bedeutung sind hierbei natürlich die Eigenwerte, da ihr Realteil Auskunft über das Stabilitätsverhalten der zu untersuchenden Lösung des Systems gibt.

Der Einfluss der Systemparameter auf die Eigenwerte lässt sich beispielsweise durch Störungsrechnung ([20], [22]) oder Differentiation der Eigenwerte (z.B. [50], [62], [82], [88]) ermitteln.

Im Folgenden wird weitgehend dem Vorgehen in [82] gefolgt, da dieses direkt mit dem quadratischen Eigenwertproblem arbeitet. Ausgangspunkt ist dabei die Annahme, dass ein Eigenwert $\lambda(\mathbf{p})$ eine von \mathbf{p} abhängige analytische Funktion darstellt: man spricht hier auch vom Eigenpfad. Dementsprechend kann λ in der Nähe eines Entwicklungspunktes $\lambda_0 = \lambda(\mathbf{p}_0)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden. In der Regel sind hierfür Taylorreihen geeignet; ist \mathbf{p}_0 ein singulärer Punkt, ist stattdessen eine Newton-Puiseux-Reihe notwendig.

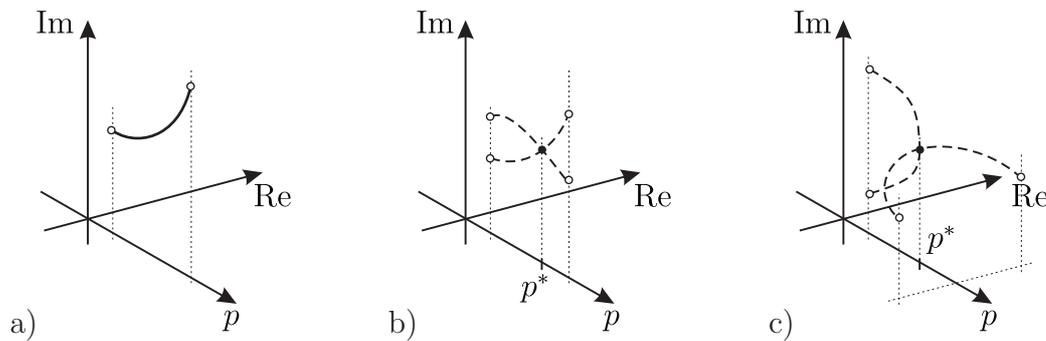


Abbildung 3.8: Arten von Eigenwerten, die bei Änderung eines Systemparameters auftreten können:

a) Einfacher Eigenwert ($k = 1$). b) Für $p \neq p^*$ liegen zwei einfache Eigenwerte vor, bei $p = p^*$ liegt ein halbeinfacher Eigenwert vor. Die Eigenpfade sind beim Durchschreiten von p^* glatt. c) Für $p \neq p^*$ liegen zwei einfache Eigenwerte vor, bei $p = p^*$ liegt ein nicht-derogatorischer Eigenwert vor. Die Eigenpfade sind beim Durchschreiten von p^* stetig, jedoch nicht glatt.

Grundsätzlich lassen sich die Linkseigenvektoren aus dem transponierten Eigenwertproblem (3.44) ermitteln. Beide Eigenvektorsätze lassen sich so normieren, dass mit dem Operator $\mathbf{L}_1 = \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{L}_0 = 2\lambda \mathbf{M} + \mathbf{P}$ die Orthogonalitätsbeziehung

$$\boldsymbol{\ell}_i^\top \mathbf{L}_1 \mathbf{r}_k = \boldsymbol{\ell}_i^\top (2\lambda \mathbf{M} + \mathbf{P}) \mathbf{r}_k = \delta_{ik} \quad (3.45)$$

mit dem Kronecker-Delta δ_{ik} gilt. Fasst man die Rechts- und Linkseigenvektoren zu Matrizen

$$\mathbf{R}_0 = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad , \quad \mathbf{R}_1 = (\lambda_1 \mathbf{r}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{r}_n) \quad , \quad \mathbf{L} = (\boldsymbol{\ell}_1, \dots, \boldsymbol{\ell}_n)$$

zusammen, lässt sich die Orthogonalitätsbeziehung (3.45) kompakt schreiben als

$$\mathbf{L}^\top (2\mathbf{M}\mathbf{R}_1 + \mathbf{P}\mathbf{R}_0) = \mathbf{I} \quad \text{und damit} \quad \mathbf{L} = [(2\mathbf{M}\mathbf{R}_1 + \mathbf{P}\mathbf{R}_0)^{-1}]^\top . \quad (3.46)$$

Sind die (einfachen) Eigenwerte sowie die Rechtseigenvektoren bekannt, lässt sich also der Satz von Linkseigenvektoren ohne erneutes Lösen eines Eigenwertproblems ermitteln.

3.3.4.1 Einfache Eigenwerte

Ist $\lambda_0 = \lambda(\mathbf{p}_0)$ ein einfacher Eigenwert, so lässt sich in einer kleinen Umgebung der Eigenpfad $\lambda(\mathbf{p})$ für kleine Änderungen $\Delta\mathbf{p} = \varepsilon\Delta\bar{\mathbf{p}}$ als Taylor-Reihe schreiben :

$$\lambda(\mathbf{p}) = \lambda(\mathbf{p}_0 + \varepsilon\Delta\bar{\mathbf{p}}) = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \sum_i^p \left. \frac{\partial\lambda}{\partial p_i} \right|_0 \Delta\bar{p}_i + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad , \quad \varepsilon \ll 1.$$

Differentiation von (3.43) nach einem Parameter p_i aus \mathbf{p} führt nach etwas Rechnung unter Verwendung von (3.44) auf

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_i} = -\frac{1}{\ell^\top(2\lambda\mathbf{M} + \mathbf{P})\mathbf{r}} \ell^\top \left(\lambda^2 \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial p_i} + \lambda \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial p_i} + \frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial p_i} \right) \mathbf{r}. \quad (3.47)$$

Sind für einen Parameterzustand \mathbf{p}_0 ein (einfacher) Eigenwert λ_0 sowie die zugehörigen Rechts- und Linkseigenvektoren bekannt, so lässt sich die Änderung des Eigenwertes infolge kleiner Parameteränderungen $\Delta p_i = \varepsilon\Delta\bar{p}_i$ durch

$$\Delta\lambda_i \approx \varepsilon \left. \frac{\partial\lambda}{\partial p_i} \right|_0 \Delta\bar{p}_i = \left. \frac{\partial\lambda}{\partial p_i} \right|_0 \Delta p_i \quad (3.48)$$

annähern.

3.3.4.2 Halbeinfache Eigenwerte

Halbeinfache Eigenwerte lassen sich in ganz ähnlicher Weise als Taylor-Reihe darstellen, deren Koeffizienten dank der linearen Unabhängigkeit recht problemlos ermittelt werden können [82]. Halbeinfache Eigenwerte zeichnen sich dadurch aus, dass die zu k_g Eigenvektoren gehörenden $k = k_g$ Eigenwerte gleich sind. Bei Änderung eines Systemsparameters p_i wird diese Identität jedoch verschwinden: jede Eigenrichtung wird also ihre Dynamik unterschiedlich von den anderen entwickeln. Der k -fache Eigenwert λ_0 spaltet sich demnach in k unterschiedliche Eigenwerte

$$\lambda_m = \lambda_0 + \varepsilon\Delta\lambda_m + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad , \quad m = 1, \dots, k$$

auf.

Sind \mathbf{r}_j und ℓ_i linear unabhängige Rechts- bzw. Linkseigenvektoren zu einem halbeinfachen Eigenwert λ_0 , so lässt sich eine $k \times k$ -Matrix \mathbf{F} mit den Einträgen

$$f_{ij} = \sum_{h=1}^p \left[\ell_i^\top \left(\lambda_0^2 \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial p_h} + \lambda_0 \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial p_h} + \frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial p_h} \right) \mathbf{r}_j \right] \Delta p_h$$

aufbauen, deren k Eigenwerte die Eigenwert-Störungen $\Delta\lambda_m$ darstellen.

3.3.4.3 Nicht-derogatorische Eigenwerte

Abschließend soll der für die weiteren Untersuchungen bedeutsame Fall eines mehrfachen Eigenwertes λ_0 mit nur einem zugehörigen Eigenvektor \mathbf{r}_0 untersucht werden.

3.3.4.3.1 Keldysh-Kette Um das Verhalten der Eigenwerte in der Nähe des Verschmelzungspunktes beschreiben zu können, ist ein vollständiger Satz von Vektoren notwendig, die den Lösungsraum aufspannen. Da nur ein Eigenvektor vorliegt, müssen die übrigen Vektoren geeignet konstruiert werden. Üblicherweise nimmt man hierzu eine Umformulierung des Systems zweiter Ordnung auf eines erster Ordnung vor, um danach eine Jordan-Kette von Hauptvektoren aufbauen zu können. Mit

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \lambda \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad \text{und den Blockmatrizen} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

lässt sich (3.43) zu einem linearen Eigenwertproblem $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{r}} = \lambda\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{r}}$ umformulieren. Die zugehörige Jordan-Kette für einen k -fachen Eigenwert λ_0 und den zugehörigen Eigenvektor \mathbf{r}_0 besteht aus den Hauptvektoren

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i \\ \lambda_0 \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i-1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Obwohl der Übergang von (3.43) auf ein lineares Eigenwertproblem stets möglich ist, ist es wünschenswert, direkt vom quadratischen Eigenwertproblem ausgehend arbeiten zu können. Insbesondere sind ja eigentlich dessen Eigen- und Hauptvektoren \mathbf{r} von Interesse. Man findet, dass die in den Hauptvektoren der Jordan-Kette enthaltenen Vektoren \mathbf{r}_i die sogenannte Keldysh-Kette

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 \mathbf{r}_0 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{L}_0 \mathbf{r}_1 &= -\mathbf{L}_1 \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{L}_0 \mathbf{r}_2 &= -\mathbf{L}_1 \mathbf{r}_1 - \mathbf{L}_2 \mathbf{r}_0, \\ &\vdots \\ \mathbf{L}_0 \mathbf{r}_{k-1} &= -\mathbf{L}_1 \mathbf{r}_{k-2} - \mathbf{L}_2 \mathbf{r}_{k-3} \end{aligned} \tag{3.49}$$

erfüllen. Hierbei sind für \mathbf{L}_0 die Matrixoperatoren \mathbf{L}_q definiert als $\mathbf{L}_q = \frac{\partial^q \mathbf{L}_0}{\partial \lambda^q}$. Für das quadratische Eigenwertproblem (3.43) gilt

$$\mathbf{L}_0 = \lambda_0^2 \mathbf{M}_0 + \lambda_0 \mathbf{P}_0 + \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{L}_1 = 2\lambda_0 \mathbf{M}_0 + \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{L}_2 = \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{L}_3 = \mathbf{0} \quad \text{usw.}$$

Auf ähnliche Weise lässt sich auch eine Keldysh-Kette von Linksvektoren aufbauen. Für das allgemeine lineare Linkseigenwertproblem $\tilde{\mathbf{A}}^\top \tilde{\boldsymbol{\ell}} = \lambda \tilde{\mathbf{B}}^\top \tilde{\boldsymbol{\ell}}$ gilt

$$\tilde{\boldsymbol{\ell}}_0 = \begin{pmatrix} (\lambda_0 \mathbf{M}_0^\top + \mathbf{B}_0^\top) \boldsymbol{\ell}_0 \\ \boldsymbol{\ell}_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\ell}}_i = \begin{pmatrix} (\lambda_0 \mathbf{M}_0^\top + \mathbf{B}_0^\top) \boldsymbol{\ell}_i + \mathbf{M}_0^\top \boldsymbol{\ell}_{i-1} \\ \boldsymbol{\ell}_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, k-1$$

mit den Linksvektoren \mathbf{v} des quadratischen Eigenwertproblems (3.44), die die Keldysh-Kette

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{L}_0 &= \mathbf{0}, \\
\boldsymbol{\ell}_1^\top \mathbf{L}_0 &= -\boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{L}_1, \\
\boldsymbol{\ell}_2^\top \mathbf{L}_0 &= -\boldsymbol{\ell}_1^\top \mathbf{L}_1 - \boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{L}_2, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\ell}_{k-1}^\top \mathbf{L}_0 &= -\boldsymbol{\ell}_{k-2}^\top \mathbf{L}_1 - \boldsymbol{\ell}_{k-3}^\top \mathbf{L}_2
\end{aligned} \tag{3.50}$$

erfüllen. Aus den Orthogonalitätseigenschaften zwischen den Links- und Rechtseigenvektoren des verallgemeinerten linearen Eigenwertproblems folgen die Orthogonalitäts- und Normierungseigenschaften der Links- und Rechtsvektoren der Keldysh-Kette. Es gilt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{L}_1 \mathbf{r}_0 &= 0, \\
\boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{L}_1 \mathbf{r}_{k-1} + \mathbf{r}_0^\top \mathbf{L}_2 \mathbf{r}_{k-2} &= 1,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\boldsymbol{\ell}_i^\top \mathbf{L}_1 \mathbf{r}_{k-1} + \boldsymbol{\ell}_i^\top \mathbf{L}_2 \mathbf{r}_{k-2} = -\boldsymbol{\ell}_{i-1}^\top \mathbf{L}_2 \mathbf{r}_{k-1} \quad , \quad i = 1, \dots, k-1. \tag{3.52}$$

Durch die Verwendung der Keldysh-Ketten ist es also möglich, direkt ausgehend von den Eigenvektoren des quadratischen Eigenwertproblems und ohne Überführung in ein lineares Eigenwertproblem, die fehlenden Vektoren zu konstruieren. Zudem gelten auch zwischen diesen Vektoren (verallgemeinerte) Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen.

Speziell für den häufig auftretenden Sonderfall eines doppelten Eigenwertes λ_0 ($k = 2$) muss zum Eigenvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ nur ein weiterer Vektor ermittelt werden: die entsprechenden Keldysh-Ketten lauten

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_0 \mathbf{r}_0 &= \mathbf{0}, & \text{und} & & \boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{L}_0 &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{L}_0 \mathbf{r}_1 &= -\mathbf{L}_1 \mathbf{r}_0 & & & \boldsymbol{\ell}_1^\top \mathbf{L}_0 &= -\boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{L}_1
\end{aligned}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{L}_1 \mathbf{r}_0 &= 0, \\
\boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{L}_1 \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{L}_2 \mathbf{r}_0 &= 1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\ell}_1^\top \mathbf{L}_1 \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{\ell}_1^\top \mathbf{L}_2 \mathbf{r}_0 = -\boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{L}_2 \mathbf{r}_1.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

3.3.4.3.2 Entwicklung des Eigenwertes Liegen in einem Eigenwertproblem nur einfache und halbeinfache Eigenwerte vor, so existiert stets ein vollständiger Satz von Eigenvektoren. Tritt nun für den Parametersatz $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ ein nicht-halbeinfacher Eigenwert auf, so ändert das System an dieser Stelle abrupt seinen Charakter. Es liegt ein singulärer Punkt vor, in dessen Umgebung der Eigenpfad $\lambda(\mathbf{p})$ nicht durch eine Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt λ_0 dargestellt werden kann. Vielmehr ist eine verallgemeinerte Potenzreihe notwendig.

Ist k die algebraische Vielfachheit des mehrfachen Eigenwertes λ_0 , so lässt sich eine sogenannte Newton-Puiseux-Entwicklung von λ bei Änderung eines Parameters p_i um $\Delta p_i = \varepsilon \Delta \bar{p}_i$ in der Form

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_m^{\infty} (\varepsilon \Delta p_i)^{m/k} f_m \quad , \quad \varepsilon \ll 1 \quad (3.54)$$

angeben. Eine erste Näherung ($m = 1$) für die Änderung $\Delta \mathbf{p} = \varepsilon \Delta \bar{\mathbf{p}}$ des Parametervektors lautet damit

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_i^p (\varepsilon \Delta \bar{p}_i)^{1/k} f_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/k}) \quad (3.55)$$

$$= \lambda_0 + \varepsilon^{1/k} \lambda_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/k}) \quad , \quad \varepsilon \ll 1. \quad (3.56)$$

Durch Einsetzen dieses Reihenansatzes findet man unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaften für den k -fachen Eigenwert λ_0 die k Korrekturterme

$$\lambda_1^{(a)} = \sqrt[k]{-\sum_i^p \left(\boldsymbol{\ell}_0^\top \left[\lambda_0^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_i} + \lambda_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial p_i} \right] \mathbf{r}_0 \right) \Delta \bar{p}_i} \quad , \quad a = 1, \dots, k, \quad (3.57)$$

welche die k von λ_0 ausgehenden Eigenpfade beschreiben.

Hierbei sind $\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\ell}_0$ die gemäß (3.45) normierten Rechts- bzw. Linkseigenvektoren.

Bei der Berechnung der Wurzel $\sqrt[k]{R}$ ist zu beachten, dass der Radikand in der Regel eine komplexe Zahl ist. Es gilt also

$$\sqrt[2]{R} : \quad \lambda_1^{(1)} = \sqrt[2]{|R|} e^{j\frac{\varphi}{2}} \quad , \quad \lambda_1^{(2)} = \sqrt[2]{|R|} e^{j\frac{\varphi}{2} + \pi} \quad (3.58)$$

$$\sqrt[3]{R} : \quad \lambda_1^{(1)} = \sqrt[3]{|R|} e^{j\frac{\varphi}{3}} \quad , \quad \lambda_1^{(2)} = \sqrt[3]{|R|} e^{j\frac{\varphi}{3} + \frac{1}{3}\pi} \quad , \quad \lambda_1^{(3)} = \sqrt[3]{|R|} e^{j\frac{\varphi}{3} + \frac{2}{3}\pi} \quad (3.59)$$

usw.

3.4 Instabilitätsszenarien

Im Folgenden sollen unter Verwendung der Erkenntnisse der vorangegangenen Kapitel grundsätzliche Überlegungen hinsichtlich der Stabilität mechanischer Systeme mit Reibungseinflüssen angestellt werden. Als Ausgangspunkt dient dabei ein möglichst einfaches, ungedämpftes elastisches System. Hierauf aufbauend soll sukzessive der Einfluss verschiedener zusätzlicher Einflüsse beleuchtet werden.

Hinsichtlich der zu erwartenden Eigenschaften der Eigenvektoren werden zunächst Systeme ohne, danach solche mit geschwindigkeitsproportionalen Einflüssen behandelt.

3.4.1 Systeme ohne geschwindigkeitsproportionale Einflüsse

Zeitinvariante ungedämpfte elastische Systeme ohne Einfluss einer Führungsbewegung und ohne zeitlich von außen vorgegebene Parameterschwankungen weisen nach einer Linearisierung Störungsgleichungen auf, welche die Form

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.60)$$

mit konstanten Matrizen $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}^\top$ haben. Im Folgenden wird dabei stets eine positiv-definite Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K} > 0$ unterstellt, sodass Instabilität durch Divergenz ausgeschlossen ist. Die Massenmatrix ist schon aus physikalischen Gründen positiv definit. Der Ansatz $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{r}e^{\lambda t}$ führt auf das zugehörige Eigenwertproblem

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K}] \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (3.61)$$

dessen Eigenwerte λ stets in konjugiert komplexen Paaren λ^+ , λ^- auftreten, die sich mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten und $k = \mathbf{r}'\mathbf{K}\mathbf{r}$, $m = \mathbf{r}'\mathbf{M}\mathbf{r}$ als

$$\lambda^\pm = \pm \sqrt{-\frac{\mathbf{r}'\mathbf{K}\mathbf{r}}{\mathbf{r}'\mathbf{M}\mathbf{r}}} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} \quad (3.62)$$

ausdrücken lassen. Dabei ist \mathbf{r} der zu λ^2 gehörende Eigenvektor. Wegen $\mathbf{M} > 0$, $\mathbf{K} > 0$ sind alle Eigenwerte rein imaginär, d.h. $\text{Re}\{\lambda\} = 0$. Die Eigenwerte der Störungsgleichung liegen somit allesamt auf der imaginären Achse und die Ruhelage des Systems ist *grenzstabil*. Die Stabilität der untersuchten Lösung eines zugrundeliegenden nichtlinearen Systems kann in diesem Fall nicht anhand von (3.60) beurteilt werden und man bezeichnet dies auch als *kritischen Fall*.

3.4.1.1 Parametereinfluss ohne Reibungskräfte

Vorbereitend für weitere Überlegungen soll kurz der Einfluss von Systemparametern auf das *reibungsfree* System diskutiert werden. Hierzu wird das System der Form

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(p)\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.63)$$

mit $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top > 0$ und $\mathbf{K} = \mathbf{K}^\top$ betrachtet. Da $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ ist, sind die Eigenvektoren des Systems nach Gleichung (3.38) für unterschiedliche Eigenwerte $\lambda_{i/u} = j\omega_{i/u}$ immer orthogonal bezüglich der Steifigkeitsmatrix gemäß

$$(\omega_u^2 - \omega_i^2) \mathbf{r}_u^\top \mathbf{M} \mathbf{r}_i = 0, \quad (\omega_i \neq \omega_u). \quad (3.64)$$

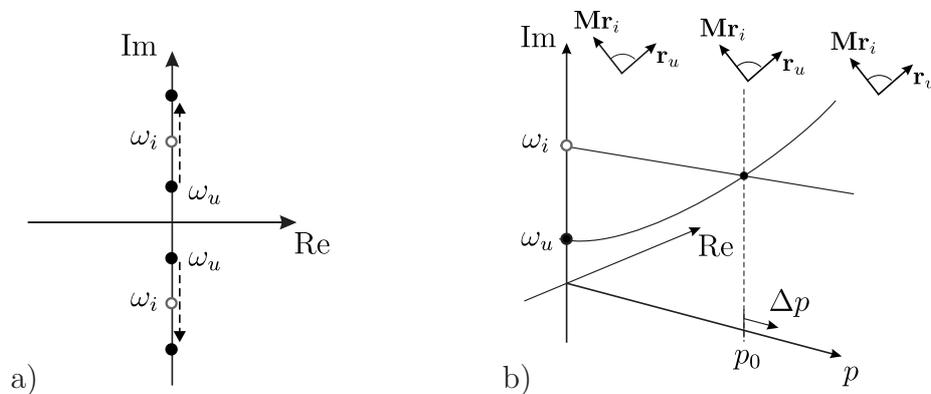
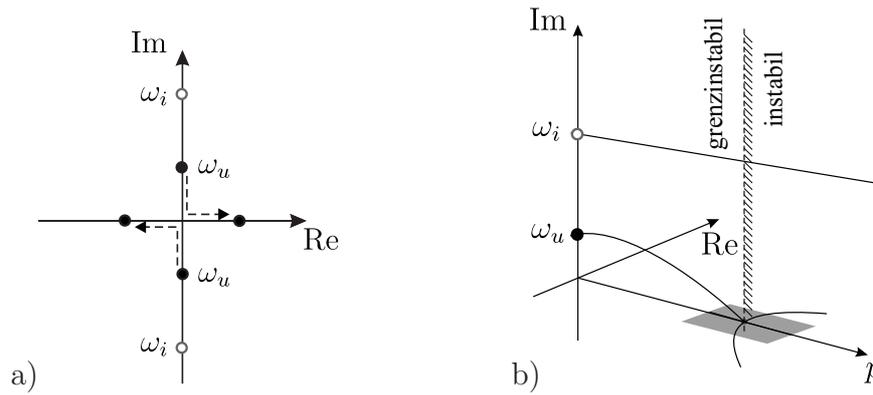


Abbildung 3.9: Halbeinfacher Eigenwert in einem \mathbf{M} - \mathbf{K} -System (bei $p = p_0$):

a) Eigenwerte. b) Real- und Imaginärteil in Abhängigkeit von einem Parameter p : die Orthogonalität der Rechtseigenvektoren bleibt erhalten.

Infolge einer Änderung des Parameters p kann es nun vorkommen, dass für einen kritischen Parameter p_0 zwei Eigenkreisfrequenzen zusammenfallen. Es lässt sich jedoch auch für diesen Fall ein Satz (massen-)orthogonaler reeller Eigenvektoren angeben, sodass die geometrische Vielfachheit der algebraischen entspricht und ein halbeinfacher Eigenwert vorliegt. Das Verhalten beim Durchschreiten des kritischen Parameterwertes kann mittels einer (regulären) Störungsrechnung untersucht werden (siehe 3.3.4.2). Es erschließt sich jedoch auch schon aus der Feststellung, dass in jedem Fall (massen-)orthogonale reelle Eigenvektoren vorliegen und somit aus dem Rayleigh-Quotienten (3.62) folgt, dass für $\mathbf{K} > 0$ alle Eigenwerte auf der imaginären Achse liegen müssen. Das Verhalten der Eigenwerte ist in Abbildung 3.9 skizziert.

Halbeinfache Eigenwerte treten in der Praxis beispielsweise bei der modalen Beschreibung elastischer Objekte auf, die Symmetrien aufweisen, d.h. ein und dieselbe Eigenkreisfrequenz in unterschiedlichen Eigenschwingungsformen zeigen können. Beispiele hierfür sind Platten quadratischer Grundfläche oder Kreisplatten.

Abbildung 3.10: Divergenz bei einem **M-K**-System:

a) Eigenwerte. b) Verhalten von Real- und Imaginärteil für Instabilität durch Divergenz.

Daneben kann durch Änderung des Parameters auch die Steifigkeitsmatrix **K** ihre Definitheit verlieren. In diesem Fall ist $\mathbf{K} > 0$ nicht mehr länger gegeben: wie aus Gleichung (3.62) ersichtlich, können dann rein reelle Eigenwerte mit unterschiedlichem Vorzeichen auftreten, die unweigerlich Instabilität der Ruhelage zur Folge haben (siehe Abbildung 3.10). Man spricht hier von Instabilität durch *Divergenz*.

Treten in solchen Systemen zusätzlich Kontakte auf, sind die Bewegungsgleichungen entsprechend zu erweitern. Dies wird im Folgenden näher untersucht.

3.4.1.2 Lageabhängige Reibungskräfte

Werden bei der Aufstellung des mathematischen Modells die geschwindigkeitsproportionalen Beiträge aus der Führungsbewegung, Materialdämpfung und der Reibungslinearisierung vernachlässigt, so liefert die Linearisierung um eine stationäre Lösung Störungsgleichungen der Form

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{Q}_R) \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.65)$$

Die konkrete Ausprägung der nichtsymmetrischen Matrix \mathbf{Q}_R hängt dabei u.a. von der gewählten Kontaktformulierung ab (siehe Kapitel 2.3.2). Wird die Stärke des Gleitreibungseinflusses durch den skalaren Parameter p beschrieben, so folgt eine Darstellung der Form $\mathbf{Q}_R = p\bar{\mathbf{Q}}$. Im in Kapitel 4 vorgestellten Modell zur Untersuchung des Bremsenquietschens beinhaltet dieser Parameter den Gleitreibungskoeffizienten μ , die Steifigkeit der Bremsbeläge und die Dicke der Brems Scheibe ($p = \mu c_p h$).

Nach Zerlegung von \mathbf{Q}_R in einen symmetrischen und einen schief-symmetrischen Anteil erhält man zunächst

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + p\bar{\mathbf{K}}_R + p\bar{\mathbf{N}}) \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.66)$$

und schließlich

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_{eff} + p\bar{\mathbf{N}}) \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.67)$$

Dabei ist $\mathbf{K}_{eff} = \mathbf{K}_{eff}(p)$ prinzipiell von p abhängig, doch stellt sich diese Abhängigkeit des symmetrischen Anteils in vielen Fällen als derart schwach heraus, dass sie vernachlässigt werden kann. Divergenz-Instabilität durch die Reibungseinflüsse soll im Folgenden daher nicht näher betrachtet werden.

Nach Einführung des Ansatzes $\Delta\mathbf{q} = \mathbf{r}e^{\lambda t}$ ergibt sich das Eigenwertproblem

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + (\mathbf{K}_{eff} + p\bar{\mathbf{N}})] \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (3.68)$$

Linksmultiplikation mit dem konjugiert-komplexen Eigenvektor $\bar{\mathbf{r}}' = \bar{\mathbf{r}}'^\top$ ergibt dann mit den Abkürzungen $k_{eff} = \bar{\mathbf{r}}' \mathbf{K}_{eff} \mathbf{r}$ und $j n = p \bar{\mathbf{r}}' \bar{\mathbf{N}} \mathbf{r}$ und der Normierung $m = \bar{\mathbf{r}}' \mathbf{M} \mathbf{r} \stackrel{!}{=} 1$ die skalare Eigenwertgleichung

$$\lambda^2 + (k_{eff} + j n) = 0, \quad (3.69)$$

deren Lösungen

$$\lambda^\pm = \pm \sqrt{-k_{eff} - j n} \quad (3.70)$$

sind. Wie in Abschnitt 3.3.3 dargestellt, hängt der Wert von n davon ab, ob reelle Eigenvektoren existieren oder nicht. Ausgehend von einem grenzstabilen \mathbf{M} - \mathbf{K} -System soll dies im Folgenden schrittweise erörtert werden.

Für $p = 0$ verschwindet $\mathbf{N} = p\bar{\mathbf{N}}$ und es liegt ein konservatives schwingungsfähiges System mit symmetrischen Systemmatrizen vor. Die Eigenwerte $\lambda = j\omega$ liegen auf der imaginären Achse und die reellen Eigenvektoren \mathbf{r} des Systems sind gemäß Gleichung (3.38) orthogonal bezüglich \mathbf{M} . Die Ruhelage dieses Systems ist grenzstabil.

Wird p verändert, so verlieren die Eigenvektoren ihre Massenorthogonalität, da mit Gleichung (3.38) nun

$$(\omega_u^2 - \omega_i^2) \bar{\mathbf{r}}_u^\top \mathbf{M} \mathbf{r}_i = -2\bar{\mathbf{r}}_u^\top [p\bar{\mathbf{N}}] \mathbf{r}_i \neq 0 \quad (\omega_u \neq \omega_i) \quad (3.71)$$

gilt. Bezüglich einzelner Vektoren $\tilde{\mathbf{r}}$ aus dem Nullraum von \mathbf{N} kann wegen $\mathbf{N}\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ zwar noch Massenorthogonalität vorliegen, doch gilt dies für $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$ nicht für alle Eigenvektoren. Nimmt infolge weiterer Erhöhung von p der Einfluss der zirkulatorischen Matrix $\mathbf{N} = p\bar{\mathbf{N}}$ weiter zu, so wächst im Allgemeinen auch das Skalarprodukt (zumindest) zweier Vektoren $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_i$ bezüglich \mathbf{M} und diese Vektoren nähern sich einander an.

Bei einem kritischen Parameterwert p_{crit} fallen diese zwei Eigenvektoren zu \mathbf{r}_{ui} zusammen, woraus sich mit den zugehörigen Rayleigh-Quotienten auch zwingend ein doppelter Eigenwert $\lambda_{ui} = \pm j\omega_{ui}$ ergibt, d.h.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{r}_i & \searrow & \\ \mathbf{r}_u & \nearrow & \mathbf{r}_{ui} \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{ccc} \lambda_i^\pm = \pm j\omega_i & \searrow & \\ \lambda_u^\pm = \pm j\omega_u & \nearrow & \lambda_{ui}^\pm = \pm j\omega_{ui}. \end{array} \quad (3.72)$$

Im Folgenden werden nur die Wurzeln λ^+ mit positivem Imaginärteil angegeben, für die konjugiert-komplexen Pendanten λ^- gilt aufgrund der stets gegebenen Symmetrie bezüglich der reellen Achse Analoges (siehe 3.3.2).

Die Eigenwertkurven $\lambda_u^+(p)$ und $\lambda_i^+(p)$ haben an dieser Stelle einen gemeinsamen singulären Punkt. Um das Verhalten der Eigenwerte in der Umgebung dieses singulären Punktes für kleine Parameteränderungen $p = p_{crit} + \varepsilon\Delta p$ zu untersuchen, ist eine Newton-Puiseux-Entwicklung in ε durchzuführen (siehe Abschnitt 3.3.4.3). Für einen doppelten Eigenwert λ_{ui}^+ (Vielfachheit $k = 2$) mit nur einem Eigenvektor \mathbf{r}_{ui} (geometrische Vielfachheit $k_g = 1$) lassen sich für kleine Parameteränderungen $p = p_{crit} + \varepsilon\Delta\bar{p}$ die beiden Eigenwertkurven in erster Näherung durch

$$\lambda_u^+ \approx +j\omega_{ui} + \varepsilon^{1/2}\lambda_1^{(1)}, \quad \lambda_i^+ \approx +j\omega_{ui} + \varepsilon^{1/2}\lambda_1^{(2)} \quad (3.73)$$

beschreiben. Mit Gleichung (3.57) folgt für die beiden Werte

$$\begin{aligned} \lambda_{u/i}^+ &= +j\omega_{ui} \pm \varepsilon^{1/2} \sqrt{-\boldsymbol{\ell}_{ui}^\top \bar{\mathbf{N}} \mathbf{r}_{ui} \Delta\bar{p}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/2}) \\ &= +j\omega_{ui} \pm \sqrt{-\boldsymbol{\ell}_{ui}^\top \bar{\mathbf{N}} \mathbf{r}_{ui} \Delta p} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/2}). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Hierbei stellt $\boldsymbol{\ell}_{ui}$ den zu \mathbf{r}_{ui} gehörenden Linkseigenvektor des quadratischen Eigenwertproblems (3.43) dar, der die Normierung (3.45) erfüllt. Da für $p = p_{crit}$ der Realteil $\varrho = 0$ ist, sind die Eigenvektoren im kritischen Punkt noch rein reell darstellbar, d.h. $\boldsymbol{\ell}_{ui}, \mathbf{r}_{ui} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (siehe Kapitel 3.3.2).

Da für $p < p_{crit}$ ($\Delta p < 0$) zwei imaginäre Eigenwerte vorliegen, muss $\boldsymbol{\ell}^\top \bar{\mathbf{N}} \mathbf{r} = -C < 0$ sein. Es lassen sich damit zwei Möglichkeiten unterscheiden:

$$\Delta p < 0 : \quad \lambda_{u/i}^+ = j\omega_0 \pm j\sqrt{C|\Delta p|} \quad \rightarrow \quad \operatorname{Re}\{\lambda\} = 0, \quad (3.75)$$

$$\Delta p > 0 : \quad \lambda_{u/i}^+ = j\omega_0 \pm \sqrt{C\Delta p} \quad \rightarrow \quad \operatorname{Re}\{\lambda\} \neq 0. \quad (3.76)$$

Für $p < p_{crit}$ beschreibt (3.75) das Aufeinanderzulaufen der beiden rein imaginären Eigenwerte λ_u^+, λ_i^+ , die schließlich für $\Delta p = 0$ verschmelzen. Für $p > p_{crit}$ zeigt (3.76), dass sich wiederum zwei Eigenwertäste λ_u^+, λ_i^+ herausbilden, die den gleichen Imaginärteil aber entgegengesetzte Realteile aufweisen.

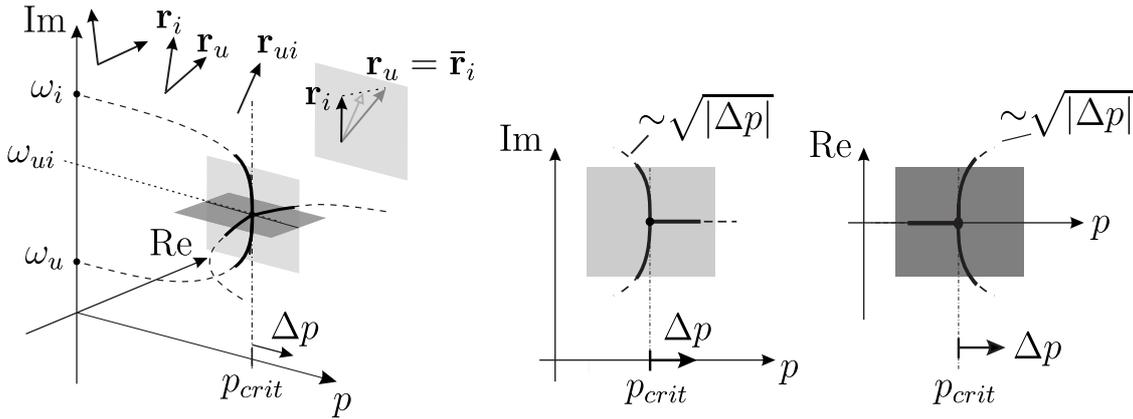


Abbildung 3.11: Flutter-Instabilität bei einem M-K-N-System: Zusammenlaufen zweier Eigenkreisfrequenzen, Verschmelzen (kritischer Parameterwert p_{crit}) und Entstehung reeller Anteile.

Wie in 3.3.2.2 dargestellt, folgt hieraus zudem, dass für $p \leq p_{crit}$ ein Satz rein reeller Eigenvektoren gefunden werden kann, während für $p > p_{crit}$ nur komplexwertige Eigenvektoren angegeben werden können. Damit folgt aus (3.70), dass für $p \leq p_{crit}$ $n = 0$ gilt, während für $p > p_{crit}$ i.a. $n \neq 0$ ist.

Die komplexen Wurzeln λ^\pm zu $\lambda^2 = -k - jn$ lassen sich dabei wie folgt illustrieren: die komplexe Zahl λ^2 ist als Zeiger $\lambda^2 = -k - jn = a \exp(j2\varphi)$ in der komplexen Zahlenebene darstellbar. Hiermit gilt dann für die Wurzel

$$\lambda^\pm = \pm \sqrt{a} \exp(j\varphi) \quad \text{mit } a = \sqrt{k^2 + n^2}, \quad 2\varphi = \arctan \frac{n}{k}. \quad (3.77)$$

Liegt λ^2 auf der negativen reellen Achse, so liegen die zugehörigen Wurzeln λ^+ , λ^- konjugiert komplex auf der imaginären Achse. Die Wurzeln eines allgemeinen komplexen λ^2 (d.h. für $\text{Im}\{\lambda^2\} \neq 0$) hingegen können nicht auf der imaginären Achse liegen und treten punktsymmetrisch zum Ursprung der komplexen Zahlenebene auf. Wie in 3.3.2.1 dargestellt, ist neben dem Eigenpaar (λ^2, \mathbf{r}) auch stets das konjugiert-komplexe $(\bar{\lambda}^2, \bar{\mathbf{r}})$ eine Lösung. Für λ^2 auf der reellen Achse ist dies automatisch erfüllt. Für eine allgemeines λ_u^2 jedoch, das abseits der reellen Achse in der komplexen Ebene liegt, muss ein λ_i^2 mit $\lambda_i^2 = \bar{\lambda}_u^2$ existieren. Aus dieser Symmetriebedingung folgt für die Rayleigh-Quotienten k und n zudem die Bedingung $k_u = k_i =: k_{ui}$ und $n_u = -n_i =: n_{ui}$. Wie in Abbildung 3.12 dargestellt, bilden die Wurzeln dieser beiden Paare dann einen "Stern" von Eigenwerten, aus dem – quasi überkreuz – mit Anteilen $e^{\lambda_u t}$ und $e^{\lambda_i t}$ wieder reelle Lösungen zusammengestellt werden können.

Das Verhalten beim Durchschreiten des kritischen Parameterwertes p_{crit} lässt sich also wie

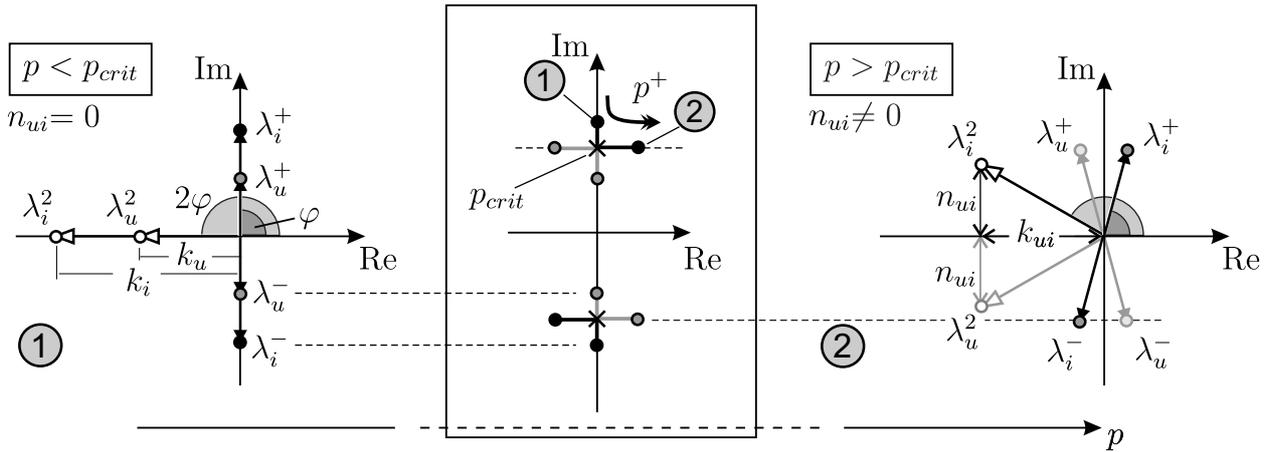


Abbildung 3.12: Verhalten der Eigenwerte eines **M-K-N**-Systems: (1) und (2) zeigen schematisch die Lage der Eigenwerte in der komplexen Ebene für ein unterkritisches ($p < p_{crit}$) sowie ein überkritisches System ($p > p_{crit}$). Dazwischen ist der Übergang zwischen beiden Konstellationen skizziert.

folgt zusammenfassen:

$$p < p_{crit} : \quad \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad \lambda_u^\pm = \pm j\sqrt{k_u} \quad , \quad \lambda_i^\pm = \pm j\sqrt{k_i} \quad (3.78)$$

$$p = p_{crit} : \quad \mathbf{r}_{ui} \in \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad \lambda_{ui}^\pm = \pm j\sqrt{k_{ui}} \quad (3.79)$$

$$p > p_{crit} : \quad \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_i \in \mathbb{C}^n \quad , \quad \rightarrow \quad \lambda_u^\pm = \pm\sqrt{k_{ui} + jn_{ui}} \quad , \quad \lambda_i = \pm\sqrt{k_{ui} - jn_{ui}} \quad (3.80)$$

$$\quad \quad \quad (\text{Im}\{\mathbf{r}\} \neq \mathbf{0}) \quad \quad \quad = \pm a e^{j\varphi} \quad \quad \quad = \mp a e^{-j\varphi}$$

$$\text{mit} \quad a = \sqrt{k_{ui}^2 + n_{ui}^2}$$

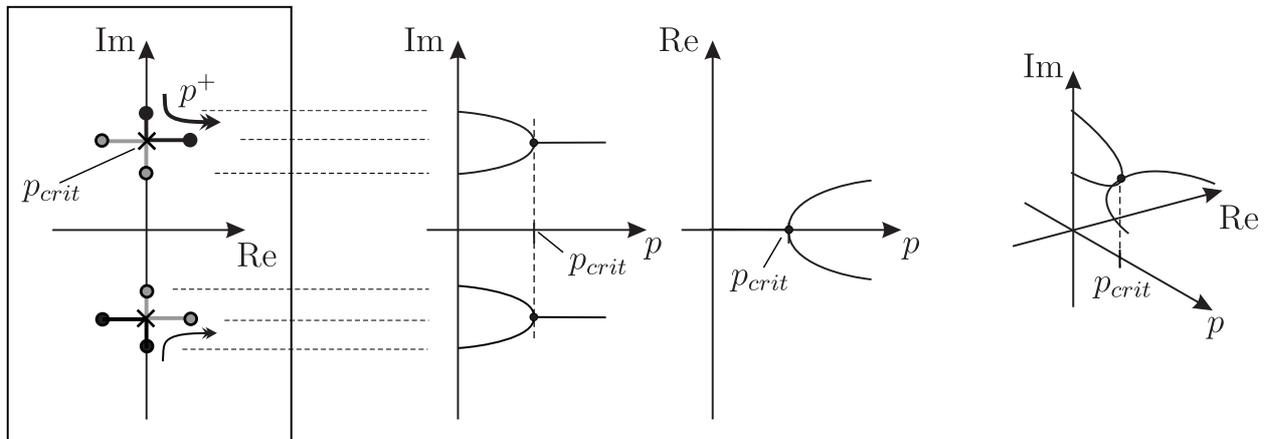


Abbildung 3.13: Übersicht über das Verhalten der Eigenwerte eines **M-K-N**-Systems in Abhängigkeit eines Parameters p .

Eine Besonderheit von Flutter-Instabilitäten besteht offenbar darin, dass ein einzelnes Eigenpaar nicht ausreicht, um dieses Instabilitätsszenario zu beschreiben. Vielmehr müssen mindestens zwei Eigenpaare eines Systems interagieren, um oszillatorische Instabilitäten zu bewirken. Folglich sind zur Modellierung von Flutter-Instabilitäten Schwingungssysteme mit mindestens zwei Freiheitsgraden notwendig.

3.4.2 System mit geschwindigkeitsabhängigen Einflüssen

Reale Systeme sind nicht nur lageproportionalen Kräften unterworfen, sondern werden auch durch geschwindigkeitsproportionale Kräfte beeinflusst.

Diese rühren aus Führungsbewegungen, innerer Dämpfung des Materials und der Linearisierung der Reibungseinflüsse her.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird im Hinblick auf die spätere Anwendung auf Schwingungen von Fahrzeugbremsen eine rotatorische *Führungsbewegung* angenommen, welche die materiellen und räumlichen Koordinaten gemäß

$$\begin{bmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ \Phi \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix} t \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{v}_T t \quad (3.81)$$

verknüpft. Offensichtlich ist lediglich die Winkelkoordinate φ von der Führungsbewegung beeinflusst, sodass in den Gleichungen (2.88)-(2.93) statt des vollständigen Gradienten lediglich partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ sowie die Winkelgeschwindigkeit Ω auftreten. Den Ausführungen in 2.3.1 folgend ergibt sich für den aus der Führungsbewegung herrührenden Beitrag schließlich $F_G = \Omega \mathbf{G} \Delta \dot{\mathbf{q}}$.

Wird die *Strukturdämpfung* als proportional zur Deformation und Bewegung der Masseteilchen der Kontinua angesetzt, so entstehen symmetrische Dämpfungsmatrizen \mathbf{D} , die sich als Linearkombination $\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ der Massen- und Steifigkeitsmatrizen darstellen lassen. Für nichtgyroskopische Systeme ohne zirkulatorische Kräfte wird solche Dämpfung als proportionale Dämpfung (auch Rayleigh-Dämpfung) bezeichnet und stellt eine Sonderform der modalen Dämpfung dar. Für allgemeinere Systeme mit gyroskopischen und zirkulatorischen Anteilen ist diese letztgenannte Eigenschaft jedoch nicht mehr gegeben. Der Beitrag der Strukturdämpfung lautet somit $F_D = \mathbf{D} \Delta \dot{\mathbf{q}}$ ($\mathbf{D} = \mathbf{D}^\top$). Die zirkulatorischen Beiträge aus der inneren Dämpfung werden vernachlässigt, d.h. $\mathbf{N}_{D,i} = \mathbf{0}$.

Wie in Kapitel 2.3.2 allgemein gezeigt wurde, liefert die *Linearisierung der Reibungskräfte* im Allgemeinen Anteile, die proportional zu den generalisierten Lagen und Geschwindigkeiten sind.

Die lageabhängigen Anteile wurden bereits zuvor behandelt und leisten den Beitrag

$$F_{R,0} = \mathbf{Q}_R \mathbf{q} = (\mathbf{K}_R + \mathbf{N}) \mathbf{q}.$$

Die Beiträge, die proportional zu den generalisierten Geschwindigkeiten sind, rühren aus der

- Geschwindigkeitsabhängigkeit des Gleitreibungskoeffizienten $\mu = \mu(v_{rel})$,
- Abhängigkeit der Kontaktnormalspannung von der Deformationsgeschwindigkeit,
- Linearisierung des Richtungsvektors \vec{e}_t

her und haben prinzipiell die Form

$$F_{R,1} = \mathbf{P}_R \Delta \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.82)$$

Die konkrete Ausprägung der Matrix \mathbf{P}_R hängt dabei von der gewählten Kontaktformulierung ab (siehe Kapitel 2.3.2). Es lässt sich jedoch feststellen, dass bei keiner der möglichen Formulierungen eindeutige Symmetrieeigenschaften gesichert sind. Im Allgemeinen wird man eine Zerlegung in symmetrische und schiefsymmetrische Anteile gemäß

$$\mathbf{P}_R \dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{D}_R + \mathbf{G}_R) \dot{\mathbf{q}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_R = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_R + \mathbf{P}_R^\top) \quad \text{und} \quad \mathbf{G}_R = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_R - \mathbf{P}_R^\top) \quad (3.83)$$

vornehmen.

Im Folgenden wird zwischen der aus der Strukturdämpfung stammenden Dämpfungsmatrix \mathbf{D} und der Dissipationsmatrix \mathbf{D}_{eff} unterschieden, welche die symmetrischen Anteile aller geschwindigkeitsproportionalen Beiträge enthält.

3.4.2.1 Nicht-zirkulatorische Systeme

Zunächst wird angenommen, dass die Reibungskraft keine Abhängigkeit von den generalisierten Lagekoordinaten aufweist und somit

$$\mathbf{Q}_R = \mathbf{0} \quad (3.84)$$

gilt. Ist jedoch beispielsweise der Gleitreibungskoeffizient μ abhängig von den generalisierten Geschwindigkeiten, so lässt sich \mathbf{P}_R meist als

$$\mathbf{P}_R = \eta_R \bar{\mathbf{P}}_R \quad \text{mit} \quad \eta_R = \frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}} \quad (3.85)$$

ausdrücken. Der Parameter η_R repräsentiert hierbei die Steigung der Reibkennlinie (also der Funktion $\mu = \mu(v_{rel})$) im Linearisierungspunkt (siehe Abbildung 3.14).

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass die Bewegung von Systemen von Kontinua, die

- einer Führungsbewegung unterworfen sind und Strukturdämpfung aufweisen und

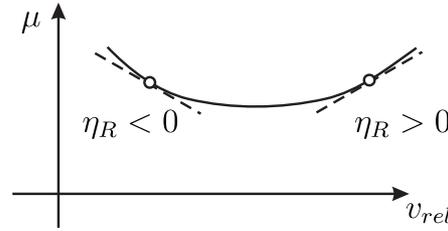


Abbildung 3.14: Beispiel für eine Reibkennlinie, die den Gleitreibungskoeffizienten μ in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit v_{rel} darstellt: η_R bezeichnet die lokale Steigung.

- zwischen denen reibungsbehaftete Kontakte auftreten, bei denen die Richtung der Tangentialspannungen und der Betrag der Normalspannungen zwar konstant ist, der
- Gleitreibungsbeiwert jedoch von der Relativgeschwindigkeit abhängt

durch Bewegungsgleichungen der Form

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + ([\mathbf{D} + \eta_R\bar{\mathbf{D}}_R] + [\Omega\mathbf{G} + \eta_R\bar{\mathbf{G}}_R])\Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (3.86)$$

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P}_{eff}(\eta, \Omega)\Delta\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.87)$$

beschrieben wird. Hierbei wurden die geschwindigkeitsproportionalen Anteile gemäß $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{G}}$ zerlegt.

Die lageproportionalen Kräfte rühren lediglich von der Struktur her und sind somit symmetrisch (d.h. $\mathbf{N} = \mathbf{0}$).

Der erweiterte Satz von Thomson-Tait-Chetayev [60] besagt, dass ein (grenz-)stabiles \mathbf{M} - \mathbf{K} -System ($\mathbf{K} = \mathbf{K}^\top$) durch Hinzufügen der geschwindigkeitsproportionalen Terme $\mathbf{P}_{eff}\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{D}_{eff} + \mathbf{G}_{eff})\Delta\dot{\mathbf{q}}$ nicht destabilisiert werden kann, wenn die zugehörige Dissipationsfunktion positiv definit ist, d.h. wenn $R = \dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{P}_{eff} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{D}_{eff} \dot{\mathbf{q}} \geq 0$ gilt.

Da die Massenmatrix \mathbf{M} aus physikalischen Gründen stets positiv definit ist ($\mathbf{M} > 0$), muss zur Sicherstellung der Stabilität des zugrundeliegenden ungedämpften, nichtgyroskopischen Systems lediglich positive Definitheit der Steifigkeitsmatrix ($\mathbf{K} > 0$) gefordert werden. Offensichtlich hängt dann die Stabilität nur noch von den Definitheitseigenschaften der symmetrischen Dissipationsmatrix \mathbf{D}_{eff} ab und ist unabhängig vom schief-symmetrischen Anteil \mathbf{G}_{eff} .

Ist die Dämpfung positiv definit oder zumindest durchdringend, so liegt sogar asymptotische Stabilität vor. Ob Dämpfung durchdringend ist, lässt sich entweder mit einem Beobachtbarkeitskriterium prüfen [60] oder aber mittels verallgemeinerter Rayleigh-Quotienten (s.u.).

Auf die Thematik der gyroskopischen Stabilisierung statisch instabiler Systeme soll hier nicht näher eingegangen werden, da diese für gedämpfte Systeme praktisch nicht möglich ist und

zudem bei der Untersuchung reibungsbehafteter Systeme keine Rolle spielt. Näheres hierzu findet sich beispielsweise in [33], [41], [60].

Das zu (3.86) gehörende quadratische Eigenwertproblem lautet

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + ([\mathbf{D} + \eta_R \bar{\mathbf{D}}_R] + [\Omega \mathbf{G} + \eta_R \bar{\mathbf{G}}_R]) \lambda + \mathbf{K}] \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (3.88)$$

Da die Matrix $\mathbf{P}_{eff}(\eta_R, \Omega)$ nur in ganz speziell gewählten (akademischen) Fällen so aufgebaut ist, dass die Vertauschungsrelation $(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}_{eff})(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) = (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}_{eff})$ gilt, sind die Eigenvektoren \mathbf{r} praktisch immer komplexwertig und nicht rein reell darstellbar, d.h. $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ (siehe 3.3.2.3).

Linksmultiplikation von (3.88) mit dem konjugiert komplexen Eigenvektor $\mathbf{r}' = \bar{\mathbf{r}}^\top$ und Beachtung der in 3.3.3 dargestellten Eigenschaften liefert die skalare Gleichung

$$m\lambda^2 + (d + \eta_R d_R + j[\Omega g + \eta_R g_R]) \lambda + k = 0 \quad (3.89)$$

mit den verallgemeinerten Rayleigh-Quotienten

$$m = \mathbf{r}' \mathbf{M} \mathbf{r} \quad , \quad d = \mathbf{r}' \mathbf{D} \mathbf{r} \quad , \quad d_R = \mathbf{r}' \mathbf{D}_R \mathbf{r} \quad , \quad k = \mathbf{r}' \mathbf{K} \mathbf{r} \quad (3.90)$$

$$jg = \mathbf{r}' \mathbf{G} \mathbf{r} \quad , \quad jg_R = \mathbf{r}' \mathbf{G}_R \mathbf{r}. \quad (3.91)$$

Hierbei gelten die Einschließungen (3.32)-(3.35), die eine Abschätzung der Werte anhand der Eigenwerte der jeweiligen Systemmatrizen erlauben. Im Folgenden sollen gemäß $m = \mathbf{r}' \mathbf{M} \mathbf{r} \stackrel{!}{=} 1$ massennormierte Eigenvektoren angenommen werden. Mit den Abkürzungen

$$d_{eff} = d + \eta_R d_R \quad , \quad g_{eff} = \Omega g + \eta_R g_R \quad (3.92)$$

lautet die komplexe Lösung der quadratischen Gleichung (3.89)

$$\lambda^\pm = -\frac{d_{eff} + jg_{eff}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{d_{eff}^2 - g_{eff}^2 - k + 2jd_{eff}g_{eff}}. \quad (3.93)$$

Interessant ist hier auch, dass – anders als bei der zuvor geschilderten Flatter-Instabilität – dieses System nicht durch Interaktion zweier Eigenpaare instabil wird, sondern bereits Schwingungssysteme mit nur einem Freiheitsgrad diese Instabilität aufweisen können.

Die graphische Interpretation der komplexen Wurzel lässt eine direkte Skizze der Lage der Eigenwerte in der komplexen Ebene zu (siehe Abbildung 3.15).

Man erkennt hier klar, dass der Realteil der Eigenwerte vollständig durch den Rayleigh-Quotienten $d_{eff} = d + \eta_R d_R$ bestimmt wird. Neben dieser graphischen Beurteilung lassen sich nach Aufspalten des Eigenwertes in Real- und Imaginärteil gemäß $\lambda = \varrho + j\omega$, Einsetzen in (3.89) und Trennen von Real- und Imaginärteil zwei Gleichungen für die Unbekannten ϱ und

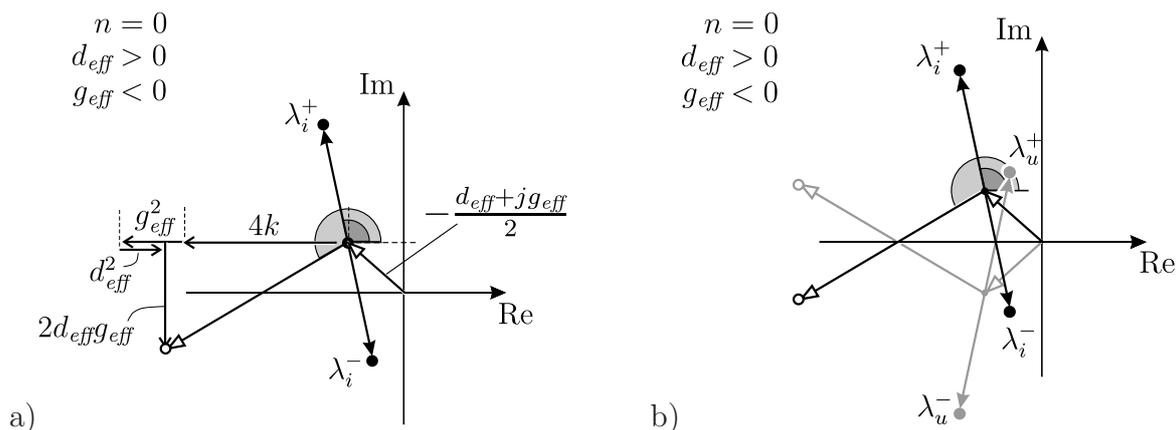


Abbildung 3.15: Eigenwerte für ein M-D-G-K-System: a) Lage eines Eigenwertes. b) Symmetrie des Spektrums. Konjugiert-komplexe Überlagerung zweier Eigenwertpaare.

ω generieren. Auflösen nach dem Realteil ϱ liefert schließlich ein Polynom in ϱ : ohne dieses zu lösen, lassen sich Aussagen über das Vorzeichen des Realteils ϱ mittels des Routh-Hurwitz-Kriteriums gewinnen. Für asymptotische Stabilität erhält man die beiden Bedingungen

$$d_{eff} > 0 \quad \wedge \quad kd_{eff}^2 > 0. \quad (3.94)$$

Die erste Bedingung ist erfüllt, wenn

- die Dissipationsmatrix positiv definit ist, d.h. $\mathbf{D}_{eff} > 0$ oder wenn
- durchdringende Dämpfung vorliegt. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass jede Eigenbewegung gedämpft ist, auch wenn \mathbf{D}_{eff} nur semidefinit ist, d.h. wenn $d_{eff} = \mathbf{r}'\mathbf{D}_{eff}\mathbf{r} > 0$ ist, obwohl nur $\mathbf{D}_{eff} \geq 0$ gilt.

Ist die Bedingung (3.94)₁ erfüllt, so ist es für positiv definite Steifigkeit $\mathbf{K} > 0$ (und damit $k > 0$) auch die Bedingung (3.94)₂.

Da die Struktur der Matrix \mathbf{P} und damit auch die der Matrix \mathbf{D} von den Ansatzfunktionen abhängt, ist es nicht ohne weiteres möglich, Aussagen über Definitheitseigenschaften zu treffen. Zumindest jedoch lässt sich sagen, dass ein System mit Strukturdämpfung für eine nicht von der Relativgeschwindigkeit abhängige Reibkennlinie (d.h. $\eta_R = 0$) stabil ist.

Zudem haben energetische Überlegungen (Gleichung (3.3)) gezeigt, dass eine fallende Kennlinie, d.h. eine Reibkennlinie mit negativer Steigung im Linearisierungspunkt zur Anfachung von Schwingungen führen kann. In der Literatur finden sich zahlreiche Arbeiten zu diesem Effekt (siehe z.B. [53]).

3.4.2.2 Zirkulatorische Systeme

In den meisten Fällen wird der Einfluss der generalisierten Lagen auf die Gleitreibungskräfte nicht vernachlässigbar sein, sodass aus der Linearisierung der Reibung die Anteile

$$F_R = \mathbf{P}_R \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_R \Delta \mathbf{q} \quad (3.95)$$

entstehen. Mit der Zerlegung

$$\mathbf{P}_R = \mathbf{G}_R + \mathbf{D}_R, \quad \mathbf{Q}_R = \mathbf{K}_R + \mathbf{N} \quad (3.96)$$

der von der Reibungslinearisierung herrührenden Anteile ergibt sich hieraus die allgemeine Systemgleichung

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{q}} + ([\mathbf{D} + \mathbf{D}_R] + [\Omega \bar{\mathbf{G}} + \mathbf{G}_R]) \Delta \dot{\mathbf{q}} + ([\mathbf{K} + \mathbf{K}_R] + \mathbf{N}) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (3.97)$$

$$\mathbf{M} \Delta \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D}_{eff} + \mathbf{G}_{eff}) \Delta \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_{eff} + \mathbf{N}) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.98)$$

Hierbei hängen alle von der Reibung herrührenden Anteile (also \mathbf{D}_R , \mathbf{G}_R , \mathbf{K}_R und \mathbf{N}) vom Parametervektor \mathbf{p} ab, in dem die Kontaktparameter (μ und je nach Kontakformulierung k_C) aller Kontakte sowie die Transportgeschwindigkeiten Ω_i der Körper zusammengefasst sind. Folglich hängen die effektiven Systemmatrizen \mathbf{D}_{eff} , \mathbf{G}_{eff} , \mathbf{K}_{eff} und \mathbf{N} ebenfalls von dieser Parametermatrix ab.

Das zugehörige Eigenwertproblem lautet

$$[\mathbf{M} \lambda^2 + (\mathbf{D}_{eff} + \mathbf{G}_{eff}) \lambda + (\mathbf{K}_{eff} + \mathbf{N})] \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (3.99)$$

Die Eigenschaften der Eigenvektoren \mathbf{r} lassen sich wiederum von den Eigenschaften der Matrizen $\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{D}_{eff} + \mathbf{G}_{eff}]$ und $\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{K}_{eff} + \mathbf{N}]$ ausgehend begründen. Es lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

- Vertauschbarkeitsrelation (3.25) erfüllt: die Eigenvektoren des reduzierten Systems $[\mathbf{M} \lambda^2 + (\mathbf{K}_{eff} + \mathbf{N})] \mathbf{r} = \mathbf{0}$ sind auch Eigenvektoren des Systems (3.99) und es existiert ein vollständiger Satz reeller Eigenvektoren, wenn das zugrundeliegende System grenzstabil ist.
- Vertauschbarkeitsrelation (3.25) nicht erfüllt: es lässt sich kein vollständig reeller Satz von Eigenvektoren angeben und die Eigenvektoren sind komplexwertig.

3.4.2.2.1 Vollständiger Satz reeller Eigenvektoren Ist die Vertauschbarkeitsrelation erfüllt, so sind die Eigenvektoren des zugrundeliegenden \mathbf{M} - \mathbf{K} - \mathbf{N} -Systems auch Eigenvektoren von (3.99). Folglich werden bei denselben (kritischen) Punkten im Parameterraum

(mindestens) zwei reelle Eigenvektoren zusammenfallen und danach ein konjugiert komplexes Paar bilden. Der Übergang zu komplexen Eigenvektoren bringt im vorliegenden Fall also auch zwingend das Auftreten eines mehrfachen Eigenwertes mit sich.

Wird angenommen, dass ein skalarer Parameter p_{crit} diesen Übergang kontrolliert, so lassen sich wie zuvor zwei Bereiche unterscheiden:

$$p < p_{crit} : \quad \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad ; \quad p > p_{crit} : \quad \mathbf{r}_u = (\bar{\mathbf{r}}_i) \in \mathbb{C}^{n \times 1}, \text{Im}\{\mathbf{r}\} \neq 0. \quad (3.100)$$

Vormultiplikation von (3.99) mit $\mathbf{r}' = \bar{\mathbf{r}}^\top$ liefert unter Beachtung der Eigenschaften (3.32)-(3.35) die beiden Eigenwertgleichungen

$$p < p_{crit} : \quad m\lambda^2 + d_{eff}\lambda + k = 0, \quad (3.101)$$

$$p > p_{crit} : \quad m\lambda^2 + (d_{eff} + jg_{eff})\lambda + (k + jn_{eff}) = 0. \quad (3.102)$$

Auflösen nach λ ergibt unter Annahme massennormierter Eigenvektoren (d.h. $m = 1$)

$$p < p_{crit} : \quad \lambda^\pm = -\frac{d_{eff}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4k + d_{eff}^2}, \quad (3.103)$$

$$p > p_{crit} : \quad \lambda^\pm = -\frac{d_{eff} + jg_{eff}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4k + d_{eff}^2 - g_{eff}^2 + j(2d_{eff}g_{eff} - 4n)}. \quad (3.104)$$

Für $p < p_{crit}$ verhält sich das System folglich wie ein **M-D-K**-System, wobei die Eigenvektoren – und damit der Übergang zur Eigenwertgleichung für $p > p_{crit}$ – vom zirkulatorischen Anteil **N** gesteuert werden.

Die Lage der Eigenwerte ist in Abbildung 3.16 skizziert. Der Realteil des kritischen Eigenwertes (d.h. $\lambda^\pm(p_{crit})$) ist vollständig bestimmt durch den Rayleigh-Quotienten d_{eff} der Dissipationsmatrix **D**_{eff}. Da erst nach Durchschreiten des kritischen Parameterwertes p_{crit} die Eigenwerte in Richtung der Stabilitätsgrenze bei $\text{Re} = 0$ wandern, wird die Stabilitätsgrenze erst für Parameterwerte erreicht, die jenseits des kritischen Wertes liegen. Ist das System für $p < p_{crit}$ stabil, dann ist $p_{stab} > p_{crit}$.

Die Stabilität der trivialen Lösung lässt sich aus den Eigenwertgleichungen (3.101), (3.102) zunächst nicht so ohne weiteres beurteilen.

Mittels $\lambda = \varrho + j\omega$ folgt nach kurzer Rechnung eine Polynomgleichung für die Realteile ϱ , die mittels des Routh-Hurwitz-Kriteriums auf asymptotische Stabilität geprüft werden kann. Man findet als notwendige und hinreichende Bedingungen

$$d_{eff} > 0 \quad \wedge \quad k_{eff}d_{eff}^2 + n_{eff}d_{eff}g_{eff} - n_{eff}^2 > 0. \quad (3.105)$$

In jedem Fall ist $d_{eff} > 0$ eine notwendige Bedingung für asymptotische Stabilität. Dies ist für positiv definite Dissipation **D** > 0 stets gegeben. Dieses Definitheits-Kriterium versagt

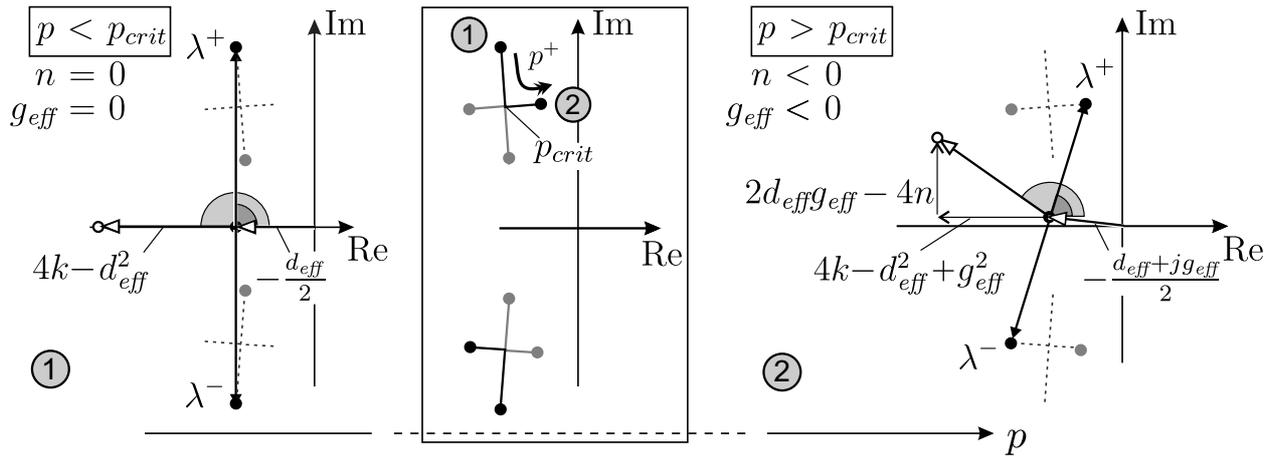


Abbildung 3.16: Verhalten der Eigenwerte eines **M-D-G-K-N**-Systems, wenn $(\mathbf{D} + \mathbf{G})$ und $(\mathbf{K} + \mathbf{N})$ vertauschbar sind: die Teilabbildungen (1) und (2) stellen schematisch die Lage der Eigenwerte in der komplexen Ebene für $p < p_{crit}$ bzw. $p > p_{crit}$ dar. Die dazwischen liegende Abbildung skizziert den Übergang.

jedoch schon, wenn die Dissipationsmatrix nicht vollständig besetzt ist und der Nullraum der Matrix \mathbf{D} nicht verschwindet. Aus der praktischen Erfahrung weiß man aber, dass in den meisten Fällen lokale Dissipation ausreicht, um ein System global zu dämpfen. Die Bedingung ist also eher so zu formulieren, dass es keine Eigenbewegungen geben darf, die im Nullraum der Dissipationsmatrix \mathbf{D} liegen und somit ungedämpft sind. Ist dies der Fall, ist auch für nur semidefinite Dissipation $\mathbf{D} \geq 0$ die Forderung $d_{eff} > 0$ stets erfüllt.

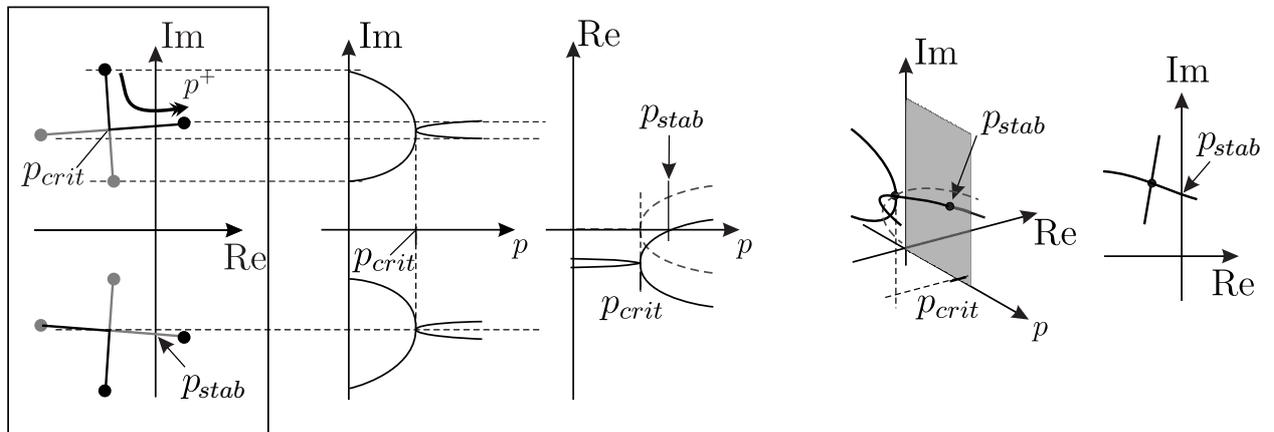


Abbildung 3.17: Übersicht über das Verhalten der Eigenwerte eines **M-D-G-K-N**-Systems ($(\mathbf{D} + \mathbf{G})$ und $(\mathbf{K} + \mathbf{N})$ vertauschbar) in Abhängigkeit eines charakteristischen Systemparameters p . Der kritische Parameterwert p_{crit} , bei dem zwei Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren zusammenfallen, ist gleich dem des zugehörigen **M-K-N**-Systems. Für die Stabilitätsgrenze gilt $p_{stab} > p_{crit}$.

Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass bei einem **M-D-G-K-N**-System, bei dem die Geschwindigkeitsterme $\mathbf{D-G}$ die Vertauschbarkeitsrelation (3.25) erfüllen, ein kritischer

Parameterwert p_{crit} existiert, bei dem zwei Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenvektoren zusammenfallen. Sowohl der kritische Parameterwert p_{crit} also auch die betroffenen Eigenpaare sind dieselben wie beim zugrundeliegenden **M-K-N**-System.

Es ist jedoch offensichtlich, dass die Matrizen $\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{D}_{eff}(\mathbf{p}) + \mathbf{G}_{eff}(\mathbf{p})]$ und $\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{K}_{eff}(\mathbf{p}) + \mathbf{N}]$ nur in besonders konstruierten Fällen kommutieren werden. Das Auftreten derart spezieller Geschwindigkeitsterme in einem allgemeinen System der Art (3.99) ist somit eher als akademischer Spezialfall zu betrachten.

3.4.2.2 Allgemeine komplexwertige Eigenvektoren Außer in konstruierten Spezialfällen werden die geschwindigkeitsproportionalen Terme $(\mathbf{D}_{eff} + \mathbf{G}_{eff})$ die Vertauschbarkeitsrelation (3.25) nicht erfüllen, sodass kein vollständiger Satz reeller Eigenvektoren angegeben werden kann. Es gibt somit auch keinen kritischen Parameterwert mehr, der den Übergang von ausschließlich reellen zu komplexen Eigenvektoren kennzeichnet. Wie zuvor liefert Vormultiplikation von (3.99) mit der konjugiert-komplexen Transponierten $\mathbf{r}' = \bar{\mathbf{r}}^T$ des Eigenvektors \mathbf{r} unter Beachtung der Eigenschaften (3.32)-(3.35) die Eigenwertgleichung

$$\lambda^2 + (d_{eff} + jg_{eff})\lambda + (k + jn_{eff}) = 0 \quad (3.106)$$

und nach Auflösen findet man die zu \mathbf{r} gehörenden Eigenwerte

$$\lambda^{\pm} = -\frac{d_{eff} + jg_{eff}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4k + d_{eff}^2 - g_{eff}^2 + j(2d_{eff}g_{eff} - 4n_{eff})}. \quad (3.107)$$

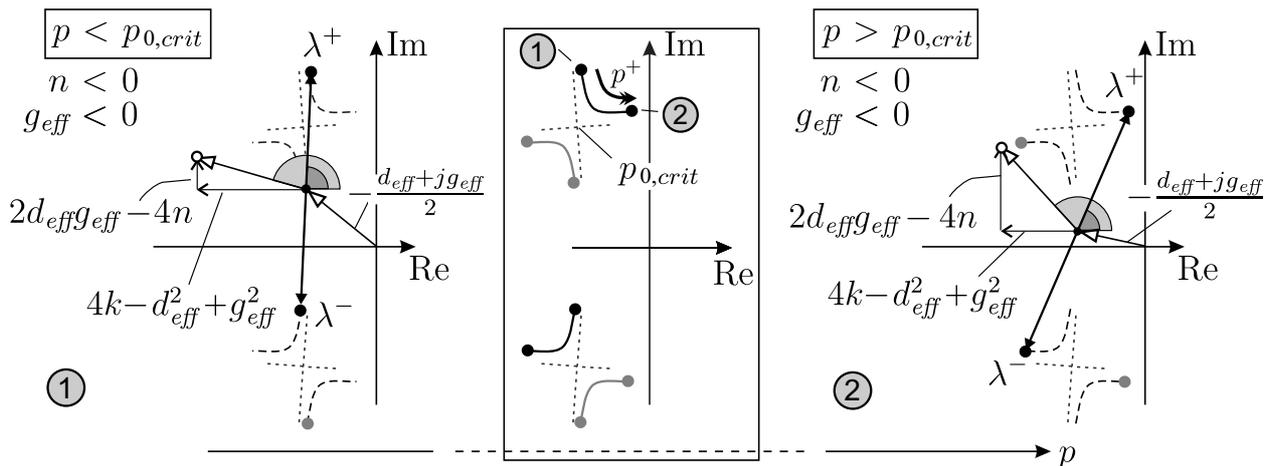


Abbildung 3.18: Verhalten der Eigenwerte eines **M-D-G-K-N**-Systems mit komplexen Eigenvektoren (d.h. $(\mathbf{D} + \mathbf{G})$ und $(\mathbf{K} + \mathbf{N})$ nicht vertauschbar): die Teilabbildungen (1) und (2) stellen schematisch die Lage der Eigenwerte in der komplexen Ebene für $p < p_{0,crit}$ bzw. $p > p_{0,crit}$ dar, wobei $p_{0,crit}$ der kritische Parameterwert des zugrundeliegenden **M-K-N**-Systems ist. Die mittlere Abbildung skizziert den Übergang von (1) nach (2).

Grundsätzlich stellt sich natürlich auch bei diesem System die Frage, ob kritische Punkte existieren, bei denen Eigenvektoren (und damit die zugehörigen Eigenwerte) zusammenfallen. Im vorangegangenen Abschnitt wurde dargestellt, dass die Eigenvektoren eines \mathbf{M} - \mathbf{P} - \mathbf{Q} -Systems denen des zugrundeliegenden \mathbf{M} - \mathbf{Q} -Systems entsprechen, wenn $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}$ und $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}$ vertauschbar sind (siehe auch Abschnitt 3.3.2.2). Ist dies der Fall, so geschieht der Übergang vom Parameterbereich mit reellen Eigenvektoren zum Bereich, in dem nur komplexe gefunden werden können, über das Zusammenfallen (mindestens) zweier Eigenvektoren und der zugehörigen Eigenwerte. Ausgehend von diesem Sonderfall soll nun durch Hinzufügen der Einfluss von Termen untersucht werden, welche die Vertauschbarkeitsbedingung nicht erfüllen.

Das System (3.99) lässt sich in der Form

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 p_1) \lambda + (\mathbf{K}_{eff} + p_0 \mathbf{N})] \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (3.108)$$

schreiben, wobei \mathbf{P}_0 den Anteil der geschwindigkeitsproportionalen Terme repräsentiert, der die Vertauschbarkeitsbedingung erfüllt und $\mathbf{P}_1 p_1 = \varepsilon \mathbf{P} \bar{p}_1$ ($\varepsilon \ll 1$) kleine Störungen dieser Matrix darstellt.

Für kleine Parametervariationen $p_0 = p_{0,crit} + \Delta p_0 = p_{0,crit} + \varepsilon \Delta \bar{p}_0$ um den kritischen Parameter $p_{0,crit}$ des zugrundeliegenden \mathbf{M} - \mathbf{P}_0 - \mathbf{Q} -Systems lassen sich Eigenwerte durch die Entwicklung $\lambda \approx \lambda_{crit} + \varepsilon^{1/2} \lambda_1$ annähern. Obwohl der Kleinheitsparameter vor \mathbf{P}_1 und $\Delta \bar{p}_0$ nicht grundsätzlich identisch sein muss, wird er hier aber aus Gründen der Übersichtlichkeit ohne Einschränkung der Allgemeinheit so gewählt.

Mit Gleichung (3.57) lauten die Korrekturterme erster Ordnung für den doppelten Eigenwert $\lambda_0 = \varrho + j\omega$

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{-\boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{P}_1 \mathbf{r}_0 (\varrho + j\omega) \bar{p}_1 - \boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{N} \mathbf{r}_0 \Delta \bar{p}_0}. \quad (3.109)$$

Dabei sind die Rechts- und Linkseigenvektoren zueinander orthogonal bezüglich Matrizen, die der Vertauschbarkeitsbedingung entsprechen. Da \mathbf{P}_1 jedoch gerade die von der Vertauschbarkeitsbedingung abweichenden Anteile repräsentiert, gilt stets $\boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{P}_1 \mathbf{r}_0 \neq 0$ und man erkennt, dass für $p_1 \neq 0$ die Korrektur der Eigenwerte nie verschwindet.

Für $\Delta \bar{p}_0 = 0$ ist der Abstand $|\lambda_1|$ zwischen der Eigenwertnäherung und dem kritischen Eigenwert am kleinsten, und die Korrektur lautet $\lambda_1^{\min} = \pm \sqrt{-\boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{P}_1 \mathbf{r}_0 (\varrho + j\omega) p_1}$.

Für $|\Delta \bar{p}_0| \rightarrow \infty$ strebt (3.109) gegen die Eigenwertkorrektur des zugrundeliegenden \mathbf{M} - \mathbf{P} - \mathbf{Q} -Systems, d.h. $\lambda_1^\infty = \pm \sqrt{-\boldsymbol{\ell}_0^\top \mathbf{N} \mathbf{r}_0 \Delta \bar{p}_0}$.

Damit lässt sich das Verhalten der Eigenwerte des Systems (3.108) in der Nähe des kritischen Punktes $\lambda_{crit} = \lambda(p_{crit})$ skizzieren (siehe Abbildung 3.19).

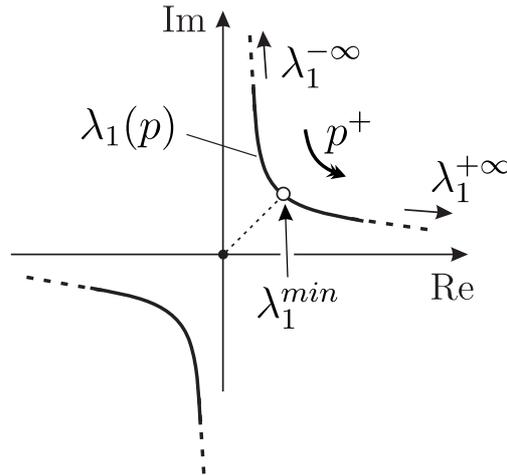


Abbildung 3.19: Erster Korrekturterm λ_1 zum Eigenwert λ_{crit} .

Nachdem gezeigt wurde, dass es in allgemeinen Systemen mit stets komplexen Eigenvektoren keinen kritischen Parameterwert geben kann, bleibt die Frage nach der Stabilität der trivialen Lösung offen.

Wie zuvor führt auch hier der Ansatz $\lambda = \varrho + j\omega$ von der skalaren Eigenwertgleichung (3.107) auf zwei Gleichungen, die sich durch Auflösen in ein Polynom für den Realteil ϱ umformen lassen. Mittels der Hurwitzkriterien findet man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$d_{eff} > 0 \quad \wedge \quad k_{eff}d_{eff}^2 + n_{eff}d_{eff}g_{eff} - n_{eff}^2 > 0 \tag{3.110}$$

für asymptotische Stabilität (siehe hierzu auch [33]).

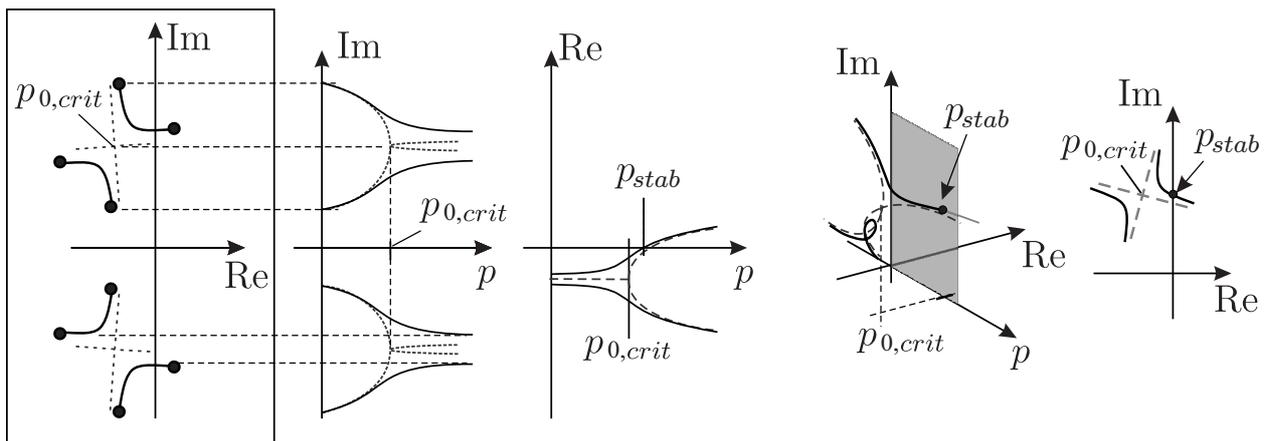


Abbildung 3.20: Übersicht über das Verhalten der Eigenwerte eines **M-D-G-K-N**-Systems mit echt komplexen Eigenvektoren ($(\mathbf{D}+\mathbf{G})$ und $(\mathbf{K}+\mathbf{N})$ nicht vertauschbar) in Abhängigkeit eines charakteristischen Systemparameters p .

Es ist anzumerken, dass die erste Bedingung in (3.94) erfüllt ist, wenn positiv definite Dissipation ($\mathbf{D} > 0$) vorliegt oder die Dissipation durchdringend ist. Die Dissipation des Systems

wird als durchdringend bezeichnet, wenn kein Eigenvektor – und somit kein Teil der Eigenbewegungen – im Nullraum der Dissipationsmatrix liegt. Dies bedeutet, dass $d_{eff} = \mathbf{r}'\mathbf{D}\mathbf{r} > 0$ gilt, obwohl nur $\mathbf{D} \geq 0$ gefordert werden muss.

Falls der Betrag d der Dissipation – für einen einzelnen Vektor oder das Gesamtsystem – verschwindet ($d = 0$), so sind diese Bedingungen auf Basis des Kriteriums von Routh-Hurwitz nicht mehr anwendbar. Man findet dann jedoch ausgehend vom Ansatz $\lambda = \varrho + j\omega$ die Zusammenhänge

$$\varrho^2 - \omega^2 - g\omega + k = 0 \quad \wedge \quad \varrho(2\omega + g) + n = 0. \quad (3.111)$$

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass die geschwindigkeitsproportionalen Terme im Allgemeinen nur in ganz speziellen Fällen die Vertauschbarkeitsrelation erfüllen. Der in diesem Absatz diskutierte Fall (echt) komplexer Eigenvektoren ist als der Normalfall anzusehen. Es tritt zudem kein kritischer Punkt mehr auf, an dem Eigenvektoren degenerieren und Eigenwerte zusammenfallen. Die Annäherung des Systems an seine Stabilitätsgrenze ist nicht mehr durch das Zusammenfallen der Eigenwerte und Eigenvektoren gekennzeichnet. Die Stabilität lässt sich somit nur anhand des Realteils sicher beurteilen.

3.4.2.2.3 Besondere Effekte Mit den vorgenannten Ergebnissen lassen sich nun zwei interessante Effekte finden: zirkulatorische Systeme

- können durch Hinzufügen kleiner Dämpfung destabilisiert werden und
- sind (fast) sicher instabil, wenn gyroskopische Terme auftreten und keine Dissipation im System vorliegt.

Die Destabilisierung durch schwache Dämpfung ist ein intuitiv kaum nachvollziehbares Phänomen in zirkulatorischen Systemen, das seit den 1950er Jahren in einer Vielzahl von Arbeiten diskutiert wurde (z.B. [5], [25], [46], [98]) und immer noch wird [41]. Zurückgehend auf die erste Veröffentlichung durch Ziegler [98] und in Anspielung auf das "Ziegler-Pendel" als Standardbeispiel für Folgelastproblem wird es häufig als "Ziegler-Paradoxon" bezeichnet. Als Ausgangspunkt zur Erklärung dieses Phänomens soll ein System dienen, dessen Eigenwertproblem die Form

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + \gamma(\mathbf{D} + \mathbf{G})\lambda + (\mathbf{K} + \mathbf{N})] \mathbf{r}_0 = \mathbf{0} \quad (3.112)$$

hat und bei dem die Matrizen $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{G})$ und $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{N})$ vertauschbar sind. Von einem allgemeinen beliebigen System ausgehend, kann man sich ein solches Grundsystem stets durch Abspalten derjenigen Anteile aus der (beliebigen) Matrix der geschwindigkeitsproportionalen Kräfte beschaffen, die der Vertauschbarkeitsbedingung (3.25) genügen. Unterkritische Parameter $p < p_{crit}$ vorausgesetzt, lässt sich dann ein Satz rein reeller Eigenvektoren \mathbf{r}_0

angeben. Der Parameter γ soll nur dazu dienen, die Größenordnung der geschwindigkeitsproportionalen Beiträge zu erfassen, welche die Vertauschbarkeitsbedingung erfüllen.

Fügt man diesem System kleine geschwindigkeitsproportionale Einflüsse $\varepsilon \left(\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{G}} \right)$ ($\varepsilon \ll 1$) hinzu, so lautet das Eigenwertproblem

$$\left[\mathbf{M}\lambda^2 + \left[\gamma(\mathbf{D} + \mathbf{G}) + \varepsilon \left(\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{G}} \right) \right] \lambda + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) \right] \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (3.113)$$

Erfüllen die Matrizen des erweiterten Systems wiederum die Vertauschbarkeitsrelation, so lassen sich wieder reelle Eigenvektoren finden und das Stabilitätsverhalten lässt sich wie zuvor schon für diesen Fall dargestellt diskutieren. Im Allgemeinen wird dies jedoch nicht gelten und die Eigenvektoren des gestörten Systems werden komplexwertig sein. Wird die Existenz einer gewöhnlichen Reihenentwicklung unterstellt, so folgen mit

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \varepsilon \mathbf{r}_1, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in \mathbb{C}^{n \times 1}, \quad \mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (3.114)$$

die komplexen Rayleigh-Quotienten der Systemmatrizen zu

$$m = \mathbf{r}'\mathbf{M}\mathbf{r} = m_0 + \varepsilon m_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad d = \mathbf{r}'\mathbf{D}\mathbf{r} = d_0 + \varepsilon d_1 + \varepsilon^2 d_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (3.115)$$

$$\tilde{d} = \mathbf{r}'\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{r} = \tilde{d}_0 + \varepsilon \tilde{d}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad k = \mathbf{r}'\mathbf{K}\mathbf{r} = k_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (3.116)$$

$$jg = \mathbf{r}'\mathbf{G}\mathbf{r} = \varepsilon jg_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad jn = \mathbf{r}'\mathbf{N}\mathbf{r} = \varepsilon jn_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.117)$$

Einsetzen in die Bedingungen (3.110) für asymptotische Stabilität ergibt die Bedingungen

$$d_{ges} = \gamma(d_0 + \varepsilon d_1 + \varepsilon^2 d_2) + \varepsilon(\tilde{d}_0 + \varepsilon \tilde{d}_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) > 0 \quad \wedge \quad (3.118)$$

$$(k_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2) \left(\gamma(d_0 + \varepsilon d_1 + \varepsilon^2 d_2) + \varepsilon(\tilde{d}_0 + \varepsilon \tilde{d}_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right)^2 \quad (3.119)$$

$$+ (\varepsilon n_1)(\gamma(d_0 + \varepsilon d_1) + \varepsilon \tilde{d}_0)(\varepsilon g_1) - \varepsilon^2 n_1^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) > 0. \quad (3.120)$$

Sortieren nach Potenzen von ε liefert für $\gamma > \varepsilon$

$$\gamma d_0 + \varepsilon^1 \left[\gamma d_1 + \tilde{d}_0 \right] + \varepsilon^2 \left[\gamma d_2 + \tilde{d}_1 \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) > 0 \quad \wedge \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} & \gamma^2 d_0^2 k_0 + \varepsilon^1 \left[2k_0 \gamma d_0 (\gamma d_1 + \tilde{d}_0) + k_1 \gamma d_0 \right] \\ & + \varepsilon^2 \left[k_0 (\gamma d_1 + \tilde{d}_0)^2 + 2\gamma d_0 (\gamma d_2 + \tilde{d}_1) + n_1 \gamma d_0 g_1 - n_1^2 \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) > 0 \end{aligned} \quad (3.122)$$

und man erkennt, dass für $\gamma > \varepsilon$ die asymptotische Stabilität durch die Terme der Ordnung ε^0 bestimmt wird, die nur Beiträge des zugrundeliegenden Systems mit geschwindigkeitsproportionalen Termen beinhalten, welche die Vertauschbarkeitsbedingung erfüllen. Ein zirkulatorisches System ist also asymptotisch stabil, wenn diese Anteile der Dissipation überwiegen.

Anders verhält es sich, wenn die der Vertauschbarkeitsbedingung genügenden Anteile der geschwindigkeitsproportionalen Terme von ähnlicher Größenordnung sind wie jene Anteile, die sie nicht erfüllen. Setzt man also $\gamma = \varepsilon$, so ergibt erneutes Ordnen nach Potenzen von ε

$$\varepsilon^1 [d_0 + \tilde{d}_0] + \varepsilon^2 [d_1 + \tilde{d}_1] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) > 0 \quad \wedge \quad (3.123)$$

$$\varepsilon^2 [d_0^2 k_0 + 2k_0 d_0 \tilde{d}_0 + k_1 d_0 + k_0 \tilde{d}_0^2 - n_1^2] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) > 0. \quad (3.124)$$

Offensichtlich wird die Stabilität des Systems mit stark von der Vertauschbarkeitsbedingungen abweichender Dämpfung durch die Terme zweiter Ordnung in ε bestimmt. Insbesondere stellt sich im Vergleich mit den zirkulatorischen Termen schwache Dämpfung $d_0, \tilde{d}_0 < 1$ als kritisch heraus. Beispielsweise bewirkt Hinzufügen schwacher nichtvertauschbarer Dämpfung ($\tilde{d}_0, \tilde{d}_1 \ll 1, \tilde{d}_0^2, \tilde{d}_1^2 \approx 0$) zu einem ungedämpften Grundsystem ($d_0, d_1 = 0$) die Bedingungen für asymptotische Stabilität

$$\varepsilon^1 [\tilde{d}_0] + \varepsilon^2 [\tilde{d}_1] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) > 0 \quad \wedge \quad \varepsilon^2 [-n_1^2] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) > 0. \quad (3.125)$$

Dieses System kann also in keinem Fall asymptotisch stabil sein, da die zweite Bedingung in jedem Fall verletzt wird.

Die Bedeutung dieses Effektes wird durch folgende Überlegungen unterstrichen:

- Physikalisch motivierte Modelle struktureller Dämpfung führen in der Regel auf symmetrische Anteile der Dissipationsmatrix. Ein Wesensmerkmal zirkulatorischer Systeme ist jedoch gerade der Verlust der Symmetrie der Matrix der lageproportionalen Kräfte. Versucht man für solche Systeme die Konstruktion einer die Vertauschbarkeitsbedingung erfüllenden Dissipationsmatrix in Form proportionaler Rayleigh-Dämpfung $\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ und unter Vernachlässigung sonstiger dissipativer Anteile, so lässt sich eine symmetrische Dämpfungsmatrix offensichtlich nur als Vielfaches der Massenmatrix \mathbf{M} ansetzen. Dies schränkt die Vielfalt der in Rayleigh-Form darstellbaren vertauschbaren Dissipationsmatrizen offensichtlich deutlich ein. Es ist jedoch zu beachten, dass diese besondere Form von Dämpfung zwar praktisch sehr wichtig ist, jedoch i.a. die allgemeine Formulierung der Vertauschbarkeitsrelation als Kriterium zur Prüfung herangezogen werden muss.
- Aus der Linearisierung der Reibungskräfte entstehen im Allgemeinen ebenfalls geschwindigkeitsproportionale Kräfte. Diese führen auf Matrizen, die vom Betriebszustand abhängen und deren Form unabhängig ist von der Matrix der lageproportionalen Kräfte. Sollte in Einzelfällen der Sonderfall proportionaler Dämpfung auftreten, so wird er durch kleine Parametervariationen (z.B. der Drehzahl) sofort gestört werden.
- Bei großen elastischen Systemen, die nur an wenigen lokal begrenzten Stellen durch Reibung beeinflusst sind, wird die Matrix der lageproportionalen Kräfte im We-

sentlichen symmetrisch sein. Der Einfluss der symmetriestörenden Reibkräfte ist begrenzt auf kleine Bereiche der Matrix der lageproportionalen Kräfte. Werden jedoch Führungsbewegungen berücksichtigt, so tritt die schiefsymmetrische Matrix \mathbf{G} auf: anders als lokale Reibung wirkt sie global auf alle bewegten Bereiche. Schiefsymmetrische Anteile lassen sich durch eine reelle Transformation nicht symmetrisieren und sind daher zwingend nicht vertauschbar mit symmetrischen Matrizen [99], [33].

Offensichtlich sind also gerade *langsame Führungsbewegungen* als besonders kritisch zu bewerten, da diese kleine Anteile in der Geschwindigkeitsmatrix hervorrufen, welche die Vertauschbarkeitsbedingung verletzen. Insbesondere in schwach gedämpften Systemen dürfen diese Einflüsse bei Simulationen nicht vernachlässigt werden.

Die Instabilität gyroskopisch-zirkulatorischer Systeme ohne Dissipation ist ein Effekt, der eng verwandt ist mit dem vorgenannten, jedoch nicht Kleinheit der verantwortlichen Einflüsse voraussetzt. Betrachtet wird ein Eigenwertproblem der Form

$$[\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{G}\lambda + (\mathbf{K} + \mathbf{N})] \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (3.126)$$

für das in (fast) keinem Fall ein Satz vollständig reeller Eigenvektoren \mathbf{r} gefunden werden kann. Ein – sehr akademischer – Ausnahmefall, für den die Vertauschbarkeitsrelation erfüllt ist und somit reelle Eigenvektoren gefunden werden können, ergibt sich mit dem proportionalen Ansatz $\mathbf{G} = \alpha\mathbf{M} + \beta(\mathbf{K} + \mathbf{N})$ für $\alpha = -1$, $\beta = 1$ und $\mathbf{K} = \mathbf{M}$. Außer in derartig speziell konstruierten Beispielen werden jedoch komplexwertige Eigenvektoren auftreten.

In diesem Fall ist der Beitrag $n = \mathbf{r}'\mathbf{N}\mathbf{r}$ des schiefsymmetrischen Anteils zur Matrix der lageproportionalen Kräfte stets ungleich null, während der Anteil d der Dissipation verschwindet. Es folgt somit direkt aus Bedingung (3.110), dass asymptotische Stabilität nicht vorliegen kann. Aus Gleichung (3.111) ergibt sich zudem, dass für $n \neq 0$ grenzstabiles Verhalten ebenfalls ausgeschlossen ist. Zirkulatorische Systeme mit gyroskopischen Kräften ohne Dissipation sind also – abgesehen von akademischen Sonderfällen wie dem oben skizzierten – praktisch immer instabil (siehe bspw. auch [29], [33], [83]). Dies gilt unabhängig von der Stärke der gyroskopischen Einflüsse.

Alternativ lässt sich dies auch ausgehend vom zugrundeliegenden $\mathbf{M}\text{-}\mathbf{K}\text{-}\mathbf{N}$ -System mit Hilfe der Entwicklung (3.47) für einfache Eigenwerte zeigen. Wird zu einem grenzstabilen $\mathbf{M}\text{-}\mathbf{K}$ -System mit einfachen Eigenwerten ein gyroskopischer Anteil $\varepsilon\mathbf{G}$ hinzugefügt, so ist die Veränderung eines Eigenwertes

$$\Delta\lambda = -\frac{1}{\ell^\top \mathbf{M}\mathbf{r}} j\omega \ell^\top \mathbf{G}\mathbf{r} \Delta p = -\frac{\ell^\top \mathbf{G}\mathbf{r} \Delta p}{\ell^\top \mathbf{M}\mathbf{r}} \in \mathbb{R} \quad (3.127)$$

stets eine reelle Zahl. Die Ruhelage wird somit instabil.

3.4.2.2.4 Anmerkung zum Satz von Thomson und Tait Die Feststellung, dass die Dissipation \mathbf{D} und die gyrokopischen Einflüsse \mathbf{G} destabilisierende Wirkung haben können, ist intuitiv nur schwer zugänglich.

Tatsächlich lässt sich das Stabilitätsverhalten vieler Probleme der Praxis unter Vernachlässigung dieser Einflüsse zur sicheren Seite hin abschätzen. Die formale Begründung hierfür ist durch den Satz von Thomson und Tait gegeben. Viele Probleme der Praxis führen auf Störungsgleichungen der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{K} > 0. \quad (3.128)$$

Wegen $\mathbf{K} > 0$ ist das zugrundeliegende ungedämpfte, nichtgyroskopische System grenzstabil und nach dem Satz von Thomson und Tait (siehe Kapitel 3.4.2.1) destabilisiert das Hinzufügen von mindestens positiv-semidefiniter Dissipation $\mathbf{D} \geq 0$ die untersuchte Lösung nicht. Die schief-symmetrischen geschwindigkeitsproportionalen Terme \mathbf{G} beeinflussen die Stabilität der nichtzirkulatorischen Störungsgleichung (3.128) ebenfalls nicht. Da echte Dämpfung stets zumindest positiv semidefinit ist, stellen Stabilitätsuntersuchungen anhand von (3.128) unter Vernachlässigung der Dissipation eine konservative Abschätzung dar.

Das allgemeine reibungsbehaftete System wird jedoch nicht durch Gleichung (3.128), sondern durch (3.98) beschrieben und hat somit die Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.129)$$

Der Satz von Thomson und Tait gilt nur für Systeme mit symmetrischer beziehungsweise reell symmetrisierbarer Steifigkeitsmatrix und darf hier nicht zur Beurteilung der Stabilität herangezogen werden, da (3.129) die zirkulatorische Matrix \mathbf{N} enthält.

Es lässt sich insgesamt festhalten, dass die intuitive und für nichtzirkulatorische Systeme (3.128) durch den Satz von Thomson und Tait abgesicherte vereinfachte Herangehensweise für allgemeine, zirkulatorische Systeme der Form (3.129) schon formal nicht zulässig ist. Die in den vorangegangenen Abschnitten des Kapitels dargestellten destabilisierenden Effekte unterstreichen dies deutlich.

Kapitel 4

Quietschen von Scheibenbremsen

4.1 Problembeschreibung

4.1.1 Allgemein

Die bei Fahrzeugbremsen auftretenden Schwingungserscheinungen sind je nach Wahrnehmung durch den Fahrer oder die übrige Umwelt entweder mechanisch spürbar (Vibrationen) oder hörbar (Schall). Beide Wahrnehmungen sind jedoch letztlich auf mechanische Festkörperschwingungen zurückzuführen, die entweder indirekt – nach Übertragung über das Medium Luft – oder direkt durch Kontakt mit dem schwingenden Körper wahrgenommen werden. Da für die Ursachenforschung Übertragung und Art der Wahrnehmung unerheblich sind, wird im Folgenden auf diese Unterscheidung verzichtet.

In der Regel werden Schwingungen von Bremsen nach ihrer Frequenz klassifiziert. Der für Menschen relevante Bereich erstreckt sich hierbei von 0 Hz bis ca. 20 kHz. Die untere Grenze ist außerhalb des hörbaren Bereiches, der bei ca. 20 Hz beginnt, und betrifft die mechanisch spürbaren Schwingungen. Ihre Relevanz hängt von der Feinfühligkeit der Testperson und der Amplitude der Schwingungen ab. Die obere Grenze stellt die übliche Hörgrenze von Menschen dar und liegt außerhalb der Grenze, die mit dem Tastsinn noch wahrgenommen werden kann.

Weitere Details hierzu finden sich in [4], [10], [23], [79].

Hinsichtlich der Ursache der Schwingungen lassen sich im Wesentlichen zwei Kategorien unterscheiden [53]:

- Ist die Frequenz der Schwingung durch einen von außen vorgegebenen Einfluss bestimmt, so spricht man von *fremderregten (heteronomen) Schwingungen*. Beispiele für Schwingungen dieser Kategorie sind krafterregte Schwinger, die durch eine äußere Kraft zu Schwingungen erregt werden. Daneben können auch Systemparameter von außen vorgegebenen Schwankungen unterliegen: bei dieser Art fremderregter Schwingungen

spricht man von parametererregten Schwingungen.

Charakteristisch für die Klasse der fremderregten Schwingungen ist, dass die Grundfrequenz der Schwingung der Anregungsfrequenz entspricht. Typische Beispiele bei Bremsen sind Schwingungen, deren Frequenz sich proportional zur Drehzahl (d.h. Umdrehungsfrequenz) des Rades verhält.

- Selbsterregte Schwingungen hingegen zeichnen sich dadurch aus, dass der Schwinger selbst Frequenz und Amplitude der Schwingung bestimmt – unabhängig von äußeren Einflüssen. In vielen Fällen lässt sich durch gezielte Beeinflussung der bestimmenden Systemparameter das Auftreten von Selbsterregungseffekten vermeiden.

Ein typisches Beispiel bei Bremsen sind Schwingungen, deren Frequenz unabhängig von der Drehzahl ist.

Abhängig von diesen beiden Charakteristika lassen sich die Schwingungsphänomene in eine Matrix einordnen: Abbildung 4.1 zeigt die entsprechende Einordnung der im Labor des Instituts für Technische Mechanik beobachteten Schwingungsphänomene. Diese Darstellung stellt eine Adaption des häufig zitierten Schemas aus [92] unter Berücksichtigung der experimentellen Beobachtungen des Autors dar.

Allgemein erfolgt die Benennung der auftretenden Frequenzen nach dem subjektiven Eindruck, den die Schwingung auf Testpersonen hinterlässt. Zur Einordnung des Entstehungsmechanismus wird in der Regel die Drehzahl herangezogen: ist ein Zusammenhang zwischen Drehfrequenz und Schwingungsfrequenz zu erkennen, so wird Fremderregung angenommen, andernfalls ist von Selbsterregung auszugehen.

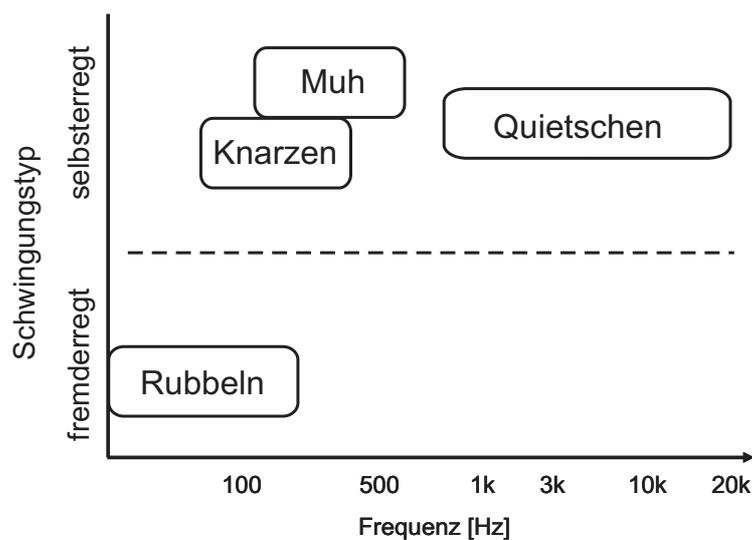


Abbildung 4.1: Arten von Bremsenschwingungen (in Anlehnung an [92]).

Ogleich es keine internationale Standardbezeichnung gibt, lassen sich zumindest folgende Begriffe als etabliert betrachten [23], [79], [92] :

- *Rubbeln* ("Judder") bezeichnet Schwingungen, die meist mehr fühl- als hörbar im Bereich von 0 bis ca. 500 Hz auftreten und sich mit der Drehzahl (Fahrgeschwindigkeit) verändern. Mitunter kommt es zu starken Vibrationen von Lenkrad oder Bremspedal ("Schlagen", "Flattern"). Bisweilen wird hier noch zwischen Heiß- und Kaltrubbeln ("hot-judder" / "cold-judder") unterschieden.
- *Knarzen* ("Groan") sind hörbare Schwingungen im Bereich von 20-400 Hz. Sie treten in einem bestimmten Betriebsbereich auf, ihre Frequenz ist jedoch unabhängig von der Fahrgeschwindigkeit. Knarzen klingt eher knorrig und hart.
- Unter *Muhen* ("muh") versteht man hörbare Schwingungen, die in der Regel im Bereich von 200-400 Hz auftreten. Sie sind dem Knarzen sehr ähnlich, klingen jedoch weniger hart und eher tonal. Die Frequenz ist ebenfalls unabhängig von der Drehzahl.
- Als *Quietschen* bezeichnet man mittel- bis hochfrequente Schwingungen im Frequenzbereich von ca. 1 bis 20 kHz, die akustisch wahrgenommen werden und unabhängig von der Fahrgeschwindigkeit (Drehzahl) auftreten. Quietschen kann sehr laut sein und wird dementsprechend als unangenehm empfunden. Ein Beispiel hierfür ist das Quietschen der Bremsen von Schienenfahrzeugen.

Über die beschriebenen Phänomene hinaus gibt es noch ein Vielzahl weiterer, wie beispielsweise "Singen", "Schaben", "Drahtbürste", usw.

4.1.2 Experimentelle Ergebnisse

Im Labor des Instituts für Technische Mechanik konnte an einer serienmäßigen Fahrzeugbremse eine Reihe von Experimenten zu unterschiedlichen Schwingungserscheinungen bei Scheibenbremsen durchgeführt werden (siehe [28], [27], [79]). Im Folgenden werden jedoch nur Ergebnisse vorgestellt, die für Modellierung und Verständnis des Bremsenquietschens relevant sind.

4.1.2.1 Aufbau der Bremse und des Prüfstandes

Die untersuchte Bremse ist eine Schwimmsattelscheibenbremse des Herstellers LUKAS, wie sie beispielsweise in Fahrzeugen der Mercedes A-Klasse verbaut wurde (siehe Abbildung 4.2). Der Prüfstand samt Bremse wurde im Rahmen eines BMBF-Projektes im Labor des Instituts installiert [71], [79].

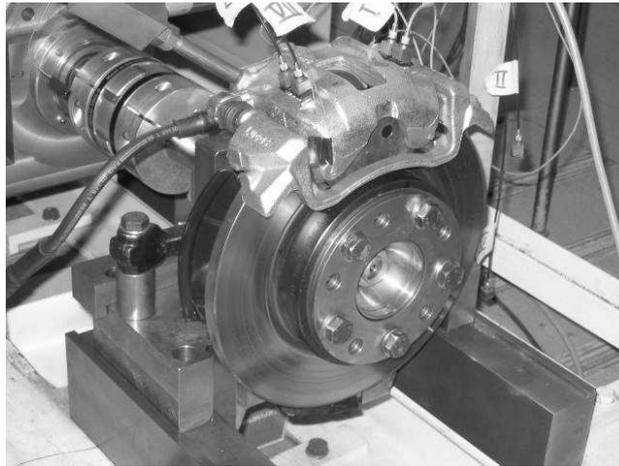


Abbildung 4.2: Foto der untersuchten Schwimmsattelbremse.

In der ursprünglichen Form war der Bremsträger direkt mit einem massiven Metallträger verschraubt. Für die dieser Arbeit zugrundeliegenden Messungen wurde diese Anordnung durch eine realistischere Anordnung ersetzt, bei welcher der feststehende Teil der Bremse mit dem originalen Achsträger verbunden wurde. Dieser wurde dann an den dafür vorgesehenen Punkten mit dem Prüfstand verschraubt.

Die Bremse wird mittels eines Hydraulikkolbens aktuiert. Der Rotor wird von einem 120 kW-Gleichstromnebenschlussmotor angetrieben, der über eine Drehzahlregelung verfügt. Zwischen dem Antriebsmotor und der Bremse ist eine Drehmomentenmesswelle installiert, die auch einen Drehzahlsensor beinhaltet. Darüber hinaus wurde ein weiterer, hochauflösender Drehzahlsensor direkt mit der Brems Scheibe verbunden, um direktere und genauere Messungen der Scheibendrehzahl zu erlauben.

Die Abbildungen 4.2 und 4.3 zeigen Fotos sowie schematische Darstellungen der untersuchten Bremse. Der grundsätzliche Aufbau der Bremse umfasst einen Träger, den sogenannten Sattel, die Bremsbeläge sowie die Brems Scheibe (Rotor).

Der Träger ist dabei fest mit der Umgebung (bzw. dem Fahrwerk) verbunden, während der Rotor auf der sich drehenden Achse fest verschraubt ist. Der Sattel ist lediglich durch zwei Führungsstifte mit dem Träger verbunden, die jedoch keinen nennenswerten Beitrag zur Kraftübertragung leisten.

Die auf die Bremsbeläge aufgebrauchten Normalkräfte werden durch den zangenartigen Aufbau des Sattels vollständig über die Bremsbeläge abgestützt. Die Abstützung der Umfangskräfte (d.h. der Reibungskräfte) in Drehrichtung geschieht hiervon getrennt durch die direkte Abstützung der Bremsbeläge auf dem Träger (siehe Abbildung 4.4).

Nachdem eine Reihe von Messungen an der kompletten Bremse durchgeführt worden war, wurde – zunächst probenhalber – der Sattel entfernt und durch eine Schraubzwinde ersetzt (siehe Abbildungen 4.5, 4.6). Dies ging natürlich mit kleinen Verschiebungen im Frequenz-

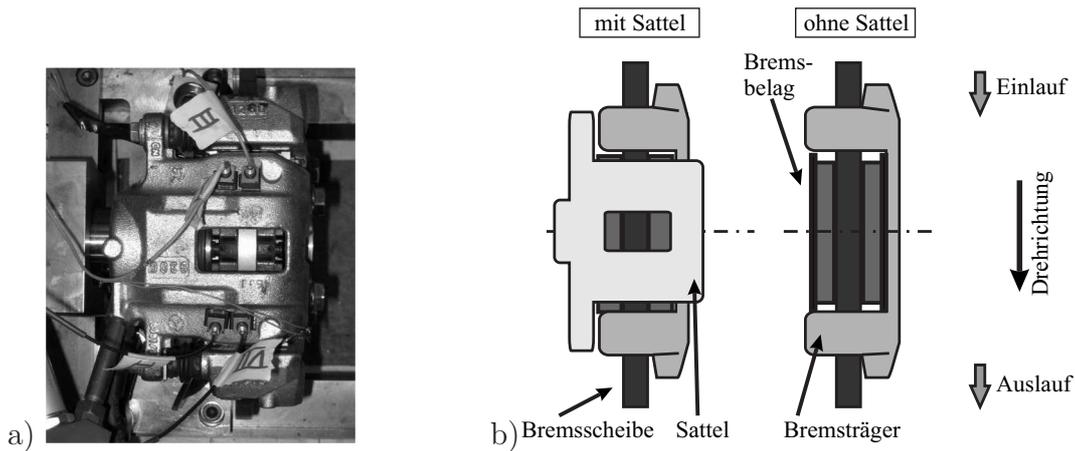


Abbildung 4.3: Die untersuchte Schwimmsattelbremse (Sicht von oben):
a) Foto. b) Schematische Darstellung der Bauteile.

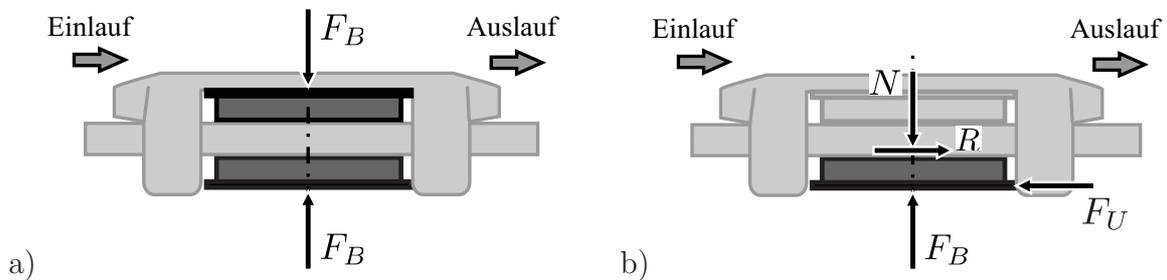


Abbildung 4.4: Kräfte an den Bremsbelägen (Bremskraft F_B , Kontaktnormalkraft N , Reibkraft R , Kraft des Trägers auf Belag F_U): a) Abstützung der durch den Sattel aufgebrachtten Normalkräfte. b) Abstützung der Umfangskräfte.

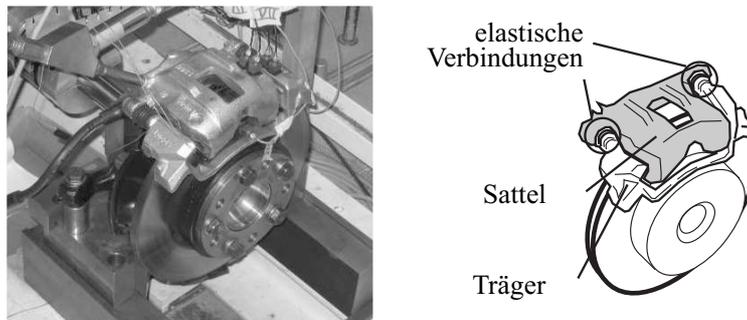


Abbildung 4.5: Die untersuchte Bremse mit Bremsattel: die Anpresskräfte auf die Beläge werden durch den zangenartigen Aufbau des Sattels abgestützt. Der Sattel ist lediglich mittels schwacher elastischer Verbindungen am Träger befestigt.

spektrum und der akustischen Wahrnehmung einher, doch waren darüber hinaus keine qualitativen Änderungen festzustellen. Vielmehr ergab sich durch diese Änderung eine Reihe von Vorteilen wie insbesondere ein übersichtlicheres Frequenzspektrum und die bessere Zugänglichkeit zu den Bremsbelägen. Durch diese Modifikation wurde es möglich, während des Quietschens direkt auf der Rückenplatte der Bremsbeläge Messungen vorzunehmen. Zu-

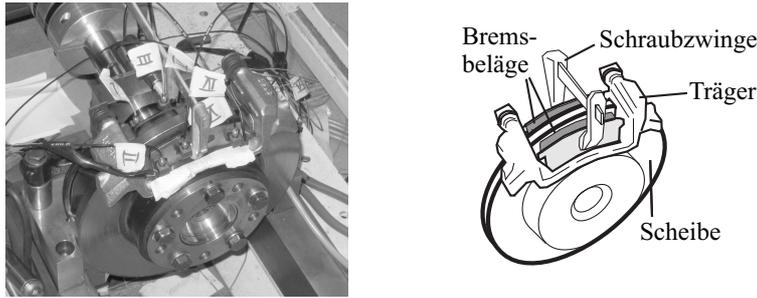


Abbildung 4.6: Die untersuchte Bremse nach Entfernen des Sattels. Seine Funktion wird vollständig durch eine Schraubzwinge ersetzt.

dem konnten nun mittels Kraftmessdosen direkt die auf die Bremsbeläge wirkenden Normalkräfte gemessen werden.

Da das Ziel dieser Arbeit eher die Förderung grundsätzlichen Verständnisses als die akkurate Vermessung einer Serienbremse ist, wurde diese reduzierte, übersichtlichere Anordnung für die weiteren Messungen beibehalten.

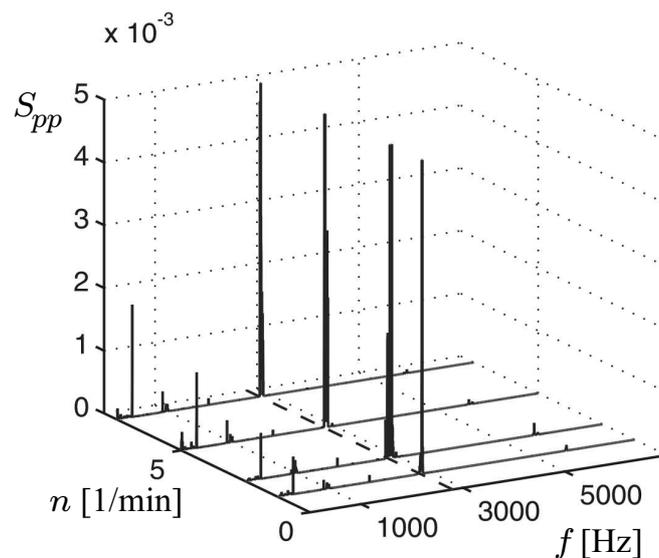


Abbildung 4.7: Spektrale Leistungsdichte S_{pp} des gemessenen Schalldruckes beim Quietschen über der Drehzahl n [1/min].

4.1.2.2 Bremsenquietschen

Quietschen wurde bei Drehzahlen oberhalb von $n \approx 1 \frac{U}{\text{min}}$ und niedrigen bis moderaten Bremskräften im Bereich $F_B \approx 100 \text{ N} - 3 \text{ kN}$ beobachtet. Bei fast allen Betriebspunkten musste die Bremse zudem betriebswarm sein, damit Quietschen auftrat. Die kritische Temperatur (gemessen an der Oberfläche der Scheibe) konnte dabei recht gut reproduzierbar bei $T_{S,O} \approx 60 \text{ °C}$ festgestellt werden.

Abbildung 4.7 zeigt Frequenzspektren der Schallemission während des Quietschens in Abhängigkeit von der Drehzahl. Eine Abhängigkeit der Spektren von der Drehzahl ist nicht zu erkennen, sodass ein mit der Umdrehungsfrequenz in Zusammenhang stehender Fremderregungsmechanismus nicht in Frage kommt.

Als Schallquelle kommen insbesondere größere Oberflächen in Betracht, die Schwingungen in Richtung ihrer Oberflächennormalen ausführen, da dann die Schallintensität und letztlich die gesamte Schallleistung groß ist. Messungen an verschiedenen Positionen um den Prüfstand herum bestätigten dabei die Annahme, dass die Bremsscheibe als primäre Schallquelle anzusehen ist.

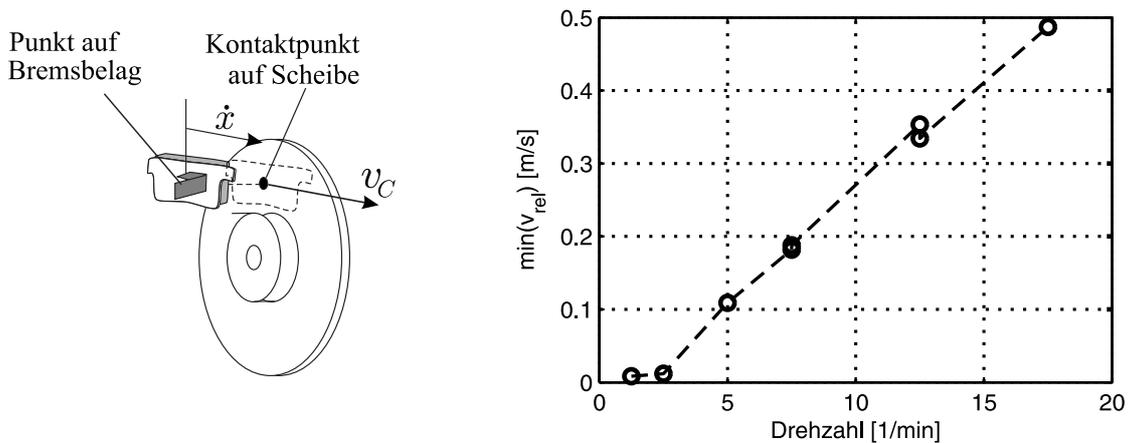


Abbildung 4.8: Relativgeschwindigkeit $v_{rel} = v_C - \dot{x}$ in Umfangsrichtung zwischen einem Punkt auf der Belagsrückplatte (Geschwindigkeit \dot{x}) und einem Oberflächenpunkt der Bremsscheibe im Kontaktbereich (Geschwindigkeit v_C). Dargestellt in jeweils das Minimum $\min(v_{rel})$ für verschiedene Drehzahlen während des Quietschens.

Durch die verbesserte Zugänglichkeit der Bremsbeläge nach Entfernen des Sattels wurde es möglich, auf der Rückenplatte einen Messpunkt ("laser-target") zu montieren, mit dessen Hilfe mittels eines Laser-Vibrometers die Bewegung der Bremsbeläge in Umfangsrichtung vermessen werden konnte.

Abbildung 4.8 stellt das Minimum der Relativgeschwindigkeit v_{rel} in Umfangsrichtung während des Quietschens für verschiedene Drehzahlen dar. Deutlich ist zu erkennen, dass die Relativgeschwindigkeit v_{rel} zwischen beiden Punkten bei keiner Drehzahl verschwindet. Während des Quietschens tritt somit kein Haften auf.

Abbildung 4.9 zeigt die Auslenkungen zweier Messpunkte auf der Rückenplatte eines Bremsbelages in Umfangsrichtung ("längs") und in Lateralrichtung ("quer"). Es ist deutlich zu erkennen, dass bei beiden Messpunkten die Amplituden der Bewegung in Lateralrichtung jene in Umfangsrichtung um Größenordnungen überwiegen.

Mittels eines Scanning-Laservibrometers (Polytec) wurde während des Quietschens die Schwingform der Scheibenoberfläche ermittelt. Wie die Schalldruckmessung (Abbildung 4.7)

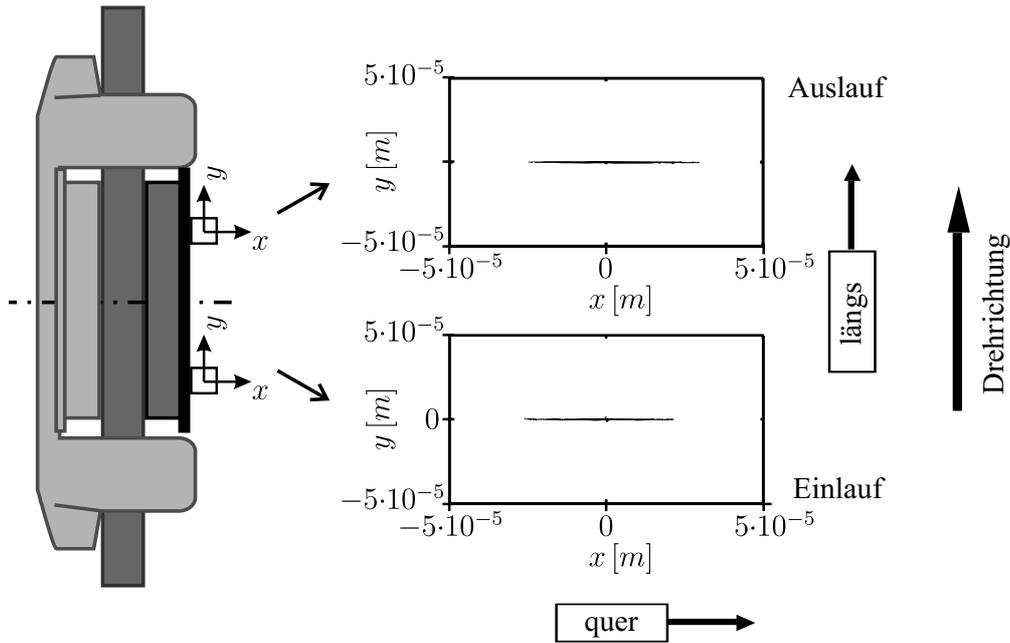


Abbildung 4.9: Auslenkungen der Belagrückenplatte: dargestellt sind die Auslenkungen in Umfangsrichtung ("längs") und Lateralrichtung ("quer") zweier Punkte auf der Rückenplatte eines Belags.

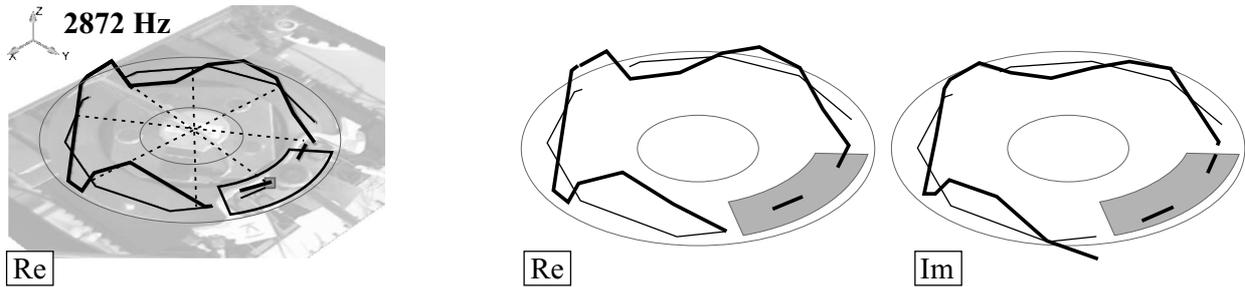


Abbildung 4.10: Betriebsschwingform beim Quietschen (2872 Hz, 4 Knotenlinien): dargestellt sind Real- und Imaginärteil (Messung mit Scanning-Laservibrometer). Ein Teil der Schwingform ist vom Bremsbelag (grauer Bereich) verdeckt.

bereits vermuten ließ, wird die Betriebsschwingungsform deutlich von ihren Anteilen bei 2872 Hz dominiert. Dabei ist keine stehende Welle mehr zu beobachten: vielmehr schwingen die Oberflächenpunkte mit unterschiedlichen Phasenwinkeln zueinander, sodass die Schwingungsform nur noch durch Angabe von Real- und Imaginärteil vollständig charakterisiert werden kann (siehe Abbildung 4.10). Realteil und Imaginärteil entsprechen dabei jeweils für sich der Eigenform einer Kreisringplatte mit vier Knotendurchmessern, bei der ein Schwingungsbauch unter dem Bremsbelag liegt und durch diesen verdeckt ist. Bis auf die Randbedingung am inneren Rand sind keine weiteren Knotenkreise zu beobachten. Trotz der Rotation sind die Knotendurchmesser von Real- und Imaginärteil raumfest.

Neben dieser Betriebsschwingungsformanalyse wurde auch eine Modalanalyse durchgeführt. Hier-

zu wurde zunächst die auf der Achse montierte freie Bremsscheibe ohne Bremsbeläge vermessen (Abbildung 4.11). Anschließend wurde die Modalanalyse für die Bremsscheibe mit angelegten Bremsbelägen unter einer Vorspannung von $N_0 \approx 2 \text{ kN}$ und mit einem statischen Vorspannungsmoment von ca. $M_0 \approx 200 \text{ Nm}$ durchgeführt (Abbildung 4.12).

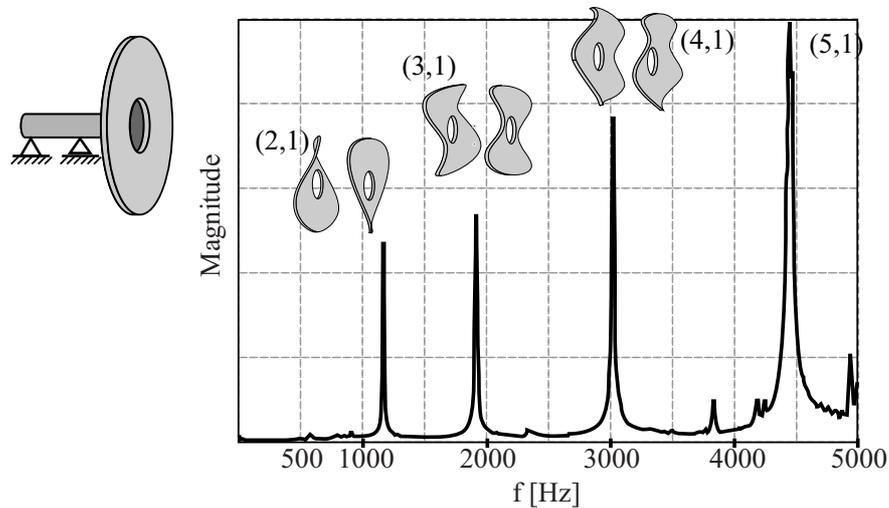


Abbildung 4.11: Experimentelle Modalanalyse der montierten Scheibe ohne Bremsbeläge: dargestellt sind die Einhüllende der Übertragungsfunktionen sowie skizzenhaft die Eigenformen der Bremsscheibe.

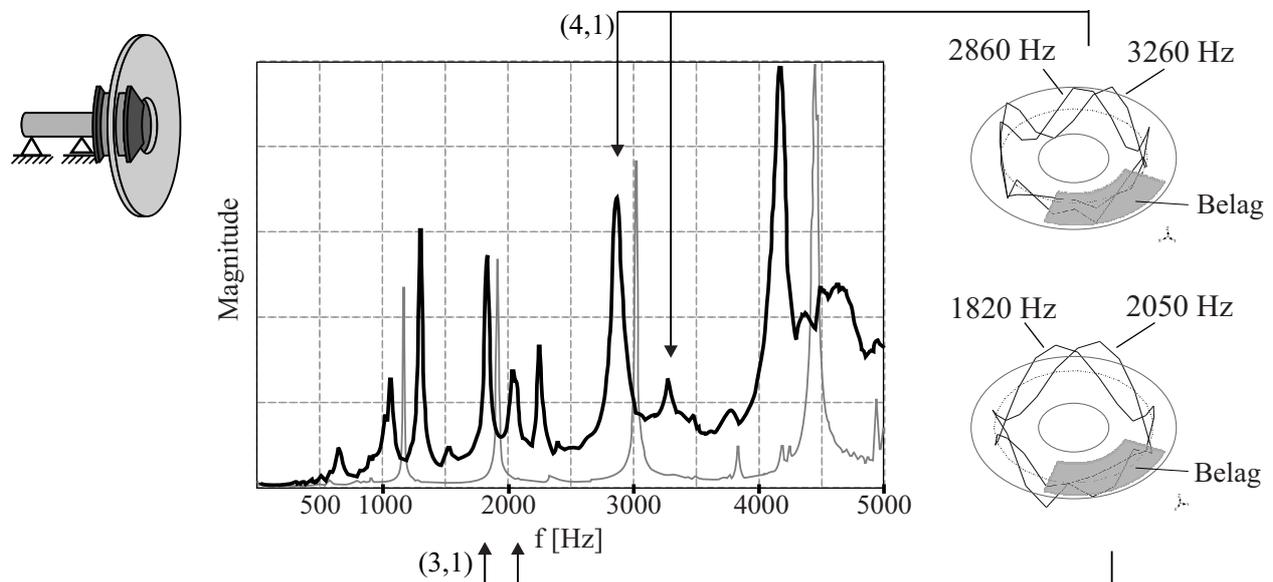


Abbildung 4.12: Experimentelle Modalanalyse der montierten Scheibe mit Bremsbelägen: dargestellt ist die Einhüllende der Übertragungsfunktionen (hellgrau zum Vergleich die Kurve aus 4.11). Zudem sind zwei Paare von zusammengehörigen Eigenmoden dargestellt, deren Frequenzen durch den Kontakt mit den Belägen getrennt wurden (Moden aus Modalanalyse).

In den Abbildungen ist deutlich der Einfluss der Bremsbeläge zu erkennen. Analysen mit veränderten Vorspannungen zeigten keinen nennenswerten Einfluss der Vorspannung auf die

Modalanalyse.

Der Gleitreibungskoeffizient $\mu = \frac{F_R}{N}$ im Sinne des Coulombschen Gesetzes ist in realen Messungen aus vielerlei Gründen nur schwer zu bestimmen. So ist beispielsweise die Definition des Gleitreibungskoeffizienten als Produkt zweier (gestörter) Messgrößen schon messtechnisch problematisch. Darüber zeigt der Gleitreibungskoeffizient eine mitunter deutliche Abhängigkeit von der Kontakthistorie und den äußeren Parametern wie Temperatur, Luftfeuchtigkeit, etc. Es ist somit kaum möglich, *den* Gleitreibungskoeffizienten eines bestimmten Kontaktes zu bestimmen. Ist die Einlaufphase weitgehend abgeschlossen und sind die

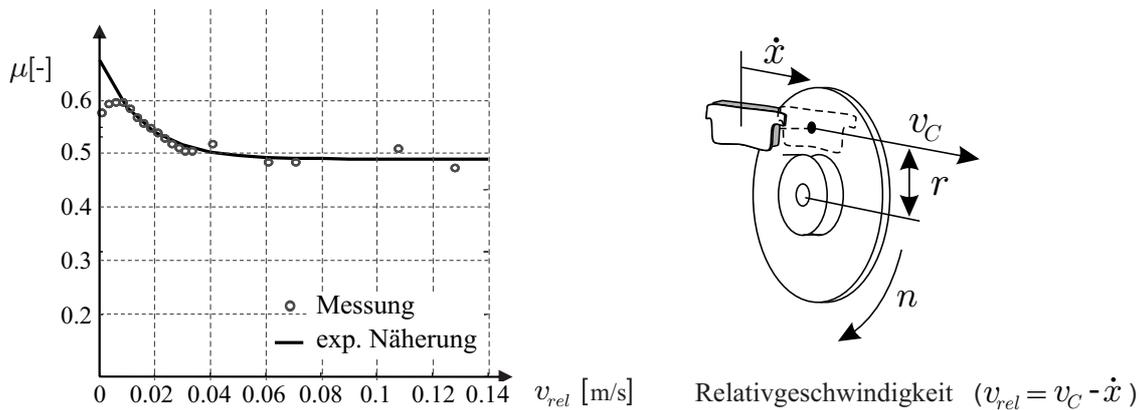


Abbildung 4.13: Gemessener Gleitreibbeiwert (Messung bei kalter Bremse, Oberflächentemperatur der Scheibe $T_{S,O} \approx 30 - 40^\circ\text{C}$).

äußeren Bedingungen einigermaßen konstant, ist es jedoch zumindest im Sinne eines Mittelwertes möglich, einen Gleitreibungskoeffizienten anzugeben. Weitere Details bezüglich dieses Themenkomplexes findet man bspw. in [11], [35], [67], [68], [86]. In Abbildung 4.13 ist der

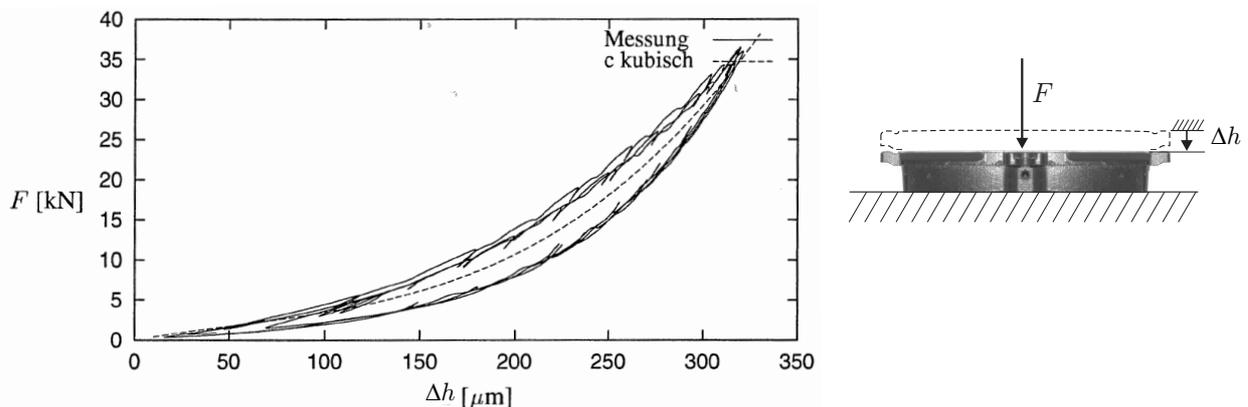


Abbildung 4.14: Steifigkeitsmessung eines der verwendeten Bremsbeläge (aus [79]).

experimentell ermittelte mittlere Gleitreibungskoeffizient in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit v_{rel} zwischen dem Belag und einem Bezugspunkt auf der Scheibenoberfläche gewählt. Die Ergebnisse entsprechen denen der Literatur. Interessant ist dabei die starke

Abhängigkeit des Gleitreibungskoeffizienten für Drehzahlen unterhalb von ca. $n \approx 2 \frac{U}{\text{min}}$. Für höhere Geschwindigkeiten jedoch ist der mittlere Gleitreibungskoeffizient praktisch konstant.

Abschließend stellt Abbildung 4.14 noch ein Messergebnis aus [79] dar. In dieser Arbeit wird eine kubische Näherung für die Steifigkeitskennlinie der verwendeten Bremsbeläge als

$$F(\Delta h) = c_1 \Delta h + c_2 \Delta h^2 + c_3 \Delta h^3 \quad (4.1)$$

mit

$$c_1 = 4.07923 \cdot 10^9 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right], \quad c_2 = -1.89365 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \quad \text{und} \quad (4.2)$$

$$c_3 = 1.26169 \cdot 10^{15} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] \quad (4.3)$$

angegeben, wobei Δh die Kompression aus einer statisch vorgespannten Lage beschreibt.

4.1.3 Vorüberlegungen und grundsätzliche Modellelemente

Die experimentellen Untersuchungen zeigen, dass beim Quietschen die Bremsscheibe als wesentlicher Schallstrahler anzusehen ist. Dabei lässt sich beobachten, daß bei den Schwingungen der Bremsscheibe die Abhängigkeit der Schwingform von der Umfangskoordinate deutlich größer ist, als die Abhängigkeit von der Radialrichtung. Anders als beim Knarzen tritt beim Quietschen die restliche Struktur (wie Bremsträger, Radaufhängung, etc.) kaum in Erscheinung.

Die Experimente haben zudem deutlich gemacht, dass bereits eine Anordnung bestehend aus einer Bremsscheibe, zwei Bremsbelägen und der notwendigen Stützstruktur ausreichend ist, damit Quietschen auftreten kann. Zusätzliche Anbauteile, wie der Bremssattel samt Hydraulik, bewirken im Experiment kein qualitativ neues Verhalten, sondern lediglich quantitativ kleine Verschiebungen der Frequenzspektren.

Messungen auf der Rückseite der Bremsbeläge zeigen, dass die Lateralschwingungen ("out-of-plane") jene in Umfangsschwingungen ("in-plane") deutlich überwiegen. In der Betriebschwingform sind Verkippungen der Beläge um die Radialachse zu beobachten.

Wie die theoretischen Vorüberlegungen in Kapitel 2 gezeigt haben, kann die Dynamik des Systems nur dann durch die Reibung im Kontakt zwischen zwei Systembestandteilen beeinflusst werden, wenn die Differenz der virtuellen Verschiebungen zwischen den Kontaktpunkten auf beiden Körpern nicht verschwindet. Dies wird durch die beiden Beispiele in Abschnitt 2.2.3.3 illustriert.

Folglich ist die Kopplung zwischen lateralen und tangentialen Bewegungen im Kontakt von essentieller Bedeutung.

Modelle zum Verständnis des Bremsenquietschens müssen also mindestens folgende Punkte berücksichtigen:

- Die Bremsscheibe muss als elastischer Körper modelliert werden, der Auslenkungen senkrecht zur Mittelebene ausführen kann. Die Modellierung der restlichen Systembestandteile (Achsschenkel, etc.) ist von eher untergeordneter Bedeutung.
- Die Bremsbeläge müssen Lateralschwingungen ausführen können; die Berücksichtigung der Verkippung ist wünschenswert.
- Um die Leistung der Kontaktspannungen realitätsnah abzubilden, sollte die Kontaktkinematik detailliert modelliert werden. Dies umfasst insbesondere die tangentialen Relativverschiebungen im Kontakt. Zudem sollten die elastischen Eigenschaften der Bremsbeläge berücksichtigt werden, um die Schwankungen der Kontaktnormalspannungen infolge der Lateralbewegung abzubilden.

Die Bremsscheibe wird im Folgenden als Kreisringplatte im Sinne der Kirchhoffschen Plattentheorie modelliert. Die im Rahmen dieser Theorie getroffenen Annahmen [19] wie

- Existenz einer neutralen Ebene (Mittelebene),
- Kleinheit der Durchbiegung im Vergleich zur Dicke,
- Gültigkeit der Normalenhypothese

können im Hinblick auf die experimentellen Beobachtungen ohne weiteres als erfüllt betrachtet werden.

Die im Experiment beim Quietschen gemessene Schwingform der Scheibe ähnelt der Eigenform einer Kreisringplatte mit 4 Knotenlinien und zeigt Amplituden der Größenordnung 10^{-5} m. Es läßt sich daher leicht abschätzen, daß die Neigungen und Krümmungen der Oberfläche der Bremsscheibe sowohl in Radial- wie auch in Umfangsrichtung sehr klein sind.

Die Bremsbeläge werden als elastische Schicht im Sinne einer Winklerbettung modelliert, die sich zwischen der Bremsscheibenoberfläche und der als starr angenommen Rückenplatte befindet. In Umfangsrichtung stützen sie sich gegen die feste Umgebung ab.

Die Modellbestandteile sowie der Aufbau des Modells sind schematisch in Abbildung 4.15 dargestellt.

4.1.4 Kinematik

Zur Beschreibung der gesamten Anordnung bieten sich Zylinderkoordinaten an. Das materielle (körperfeste) Koordinatensystem hat dabei seinen Ursprung im Mittelpunkt O der

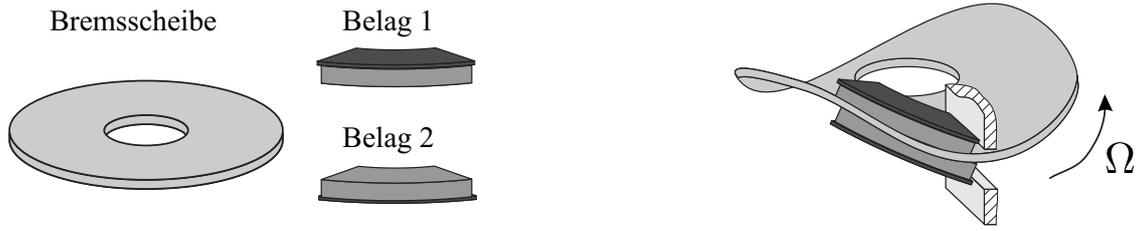


Abbildung 4.15: Zur Modellierung des Quietschens verwendete Körper (Bremsscheibe, Bremsbeläge) sowie schematische Darstellung des Modells.

Kreisringplatte und wird von den Basisvektoren \vec{e}_R , \vec{e}_Φ , \vec{e}_Z aufgespannt. Ein materieller Punkt wird in diesem System durch das Koordinatentripel $\mathbf{X} = (R, \Phi, Z)^\top$ adressiert. Das räumliche Koordinatensystem hat seinen Ursprung im Mittelpunkt O der räumlich platzierten Kreisringscheibe und wird von den Basisvektoren $\vec{e}_r(\varphi)$, $\vec{e}_\varphi(\varphi)$, \vec{e}_z aufgespannt. Ein Raumpunkt hat damit die räumlichen Koordinaten $\mathbf{x} = (r, \varphi, z)^\top$. Ist \mathbf{x} der räumliche Koordinatenvektor eines materiellen Punktes \mathbf{X} , so gilt ein eindeutiger, umkehrbarer Zusammenhang $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$.

Der Ortsvektor \vec{r} eines materiellen Punktes \mathbf{X} lautet dann $\vec{r}(\mathbf{X}) = \vec{r}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)) = r \vec{e}_r(\varphi) + z \vec{e}_z$ mit $r = r(R, \Phi, Z, t)$, $\varphi = \varphi(R, \Phi, Z, t)$ und $z = z(R, \Phi, Z, t)$. Die explizite Zeitabhängigkeit der räumlichen Koordinaten kommt dabei durch aufgeprägte Führungsbewegungen zustande.

Es wird sich im Folgenden als praktisch erweisen, den Ortsvektor als Matrizenprodukt der Form

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \vec{e}_r(\varphi) \\ \vec{e}_\varphi(\varphi) \\ \vec{e}_z \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{E}(\varphi)^\top \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

darzustellen.

4.1.4.1 Bremsscheibe

Zur Beschreibung einer Kirchhoffplatte ist lediglich eine Feldvariable notwendig, welche die vertikale Auslenkung der Mittelebene beschreibt. Hierfür wird zunächst das körperfeste Feld $u(R, \Phi, t)$ eingeführt und später auf das raumfeste Feld $w(r, \varphi, t)$ übergegangen. Punkte auf der Mittelebene haben damit die materiellen Koordinaten

$$\mathbf{X} = (R, \Phi, 0)^\top \quad (4.5)$$

sowie die entsprechenden räumlichen Koordinaten

$$\mathbf{x} = (r(R), \varphi(\Phi, t), u(R, \Phi, t))^\top = (r, \varphi, w(r, \varphi, t))^\top \quad (4.6)$$

mit den unabhängigen Ortskoordinaten R, Φ bzw. r, φ . Die Ausdehnung der als Kreisringplatte angenommenen Bremsscheibe ist dann in

$$\text{materiellen Koordinaten} \quad R \in [R_i, R_a] \quad , \quad \Phi \in [0, 2\pi] \quad \text{und in} \quad (4.7)$$

$$\text{räumlichen Koordinaten} \quad r \in [r_i, r_a] \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (4.8)$$

mit den inneren Radien R_i, r_i und den äußeren Radien R_a und r_a .

Die Rotation der Scheibe infolge der aufgeprägten Führungsbewegung lässt sich als Starrkörperrotation um die z -Achse betrachten. Unter der Annahme, dass das räumliche und das materielle Koordinatensystem zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammenfallen, ergibt sich der Zusammenhang

$$\varphi = \Phi + \Omega t. \quad (4.9)$$

Da mit diesem Zusammenhang das räumliche Koordinatensystem zeitlich explizit veränderliche Basisvektoren aufweist, müssen diese bei der Berechnung von Geschwindigkeit und Beschleunigung ebenfalls differenziert werden. Man findet für die materielle Ableitung der Basisvektoren

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\varphi(\Phi; t)) = \overset{\circ}{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \Omega \vec{e}_\varphi \\ -\Omega \vec{e}_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

wobei $\overset{\circ}{(\)}$ Zeitdifferentiation bei festgehaltenen materiellen Koordinaten bedeutet und bei der gegebenen Argumentenliste identisch ist mit der partiellen Zeitableitung, d.h. $\overset{\circ}{(\)} = \frac{\partial}{\partial t}(\)$. Siehe hierzu auch Abbildung 4.16.

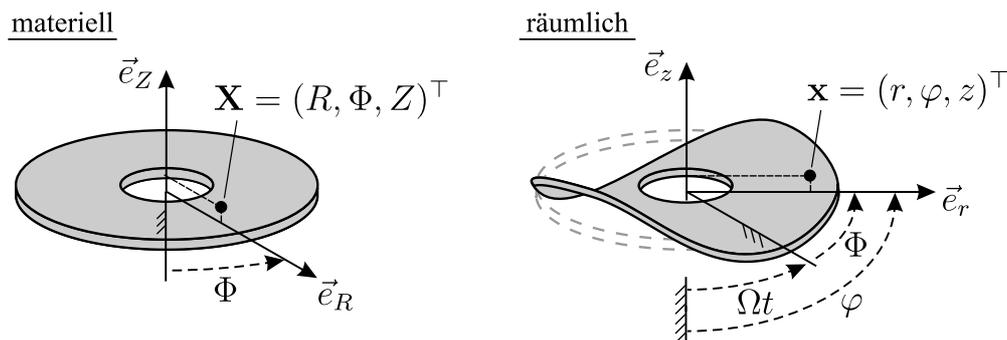


Abbildung 4.16: Rotierende Kreisringplatte: materielle und räumliche Koordinaten.

Mit der stationären Führungsbewegung lautet der Zusammenhang zwischen materiellen und räumlichen Zylinderkoordinaten eines Punktes auf der Mittelebene

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}_M = \begin{pmatrix} R \\ \Phi \\ u(R, \Phi; t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{x}_M = \mathbf{X} + \mathbf{v}_T t \quad (4.11)$$

(siehe auch Kapitel 2.3), wobei $u = u(R, \Phi; t)$ das mitbewegte Feld (in materiellen Koordinaten) der Auslenkung der Mittelebene ist. Der Ortsvektor eines materiellen Punktes \mathbf{X}_M auf der Mittelebene ist dann

$$\vec{r}_M(\mathbf{X}_M) = \mathbf{E}(\varphi)^\top \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ u(R, \Phi; t) \end{bmatrix} \quad \text{mit } \varphi = \Phi + \Omega t. \quad (4.12)$$

Damit gilt für die Geschwindigkeit \vec{v}_M eines materiellen Punktes \mathbf{X} in der Mittelebene

$$\vec{v}_M = \frac{d}{dt} \Big|_{\mathbf{x}} \vec{r}_M = \Omega \begin{bmatrix} \vec{e}_\varphi \\ -\vec{e}_r \\ 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ u(R, \Phi; t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{e}_r(\varphi) \\ \vec{e}_\varphi(\varphi) \\ \vec{e}_z \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{u}(R, \Phi; t) \end{bmatrix} = \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} 0 \\ R\Omega \\ \dot{u} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

und für die Beschleunigung

$$\vec{a}_M = \frac{d}{dt} \Big|_{\mathbf{x}} \vec{v}_M = \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} -\Omega^2 R \\ 0 \\ \ddot{u} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Damit sind die kinematischen Größen zur Beschreibung der Dynamik einer Kirchhoff-Platte in materiellen Koordinaten bekannt.

Zur Formulierung der virtuellen Arbeiten der Oberflächenkräfte ist eine detaillierte Betrachtung notwendig. Zu diesem Zweck soll im Wesentlichen ein Ansatz zur Formulierung der Kinematik verfolgt werden, wie er unter anderem bei der Beschreibung der Bewegung von Oberflächenpunkten bei Wanderwellenmotoren angewandt wird ([78]). Zur Modellierung reibungsregter Schwingungen bei Bremsen wurde dieser Ansatz bereits in [30] verwendet.

Um die kinematischen Eigenschaften in einem materiellen Punkt zu beschreiben, wird eine lokale Vektorbasis benötigt. Die normierten Tangentenvektoren \vec{t}_r , \vec{t}_φ an die deformierte Mittelebene lauten

$$\vec{t}_r^* = \frac{\partial}{\partial r} \vec{r}_M = \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ u_{,r} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{t}_r = \frac{\vec{t}_r^*}{|\vec{t}_r^*|} \approx \vec{t}_r^* \quad (u_{,r} \ll 1), \quad (4.15)$$

$$\vec{t}_\varphi^* = \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{r}_M = \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ u_{,\varphi} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{t}_\varphi = \frac{\vec{t}_\varphi^*}{|\vec{t}_\varphi^*|} \approx \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{r} u_{,\varphi} \end{bmatrix}, \quad (u_{,r} \ll 1), \quad (4.16)$$

und damit lässt sich eine normierte Flächennormale \vec{n} als

$$\vec{n} = \vec{t}_r \times \vec{t}_\varphi = \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} -u_{,r} \\ -\frac{1}{r} u_{,\varphi} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

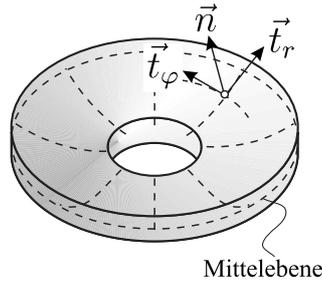


Abbildung 4.17: Kontaktkinematik: dargestellt ist die lokale Vektorbasis $(\vec{t}_r, \vec{t}_\varphi, \vec{n})$ in einem Punkt der Mittlelebene.

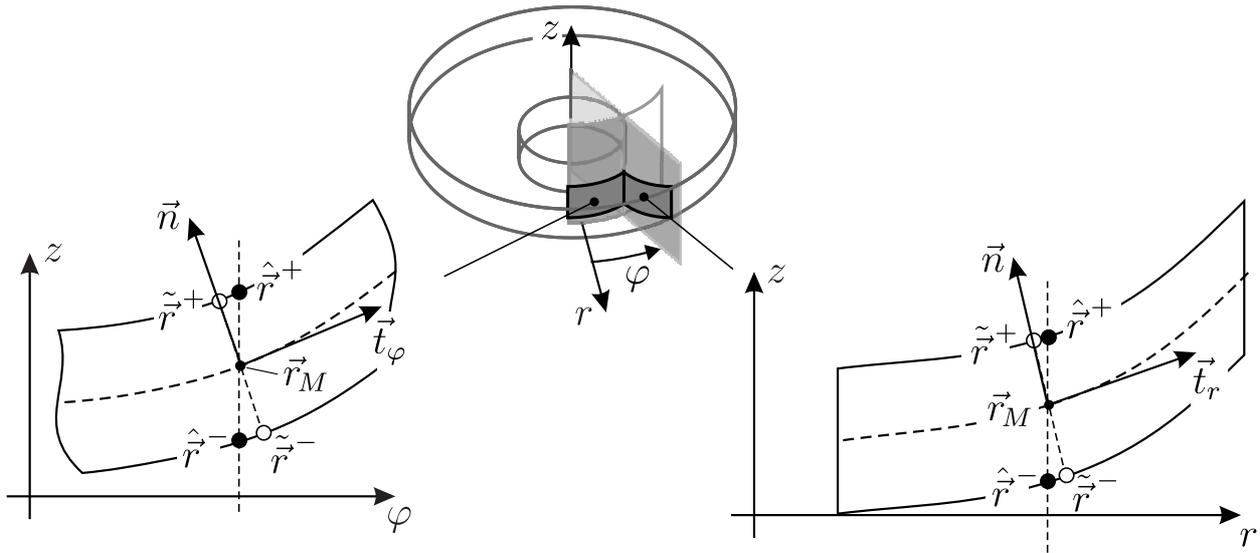


Abbildung 4.18: Kontaktkinematik: Kontaktpunkte.

angeben (siehe Abbildung 4.17).

Ist h die Dicke der Platte, so haben Punkte auf der Oberfläche der Kreisringplatte, die im *undeformierten* Zustand vertikal über bzw. unter einem Punkt \mathbf{X}_M liegen, den Ortsvektor

$$\vec{r}^{\pm}(\mathbf{X}_M) = \vec{r}_M(\mathbf{X}_M) \pm \frac{h}{2} \vec{n}(\mathbf{X}_M) \quad (4.18)$$

$$= \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} r \mp \frac{h}{2} u_{,r} \\ \mp \frac{h}{2r} u_{,\varphi} \\ u \pm \frac{h}{2} \end{bmatrix} \stackrel{\substack{u_{,r} \ll 1 \\ \frac{1}{r} u_{,\varphi} \ll 1}}{\approx} \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ u \pm \frac{h}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Die Annahmen $u_{,r} \ll 1$ und $\frac{1}{r} u_{,\varphi} \ll 1$ können zumindest für Schwingungen mit Wellenlängen, die bezogen auf die Amplituden vergleichsweise groß sind, ohne weiteres gemacht werden (siehe auch Abschnitt 4.1.3).

Im Folgenden bezeichnen Tilden ($\tilde{}$) materielle Punkte, die sich im undeformierten Zustand senkrecht über einem betrachteten Punkt der Mittlelebene befinden, während Accents circumflexes ($\hat{}$) Ortsvektoren von Punkten kennzeichnen, die im deformierten Zustand räumlich

senkrecht über diesem Punkt liegen. Wie aus Gleichung (4.19) ersichtlich, gilt für kleine Deformationen ($u_{,r} \ll 1$, $\frac{1}{r}u_{,\varphi} \ll 1$)

$$\hat{r}^{\pm} \approx \tilde{r}^{\pm}. \quad (4.20)$$

Für einen Punkt der neutralen Ebene mit den materiellen und räumlichen Koordinaten

$$\mathbf{X}_M = (R, \Phi, 0)^{\top} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_M = (R, \Phi + \Omega t, u(R, \Phi))^{\top} \quad (4.21)$$

haben die zugehörigen Oberflächenpunkte vertikal über bzw. unter \mathbf{X}_M dann näherungsweise die räumlichen Koordinaten

$$\mathbf{x}^{\pm} \approx \left(R, \Phi + \Omega t, u(R, \Phi) \pm \frac{h}{2} \right) = \mathbf{x}_M \pm \left(0, 0, \frac{h}{2} \right) \quad (4.22)$$

(siehe Abbildung 4.18).

Neben der Lage wird zur Ermittlung der Reibkrafttrichtung sowie zur Aufstellung der virtuellen Verschiebung noch die Geschwindigkeit des materiellen Oberflächenpunktes benötigt.

Analog zum bisherigen Vorgehen lässt sich die Geschwindigkeit der Oberflächenpunkte, die sich entlang der Normalen \vec{n} der Mittelebene über bzw. unter $\vec{r}(\mathbf{X}_M)$ befinden, über

$$\tilde{v}^{\pm}(\mathbf{X}_M) = \frac{d}{dt} \Big|_{\mathbf{x}} \left(\mathbf{E}^{\top} \begin{bmatrix} r \mp \frac{h}{2} u_{,r} \\ \mp \frac{h}{2r} u_{,\varphi} \\ u \pm \frac{h}{2} \end{bmatrix} \right) = \mathbf{E}^{\top} \begin{bmatrix} \pm \frac{h}{2R} \Omega u_{,\varphi} \mp \frac{h}{2} \overset{\circ}{u}_{,r} \\ \Omega R \mp \frac{h}{2} \Omega u_{,r} \mp \frac{h}{2R} \overset{\circ}{u}_{,\varphi} \\ \overset{\circ}{u} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

ermitteln. Wie zuvor festgestellt, gilt $\hat{r}^{\pm} \approx \tilde{r}^{\pm}$ und damit näherungsweise auch

$$\hat{v}^{\pm} \approx \tilde{v}^{\pm}. \quad (4.24)$$

Mit der Geschwindigkeit eines materiellen Punktes ist es nun einfach, die virtuelle Verschiebung anzugeben:

$$\delta \hat{r}^{\pm} = \mathbf{E}^{\top} \begin{bmatrix} \mp \frac{h}{2} \delta u_{,r} \\ \mp \frac{h}{2R} \delta u_{,\varphi} \\ \delta u \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Damit sind alle benötigten kinematischen Größen prinzipiell bekannt. Um die Kontakte zwischen den Körpern des Beispielproblems zu beschreiben, ist es zweckmäßig, auf eine Beschreibung in räumlichen Koordinaten $\mathbf{x} = (r, \varphi)^{\top}$ zu wechseln (siehe Kapitel 2.3). Dabei gilt zwischen beiden Feldern die Verknüpfung

$$w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t). \quad (4.26)$$

Mit $\overset{\circ}{u} = \dot{w} + \Omega w_{,\varphi}$ ist eine Beziehung zwischen der materiellen Ableitung $\overset{\circ}{u}$ des Feldes u und dem totalen Differential \dot{w} der nunmehr räumlich adressierten Feldvariable $w(r, \varphi, t)$ gegeben. Aus der Führungsbewegung resultieren die

$$\text{Führungsgeschwindigkeit: } \vec{v}_F = \mathbf{E}(\varphi)^\top \begin{bmatrix} 0 \\ r\Omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und die} \quad (4.27)$$

$$\text{Führungsbeschleunigung: } \vec{a}_F = \mathbf{E}(\varphi)^\top \begin{bmatrix} -r\Omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Die kinematischen Größen eines Punktes \mathbf{x}_M auf der Mittelebene lauten damit

$$\vec{r}_M(\mathbf{x}_M) = \mathbf{E}(\varphi)^\top \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ w(r, \varphi; t) \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_M(\mathbf{x}_M) = \mathbf{E}(\varphi)^\top \begin{bmatrix} 0 \\ r\Omega \\ \dot{w} + \Omega w_{,\varphi} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\vec{a}_M(\mathbf{x}_M) = \mathbf{E}(\varphi)^\top \begin{bmatrix} -\Omega^2 r \\ 0 \\ \ddot{w} + 2\Omega \dot{w}_{,\varphi} + \Omega^2 w_{,\varphi\varphi} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

womit die virtuelle Verrückung

$$\delta \vec{r}_M(\mathbf{x}_M) = \mathbf{E}(\varphi)^\top \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta w(r, \varphi; t) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

folgt. Für die materiellen Punkte an der Oberfläche bei $\mathbf{x} = (r, \varphi)^\top$ ergibt sich durch Einsetzen in (4.19), (4.23) und (4.25)

$$\hat{r}^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ w(r, \varphi; t) \pm \frac{h}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

$$\hat{v}^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} \pm \frac{h}{2r} \Omega w_{,\varphi} \mp \frac{h}{2} \dot{w}_{,r} \mp \Omega \frac{h}{2} w_{,\varphi r} \\ \Omega r \mp \frac{h}{2} \Omega w_{,r} \mp \frac{h}{2r} \dot{w}_{,\varphi} \mp \Omega \frac{h}{2r} w_{,\varphi\varphi} \\ \dot{w} + \Omega w_{,\varphi} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

$$\delta \hat{r}^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} \mp \frac{h}{2} \delta w_{,r} \\ \mp \frac{h}{2r} \delta w_{,\varphi} \\ \delta w \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

4.1.4.2 Bremsbeläge

Die Bremsbeläge bestehen aus einer sogenannten Rückenplatte, auf der das Reibmaterial befestigt ist. Vereinfachend wird angenommen, dass die Rückenplatte starr ist und sich lediglich das Reibmaterial deformieren kann. Im Folgenden wird zudem vorausgesetzt, dass die

Bremsbeläge symmetrisch zum Basisvektor $\vec{e}_r(\varphi = 0)$ angeordnet sind. In der Ausgangslage sind die Rückenplatten parallel zur Scheibenoberfläche (Abstand h_p). Ihre allgemeine Lage soll durch eine Auslenkung $z_{1/2}$ in z -Richtung mit überlagerter Verkipfung $\alpha_{1/2}$ um die Symmetrieachse $\vec{e}_r(\varphi = 0)$ dargestellt werden (siehe Abbildung 4.19).

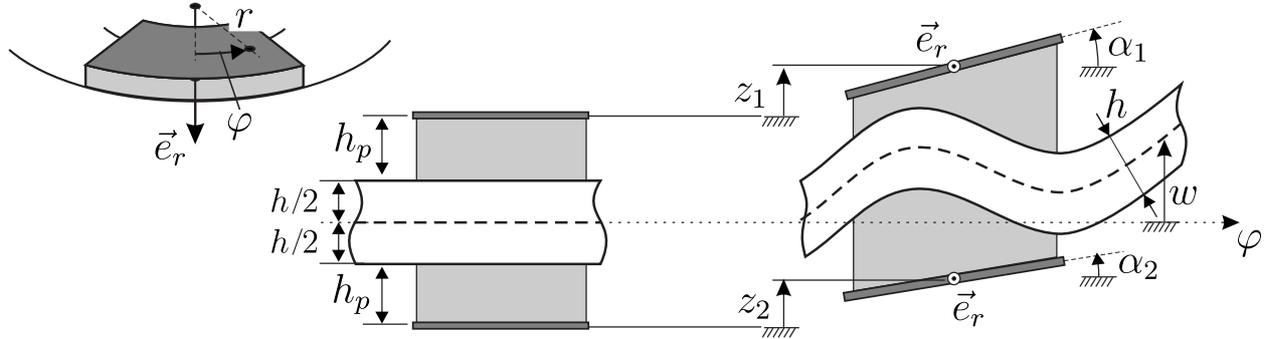


Abbildung 4.19: Bremsbelag: Kinematik.

Wie zuvor bei der Bremsscheibe lässt sich auch die Ausdehnung der Beläge mit Hilfe zweier unabhängiger Ortskoordinaten beschreiben. Da die Beläge keiner Führungsbewegung unterworfen sind, kann die Ausdehnung direkt in räumlichen Koordinaten mit

$$r \in [r_i, r_a] \quad , \quad \varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0] \quad (4.35)$$

angegeben werden (siehe Abbildung 4.20).

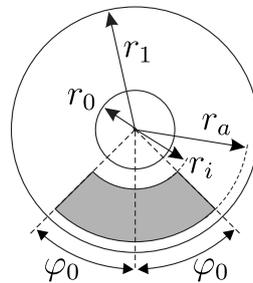


Abbildung 4.20: Bremsbelag: Bereich.

Für kleine Verkipfungen $\alpha_{1/2} \ll 1$ lauten die Ortsvektoren materieller Punkte auf der Mittelebene einer Rückenplatte

$$\vec{r}_{P_{1/2}}(r, \varphi) = \mathbf{E}^T \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \pm(h/2 + h_p) + z_{1/2} + r \sin \varphi \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\approx \mathbf{E}^T \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ \pm(h/2 + h_p) + z_{1/2} + r \sin \varphi \alpha \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Da der durch die Beläge abgedeckte Winkel φ nicht klein sein muss, darf $\sin \varphi$ nicht ohne weiteres linearisiert werden und wird beibehalten.

Es lässt sich zudem zeigen, daß die Verschiebungen der Kontaktbereiche infolge von Verkip-
pungen $\alpha_{1/2}$ klein von höherer Ordnung sind und im Folgenden vernachlässigt werden können.
Es wird daher im Rahmen des Modells angenommen, dass die Kontaktflächen der beiden
Beläge jeweils direkt senkrecht unter bzw. über der Rückenplatte liegen. Zudem wird das
leichte Überstehen der jeweiligen Rückenplatte über das Belagsmaterial vernachlässigt.

Oberflächenpunkte des Belags im Kontakt mit der Scheibe haben mit diesen Annahmen
– unter Voraussetzung dauerhaft geschlossener Kontakte zwischen Scheibe und Belägen –
die Ortsvektoren

$$\hat{r}_{1/2}(r, \varphi, t) = \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ w(r, \varphi, t) \pm h/2 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes in einer solchen Kontaktfläche eines Be-
lages ist

$$\hat{v}_{1/2}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{w}(r, \varphi, t) \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Die Kompression $\Delta h_{1/2}$ der Beläge 1/2 in vertikaler Richtung ist also

$$\Delta h_{1/2}(r, \varphi, t) = \pm (w(r, \varphi, t) - z_{1/2} - r \sin \varphi \alpha_{1/2}). \quad (4.40)$$

Aufgrund dieser Definition ist $\Delta h_{1/2} > 0$, wenn der Belag komprimiert wird und umgekehrt.

4.1.4.3 Kontakte

Im vorliegenden Beispiel wird die Kontaktfläche der Bremsbeläge in Abhängigkeit der
Oberflächenauslenkung der Bremsscheibe ausgedrückt. Die Nichteindringbedingung ist somit
immer erfüllt. Dies ist anhand der relativen Normalgeschwindigkeit

$$v_{rel,n} = \hat{v}^\pm \cdot \vec{n}^\pm - \hat{v}_{1/2} \cdot \vec{n}^\pm = \dot{w} + \Omega w_\varphi + (\Omega r) \left(-\frac{1}{r} w_{,\varphi}\right) + \mathcal{O}(w^2) - \dot{w} = 0 \quad (4.41)$$

zwischen einem Paar materieller Punkte auf beiden Oberflächen leicht nachprüfbar. Es ist
daher im Folgenden nicht notwendig, diese kinematische Bedingung durch eine Penalty-
Formulierung oder mit Hilfe Lagrangescher Multiplikatoren zu erzwingen. Weitere grund-
legende Eigenschaften sind in Abschnitt 2.3.2.3 dargestellt.

In Abkürzung der in Kapitel 2 eingeführten allgemeinen Schreibweise werden im Folgenden
die Kontaktbereiche zwischen der Bremsscheibe und Belag 1 bzw. Belag 2 mit $\Gamma_C^{(1)}$ und $\Gamma_C^{(2)}$
bezeichnet. Es gilt

$$\Gamma_C^{(1)/(2)} = \left\{ (r, \varphi, z) \mid r \in [r_0, r_1], \varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0], z = w(r, \varphi) \pm \frac{h}{2} \right\}. \quad (4.42)$$

Die Relativgeschwindigkeit zwischen Kontaktpunkten auf der Scheibe und einem Belag bei $\mathbf{x} = (r, \varphi)$ lautet

$$\vec{v}_{rel}(r, \varphi) = \hat{v}^\pm - \hat{v}_{1/2} \quad (4.43)$$

$$= \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} \pm \frac{h}{2r} \Omega w_{,\varphi} \mp \frac{h}{2} \dot{w}_{,r} \mp \frac{h}{2} \Omega w_{,\varphi r} \\ \Omega r \mp \frac{h}{2} \Omega w_{,r} \mp \frac{h}{2r} \dot{w}_{,\varphi} \mp \Omega \frac{h}{2r} w_{,\varphi\varphi} \\ \Omega w_{,\varphi} \end{bmatrix}, \quad (r, \varphi) \in \Gamma_C^{(1)/(2)}. \quad (4.44)$$

Wie bereits dargestellt, kann bei den hier interessierenden Schwingungen von vergleichsweise kleinen Neigungen und Krümmungen der Scheibenoberfläche ausgegangen werden. Zudem ist für realistische Betriebsparameter

$$\Omega r \gg \Omega h w_{,r}, h \dot{w}_{,r}, \Omega w_{,\varphi}, \dot{w}_{,\varphi}, \Omega h w_{,r\varphi}, \Omega w_{,\varphi\varphi} \quad (4.45)$$

ohne weiteres gegeben, sodass $|\vec{v}_{rel}| \approx \Omega r$ gilt. Die Richtung der Gleitreibungsspannung in einem Oberflächenpunkt auf der Scheibe im Kontakt zu Belag 1 bzw. 2 lautet dann

$$\vec{e}_t^{(1)/(2)} = -\mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} \pm \frac{h}{2r^2} w_{,\varphi} \mp \frac{h}{2\Omega r} \dot{w}_{,r} \mp \frac{h}{2r} w_{,\varphi r} \\ 1 \mp \frac{h}{2r} w_{,r} \mp \frac{h}{2\Omega r^2} \dot{w}_{,\varphi} \mp \frac{h}{2r^2} w_{,\varphi\varphi} \\ \frac{1}{r} w_{,\varphi} \end{bmatrix} + \mathcal{O}(w^2) \quad (4.46)$$

$$\approx -\mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \pm \frac{h}{2r} \begin{pmatrix} +\frac{1}{r} w_{,\varphi} - w_{,\varphi r} \\ -w_{,r} - \frac{1}{r} w_{,\varphi\varphi} \\ \pm \frac{2}{h} w_{,\varphi} \end{pmatrix} \pm \frac{1}{\Omega} \frac{h}{2r} \begin{pmatrix} -\dot{w}_{,r} \\ -\frac{1}{r} \dot{w}_{,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Deutlich ist zu erkennen, dass die Richtung der Gleitreibungskraft in erster Näherung Terme enthält, die proportional zur Auslenkung und zur Auslenkungsgeschwindigkeit der Oberfläche sind.

Die Differenz der virtuellen Verschiebungen der Oberflächenpunkte auf der Scheibe und dem Belag lautet

$$\delta(\hat{r}^\pm - \hat{r}_{1/2}) = \mp \frac{h}{2r} \mathbf{E}^\top \begin{bmatrix} r \delta w_{,r} \\ \delta w_{,\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Es ist hierbei offensichtlich, dass die Projektion der Kontaktspannungen auf die Vertikale \vec{e}_z keinen Beitrag zur virtuellen Arbeit und somit zur Dynamik des Systems leistet. Letztlich ist dies eine direkte Folgerung aus der kinematischen Nebenbedingung, dass beide Kontaktpartner einander nicht durchdringen.

4.1.5 Kinetik

Integration über die rotierende Ringplatte ergibt ihre kinetische Energie

$$T_D = \frac{1}{2} \rho_D h \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_a} \dot{u}^2 R dR d\Phi = \frac{1}{2} \rho_D h \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} (\dot{w} + \Omega w_{,\varphi})^2 r dr d\varphi. \quad (4.49)$$

Beim Wechsel des Differential $dV = hR dR d\Phi$ auf die räumliche Darstellung $dv = hr dr d\varphi$ wurden dabei kleine Deformationen unterstellt, sodass für die Determinante des Deformationsgradienten näherungsweise $J = \det F \approx 1$ ist und damit $dV \approx dv$ gesetzt werden kann. Analog gilt für das elastische Potential U_D der Platte im Sinne der Kirchhoffschen Plattentheorie

$$U_D = \frac{1}{2} D \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} \left((\nabla^2 w)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{r} w_{,r\varphi} - \frac{1}{r^2} w_{,\varphi} \right)^2 - w_{,rr} \left(\frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi} - \frac{1}{r} w_{,r} \right) \right) r dr d\varphi \quad (4.50)$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$. Der Parameter $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ist die Plattensteifigkeit, die sich aus dem Elastizitätsmodul E , der Scheibendicke h und der Querkontraktionszahl ν der Bremscheibe zusammensetzt.

Kleine Deformationen der Bremsbeläge können bei der Berechnung der kinetischen Energie vernachlässigt werden, sodass man diese als

$$T_{1/2} = \frac{1}{2} m_p \dot{z}_{1/2}^2 + \frac{1}{2} J_P \dot{\alpha}_{1/2}^2 \quad (4.51)$$

anschreiben kann. Zur Vereinfachung wird davon ausgegangen, dass die Massen m_p und mittlere Drehträgheit J_P beider Beläge gleich sind.

Es wird zudem vereinfachend angenommen, dass die Beläge als Winkler-Bettung modelliert werden können. Die Beläge sind durch die Bremskraft F_B um $s_0 = \frac{F_B}{A_C c_p}$ vorgespannt und haben in der statischen Ruhelage die Höhe h_p . A_C bezeichnet hierbei den Flächeninhalt der gleichgroßen Kontaktbereiche, $c_p = \frac{E_p}{h_p}$ ist die Kompressionssteifigkeit und E_p der E-Modul der Beläge. Das elastische Potential eines Belages lautet dann

$$\begin{aligned} U_{1/2} &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C^{(1)/(2)}} c_p (\Delta h_{1/2} + s_0)^2 da \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C^{(1)/(2)}} c_p [\pm(w - z_{1/2} - r \sin \varphi \alpha_{1/2}) + s_0]^2 da \end{aligned} \quad (4.52)$$

mit der Kompression $\Delta h_{1/2}$ aus der statischen Ruhelage heraus.

Es wird angenommen, dass die innere Dämpfung des Reibbelags die der Bremsscheibe überwiegt. Wird die Dissipation der Bremsbeläge als proportional zur Dehnungsrate angesetzt, lässt sich die virtuelle Arbeit als

$$\begin{aligned}\delta W_{pl,D} &= - \sum_{i=1,2} h_p \int_{\Gamma_C^{(i)}} \sigma_{\text{diss}} \delta \varepsilon \, da \\ &= - \sum_{i=1,2} E_p \eta_p h_p \int_{\Gamma_C^{(i)}} \dot{\varepsilon} \delta \varepsilon \, da = \sum_{i=1,2} -d_p \int_{\Gamma_C^{(i)}} \Delta \dot{h}_i \delta \Delta h_i \, da\end{aligned}\quad (4.53)$$

anschreiben. Mit dem Verlustfaktor η_p gilt für den Dämpfungsparameter $d_p = \frac{E_p \eta_p}{h_p} = \eta_p c_p$ (siehe hierzu [19], [48]).

Auf die Rückseite der beiden Beläge wirken mittig Normalkräfte mit dem konstanten Betrag F_B . Ihre gesamte virtuelle Arbeit ist

$$\delta W_{pl,F} = F_B (-\cos \alpha_1 \delta z_1 + \cos \alpha_2 \delta z_2) \stackrel{\alpha_{1/2} \ll 1}{\approx} F_B (-\delta z_1 + \delta z_2).\quad (4.54)$$

Bereits hier ist abzusehen, dass es für ein Modell zur Stabilitätsuntersuchung irrelevant ist, ob diese Kräfte als mitgehend oder als richtungstreu angesetzt werden. Flatterinstabilität können sie nicht verursachen.

Für die virtuelle Arbeit der Kontaktkräfte am System gilt

$$\delta W_C = \delta W_C^{(1)} + \delta W_C^{(2)} = \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_C^{(i)}} \tau^{(i)} \vec{e}_t^{(i)} \cdot \delta(\hat{r}^\pm - \hat{r}_i) \, da.\quad (4.55)$$

Dabei ist $\vec{e}_t^{(i)}$ der Richtungsvektor der Gleitreibungskraft an der Scheibenoberfläche im Kontakt zu Belag i . Nimmt man an, dass h_p die Dicke eines Belages in der stationären Lösung $z_{1/2} = 0$, $\alpha_{1/2} = 0$ darstellt, so gilt für die Kontaktnormalspannung

$$\sigma_{1/2} = \frac{1}{\cos \alpha} \left(c_p \Delta h_{1/2} + \frac{F_B}{A_C} + d_p \Delta \dot{h}_{1/2} \right) \stackrel{\beta \ll 1}{\approx} \left(c_p \Delta h_{1/2} + c_p \underbrace{\frac{F_B}{A_C c_p}}_{=s_0} + d_p \Delta \dot{h}_{1/2} \right)\quad (4.56)$$

und damit für den Betrag der Gleitreibungsspannung

$$\tau^{(1)/(2)} = \mu (c_p \Delta h_{1/2} + c_p s_0 + d_p \Delta \dot{h}_{1/2}).\quad (4.57)$$

Einsetzen der aufgeführten Energieterme und virtuellen Arbeiten in das Prinzip von Hamilton, Ausführen der notwendigen Variationen und geeigneter partieller Zeitintegrationen

liefert nach etwas Rechnung die schwache Formulierung

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} (\delta w \varrho_D h (\ddot{w} + \Omega \dot{w}_{,\varphi} + \Omega^2 w_{,\varphi\varphi}) + \delta U_D[w]) r dr d\varphi \\
& + c_p \sum_{i=(1,2)} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_{r_{pi}}^{r_{pa}} (\delta w - \delta z_i - r \sin \varphi \delta \alpha_i) (w - z_i - r \sin \varphi \alpha_i) r dr d\varphi \\
& + d_p \sum_{i=(1,2)} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_{r_{pi}}^{r_{pa}} (\delta w - \delta z_i - r \sin \varphi \delta \alpha_i) (\dot{w} - \dot{z}_i - r \sin \varphi \dot{\alpha}_i) r dr d\varphi \\
& + \sum_{i=(1,2)} \left(\delta q_i m_p \ddot{z}_i + \delta \alpha_i J_p \ddot{\alpha}_i \right) = \sum_{i=(1,2)} \delta W_C^{(i)}.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Dabei wurde das statische Gleichgewicht

$$+ \delta z_1 \underbrace{c_p A_C s_0}_{=F_B} - \delta z_2 c_p A_C s_0 = \underbrace{+\delta z_1 F_B - \delta z_2 F_B}_{=\delta W_{pl}} \tag{4.59}$$

bereits abgespalten.

Die Variation des elastischen Potentials $U_D[w]$ der Platte in (4.58) wurde noch nicht weiter ausgeführt, da es sich als praktisch erweist, dies erst im Kontext einer Näherungsformulierung im Sinne von Ritz durchzuführen. Insbesondere würden bei expliziter Ausführung der Variation $\delta U_D[w]$ und anschließender partieller Integration der virtuellen Verrückungen die entstehenden Ausdrücke der dynamischen Randbedingungen sehr unhandlich. Zudem müsste dann schon bei der Wahl der Ansatzfunktionen sichergestellt werden, dass diese die dynamischen Randbedingungen erfüllen.

Die virtuelle Arbeit $\delta W_C = \sum_{i=(1,2)} \delta W_C^{(i)}$ der Kontaktkräfte lautet dabei

$$\delta W_C = \mu c_p h \sum_{i=(1,2)} \int_{\Gamma_C^{(i)}} \frac{1}{2r} (+s_0 + (-1)^{(i-1)} [w - z_i - r \sin \varphi \alpha_i]) \times \tag{4.60}$$

$$\times \left[(-1)^{(i-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h}{2r} \begin{pmatrix} +\frac{1}{r} w_{,\varphi} - w_{,\varphi r} \\ -w_{,r} - \frac{1}{r} w_{,\varphi\varphi} \\ \pm \frac{2}{h} w_{,\varphi} \end{pmatrix} + \frac{1}{\Omega} \frac{h}{2r} \begin{pmatrix} -\dot{w}_{,r} \\ -\frac{1}{r} \dot{w}_{,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} r \delta w_{,r} \\ \delta w_{,\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} da$$

$$+ \mu d_p h \sum_{i=(1,2)} \int_{\Gamma_C^{(i)}} \frac{1}{2r} ((-1)^{(i-1)} [\dot{w} - \dot{z}_i - r \sin \varphi \dot{\alpha}_i]) \times$$

$$\times \left[(-1)^{(i-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h}{2r} \begin{pmatrix} +\frac{1}{r} w_{,\varphi} - w_{,\varphi r} \\ -w_{,r} - \frac{1}{r} w_{,\varphi\varphi} \\ \pm \frac{2}{h} w_{,\varphi} \end{pmatrix} + \frac{1}{\Omega} \frac{h}{2r} \begin{pmatrix} -\dot{w}_{,r} \\ -\frac{1}{r} \dot{w}_{,\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} r \delta w_{,r} \\ \delta w_{,\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} da$$

$$\tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu c_p h \int_{\Gamma_C} \frac{1}{2r} (2w - (z_1 + z_2) - r \sin \varphi (\alpha_1 + \alpha_2)) \delta w_{,\varphi} + \\
&\quad 2s_0 \frac{h}{4r^2} \left[\begin{pmatrix} +\frac{1}{r} w_{,\varphi} - w_{,\varphi r} \\ -w_{,r} - \frac{1}{r} w_{,\varphi\varphi} \end{pmatrix} + \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} -\dot{w}_{,r} \\ -\frac{1}{r} \dot{w}_{,\varphi} \end{pmatrix} \right]^\top \begin{bmatrix} r \delta w_{,r} \\ \delta w_{,\varphi} \end{bmatrix} da \\
&\quad + \mu d_p h \int_{\Gamma_C} \frac{1}{2r} (2w - (z_1 + z_2) - r \sin \varphi (\alpha_1 + \alpha_2)) \delta w_{,\varphi} da + \mathcal{O}(w^2). \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Der dominante Einfluss des Produkts aus Gleitreibungskoeffizient μ , Kompressionssteifigkeit c_p bzw. Dämpfung d_p des Belagmaterials sowie der Scheibendicke h ist an dieser Stelle deutlich zu erkennen.

4.1.6 Diskretisierung

Die experimentellen Untersuchungen haben gezeigt, dass die Schwingungen der rotierenden Platte in raumfesten Koordinaten denen der ruhenden Platte ähneln. Offensichtlich stellt die Lösung der ruhenden Kreisringplatte ein ähnliches Problem dar und kann zum Aufbau von Näherungslösungen verwendet werden.

Schwingungen einer ruhenden Kreisringplatte werden durch die partielle Differentialgleichung

$$\rho_D h \ddot{w} + D \nabla^4 w = 0 \quad , \quad w = w(r, \varphi, t), \quad r \in [r_i, r_a], \quad \varphi \in [0, 2\pi] \tag{4.63}$$

beschrieben, wobei ∇ den Laplace-Operator bezeichnet. Aufgrund der Periodizität $w(\varphi = \bar{\varphi} + 2\pi, t) \stackrel{!}{=} w(\varphi = \bar{\varphi}, t)$ der Kreisringplatte liegt ein Separationsansatz der Form

$$w(r, \varphi, t) = B(r)W(\varphi, t) \quad \text{mit } W(\varphi = \bar{\varphi} + 2\pi, t) = W(\varphi = \bar{\varphi}, t) \tag{4.64}$$

nahe, der die Verschiebung $w(r, \varphi, t)$ als Produkt einer Radialfunktion $B(r)$ und einer kreisperiodischen Umfangsfunktion $W(\varphi, t)$ darstellt.

Im Experiment wurde zudem festgestellt, dass die Schwingungsform beim Quietschen 4 Knotendurchmesser und nur einen Knotenkreis aufweist. Offensichtlich ist die Abhängigkeit der Auslenkung $w(r, \varphi)$ von der Umfangskoordinate φ wichtiger, als die von der Radialkoordinate r .

Es sollen nun im Folgenden Näherungsansätze gefunden werden, die eine einfache und übersichtliche Betrachtung gestatten, und das beobachtete Schwingungsverhalten ausreichend genau wiedergeben.

Unter der vereinfachenden Annahme, dass die Platte bei $r = 0$ starr mit einer Welle vernachlässigbaren Durchmessers befestigt ist, lautet ein möglicher Ansatz für die Radialfunktion $B(r) = \gamma r^2$. Dieser Ansatz stimmt gut mit den im Experiment beobachteten Schwingungsformen überein.

Die Konstante γ ($[\gamma] = \text{m}^{-1}$) dient hierbei lediglich der Einheitenanpassung, sodass $[B(r)] = \text{m}$ gilt. Damit folgt für die gesamte Näherung

$$w \approx \gamma r^2 W(\varphi, t) \quad \text{mit } W(\varphi = \bar{\varphi} + 2\pi, t) = W(\varphi = \bar{\varphi}, t). \quad (4.65)$$

Es folgen hieraus außerdem die Näherungen

$$\dot{w} \approx \gamma r^2 \dot{W} \quad , \quad \ddot{w} \approx \gamma r^2 \ddot{W} \quad \dots \quad (4.66)$$

$$w_{,r} \approx 2\gamma r W \quad , \quad w_{,rr} \approx 2\gamma W \quad \dots \quad (4.67)$$

$$w_{,\varphi} \approx \gamma r^2 W_{\varphi} \quad , \quad w_{,\varphi\varphi} \approx \gamma r^2 W_{\varphi\varphi} \quad \dots \quad (4.68)$$

$$\text{usw.} \quad (4.69)$$

Einsetzen in das Plattenpotential (4.50) liefert zunächst das genäherte Potential

$$\tilde{U}_D = \frac{D}{2} \gamma^2 \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} ((4W + W_{\varphi\varphi})^2 + 2(1 - \nu) [W_{\varphi}^2 - 2W(W_{\varphi\varphi} - 2W)]) r dr d\varphi \quad (4.70)$$

und nach Ausführen der Variation folgt

$$\delta \tilde{U}_D = \frac{D}{2} \gamma^2 \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} 2(4W + W_{\varphi\varphi}) (4\delta W + \delta W_{\varphi\varphi}) \quad (4.71)$$

$$+ 2(1 - \nu) [2W_{\varphi} \delta W_{\varphi} - 2\delta W (W_{\varphi\varphi} - 2W) - 2W(\delta W_{\varphi\varphi} - 2\delta W)] r dr d\varphi$$

$$= D \gamma^2 \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} \delta W \left(4(4W + W_{\varphi\varphi}) + 2(1 - \nu) [4W - W_{\varphi\varphi}] \right) \quad (4.72)$$

$$+ \delta W_{\varphi} \left(2(1 - \nu) W_{\varphi} \right) + \delta W_{\varphi\varphi} \left(4W + W_{\varphi\varphi} - 2(1 - \nu) W \right) r dr d\varphi.$$

Durch diesen Ansatz lässt sich das Problem deutlich vereinfachen. Nunmehr ist nur noch eine partielle Differentialgleichung in φ und t zu lösen, anstelle einer in r , φ und t . Da die Lösungen periodisch über den Umfang sein müssen und an der Übergangsstelle stetige Ableitungen aufweisen müssen, bietet sich ein System harmonischer Funktionen der Form

$$W(\varphi, t) = \sum_{k=1}^m \left(a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi) \right) \quad (4.73)$$

an. Da im Experiment keine Starrkörperbewegung der Bremsscheibe in axialer Richtung beobachtet werden kann, sind keine Anteile 0ter Ordnung notwendig. Dieses System von

Ansatzfunktionen lässt sich mit geeigneten Matrizen auch als

$$W(\varphi, t) = \Phi \mathbf{q} \quad (4.74)$$

mit

$$\Phi = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), \dots, \cos(k\varphi), \sin(k\varphi), \dots, \cos(m\varphi), \sin(m\varphi)), \quad (4.75)$$

$$\mathbf{q} = (a_1, b_1, \dots, a_k, b_k, \dots, a_m, b_m)^\top \quad (4.76)$$

mit $\Phi \in \mathbb{R}^{(1 \times 2m)}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{(2m \times 1)}$ darstellen. Für die benötigten Ableitungen gilt

$$\dot{W}(\varphi, t) = \Phi \dot{\mathbf{q}}, \quad \ddot{W}(\varphi, t) = \Phi \ddot{\mathbf{q}} \quad (4.77)$$

sowie

$$W_\varphi(\varphi, t) = \Phi_\varphi \mathbf{q}, \quad W_{\varphi\varphi}(\varphi, t) = \Phi_{\varphi\varphi} \mathbf{q} \quad (4.78)$$

mit

$$\Phi_\varphi = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi), \dots, -m \sin(m\varphi), m \cos(m\varphi)) \quad (4.79)$$

$$\Phi_{\varphi\varphi} = 4\pi^2 (-\cos(\varphi), -\sin(\varphi), \dots, -m^2 \cos(m\varphi), -m^2 \sin(m\varphi)). \quad (4.80)$$

Die entsprechenden Näherungslösungen für w lauten damit

$$w(r, \varphi, t) \approx \gamma r^2 W(\varphi, t) = \gamma r^2 \Phi \mathbf{q}, \quad w_r(r, \varphi, t) \approx \gamma 2r \Phi \mathbf{q}, \text{ usw.} \quad (4.81)$$

Da die Ansatzfunktionen in $\Phi = \Phi(\varphi)$ explizite Funktionen sind, lautet die Variation

$$\delta w = \gamma r^2 \delta \mathbf{q}^\top \Phi^\top. \quad (4.82)$$

Mit diesen Näherungsausdrücken ergibt sich aus (4.58)

$$\begin{aligned}
& \delta \mathbf{q}^\top \left\{ \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} \gamma^2 \varrho_D h \Phi^\top \Phi r^5 dr d\varphi}_{=: \mathbf{M}_D} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\Omega \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} \gamma^2 \varrho_D h \Phi^\top \Phi_\varphi r^5 dr d\varphi}_{=: \mathbf{G}_D} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\Omega^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} \gamma^2 \varrho_D h \Phi^\top \Phi_{\varphi\varphi} r^5 dr d\varphi}_{=: \mathbf{M}_D^*} \mathbf{q} \right. \\
& + \left. \underbrace{\left(D \gamma^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{r_a} 16 \Phi^\top \Phi + 8 \Phi^\top \Phi_{\varphi\varphi} + \Phi_{\varphi\varphi}^\top \Phi_{\varphi\varphi} + 2(1-\nu) [4 \Phi^\top \Phi - 2 \Phi^\top \Phi_{\varphi\varphi} + \Phi_\varphi^\top \Phi_\varphi] r dr d\varphi \right)}_{=: \mathbf{K}_{D1}} \mathbf{q} \right. \\
& + \underbrace{c_p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{r_a} \gamma^2 \Phi^\top \Phi r^5 dr d\varphi}_{=: \mathbf{K}_{D2}} \mathbf{q} - \underbrace{\begin{bmatrix} c_p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{r_1} \gamma \Phi^\top r^3 dr d\varphi & c_p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{r_1} \gamma \Phi^\top r^3 dr d\varphi \\ -\varphi_0 r_0 & -\varphi_0 r_0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{K}_{DP|z}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\
& - \underbrace{\begin{bmatrix} c_p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{r_1} \Phi^\top \gamma r^4 \sin \varphi dr d\varphi & c_p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{r_1} \gamma \Phi^\top r^4 \sin \varphi dr d\varphi \\ -\varphi_0 r_0 & -\varphi_0 r_0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{K}_{DP|\alpha}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \left. \right\} \\
& + \delta \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^\top \left\{ - \underbrace{\begin{bmatrix} c_p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{r_1} \gamma \Phi r^3 dr d\varphi \\ -\varphi_0 r_0 & \varphi_0 r_1 \\ c_p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{r_1} \gamma \Phi r^3 dr d\varphi \\ -\varphi_0 r_0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{K}_{DP|z}^\top} \mathbf{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_p A_C & 0 \\ 0 & c_p A_C \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{K}_{P|z}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.83) \\
& + \delta \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}^\top \left\{ - \underbrace{\begin{bmatrix} c_p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{r_1} \gamma \Phi r^4 \sin \varphi dr d\varphi \\ -\varphi_0 r_0 & \varphi_0 r_1 \\ c_p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{r_1} \gamma \Phi r^4 \sin \varphi dr d\varphi \\ -\varphi_0 r_0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{K}_{DP|\alpha}^\top} \mathbf{q} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{r_1} r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi & 0 \\ -\varphi_0 r_0 & \\ 0 & c_p \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^{r_1} r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi \\ & -\varphi_0 r_0 \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{K}_{P|\alpha}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \right\} \\
& + \delta \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_p \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{M}_{P|z}} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} J_p & 0 \\ 0 & J_p \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{M}_{P|\alpha}} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \end{bmatrix} = \delta \bar{W}_C.
\end{aligned}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden die Beiträge aus der inneren Dämpfung der Bremsbeläge hier nicht angegeben. Diese entsprechen aufgrund des beinahe identischen Aufbaus (vgl. Kapitel 2.3) weitgehend den Beiträgen aus den Belagssteifigkeiten und lassen sich aus den Matrizen \mathbf{K}_{D2} , $\mathbf{K}_{DP|z}$, $\mathbf{K}_{DP|\alpha}$, $\mathbf{K}_{P|z}$ und $\mathbf{K}_{P|\alpha}$ einfach durch Austausch von c_p

durch d_p ermitteln. Hierdurch entstehen dann die Matrizen

$$\mathbf{D}_{D2}, \mathbf{D}_{DP|z}, \mathbf{D}_{DP|\alpha}, \mathbf{D}_{P|z} \text{ und } \mathbf{D}_{P|\alpha}. \quad (4.84)$$

Die Diskretisierung $\delta\bar{W}_C$ der virtuellen Arbeit wird später vorgenommen.

Fasst man die generalisierten Koordinaten in einer Matrix

$$\mathbf{z} = [\mathbf{q}^\top, \gamma z_1, \gamma z_2, \alpha_1, \alpha_2]^\top \quad (4.85)$$

zusammen, so lässt sich (4.83) mit (4.84) und $\mathbf{K}_D = \mathbf{K}_{D1} + \mathbf{K}_{D2}$ kompakt als

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{z}^\top \left\{ \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{P,z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{P,\alpha} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{z}} + \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{G}_D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{D2} & \mathbf{D}_{DP|z} & \mathbf{D}_{DP|\alpha} \\ \mathbf{D}_{DP|z}^\top & \mathbf{D}_{P|z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{DP|\alpha}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{P|\alpha} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_D + \Omega^2 \mathbf{M}_D^* & \mathbf{K}_{DP|z} & \mathbf{K}_{DP|\alpha} \\ \mathbf{K}_{DP|z}^\top & \mathbf{K}_{P|z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{DP|\alpha}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{P|\alpha} \end{bmatrix} \mathbf{z} \end{aligned} \right\} = \delta\bar{W}_C(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (4.86)$$

schreiben. Der Vorfaktor γ dient hierbei wiederum der Einheitenanpassung, sodass jedes Element q_i von \mathbf{q} dimensionslos ist (d.h. $[q_i] = 1$). Die hieraus entstehenden Bewegungsgleichungen haben die Struktur

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + [\Omega\mathbf{G} + d_p\mathbf{D}]\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{F}_R(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) \quad (4.87)$$

mit $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top$, $\mathbf{G} = -\mathbf{G}^\top$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}^\top$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}^\top$ und der generalisierten Kraft \mathbf{F}_R der Kontaktspannungen, die durch $\delta\mathbf{z}^\top \mathbf{F}_R = \delta\bar{W}_C(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ definiert ist.

Gleichermaßen lässt sich mit diesen Ansätzen auch die virtuelle Arbeit (4.62) der Kontaktspannungen diskretisieren.

Einsetzen in (4.62) ergibt

$$\begin{aligned}
\delta\bar{W}_C = \delta\mathbf{q}^\top \frac{\mu c_p h}{2} & \left\{ \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} 2\gamma^2 r^3 \Phi_\varphi^\top \Phi \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_1} \mathbf{q} - \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} \gamma r \Phi_\varphi^\top \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_2} (z_1 + z_2) \right. \\
& - \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} \gamma r^2 \sin \varphi \Phi_\varphi^\top \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_3} (\alpha_1 + \alpha_2) \\
& - h s_0 \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} 2\gamma^2 r \Phi^\top \Phi_\varphi \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_4} \mathbf{q} - h s_0 \frac{1}{\Omega} \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} 4\gamma^2 r \Phi^\top \Phi \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_5} \dot{\mathbf{q}} \\
& \left. - h s_0 \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} 2\gamma^2 r \Phi_\varphi^\top \Phi + \gamma^2 r \Phi_\varphi^\top \Phi_{\varphi\varphi} \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_{61}} \mathbf{q} - h s_0 \frac{1}{\Omega} \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} \gamma^2 r \Phi_\varphi^\top \Phi_\varphi \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_7} \dot{\mathbf{q}} \right\} \\
+ \delta\mathbf{q}^\top \frac{\mu d_p h}{2} & \left\{ \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} 2\gamma^2 r^3 \Phi_\varphi^\top \Phi \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_1} \dot{\mathbf{q}} - \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} \gamma r \Phi_\varphi^\top \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_2} (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) \right. \\
& \left. - \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} \gamma r^2 \sin \varphi \Phi_\varphi^\top \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_3} (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \right\}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta\mathbf{q}^\top \frac{\mu d_p h}{2} \left\{ \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} 2\gamma^2 r^3 \Phi_\varphi^\top \Phi \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_1} \dot{\mathbf{q}} - \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} \gamma r \Phi_\varphi^\top \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_2} (\dot{z}_1 + \dot{z}_2) \right. \\
& \left. - \underbrace{\left[\int_{\Gamma_C} \gamma r^2 \sin \varphi \Phi_\varphi^\top \, da \right]}_{=: \mathbf{R}_3} (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \right\}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

oder zusammengefasst

$$\begin{aligned}
\delta\bar{W} = \delta\mathbf{z}^\top \frac{\mu c_p h}{2} & \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 - h s_0 (\mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_6) & -\mathbf{R}_2 & -\mathbf{R}_2 & -\mathbf{R}_3 & -\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z} \right. \\
& \left. + \frac{h s_0}{\Omega} \begin{bmatrix} -(\mathbf{R}_5 + \mathbf{R}_7) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \right\} + \delta\mathbf{z}^\top \frac{\mu d_p h}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & -\mathbf{R}_2 & -\mathbf{R}_2 & -\mathbf{R}_3 & -\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Es lässt sich zeigen, dass $\mathbf{R}_5 = \mathbf{R}_5^\top$, $\mathbf{R}_7 = \mathbf{R}_7^\top$ und $(\mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_{61}) = (\mathbf{R}_4 + \mathbf{R}_{61})^\top$ gilt. Sortieren liefert schließlich

$$\delta\bar{W}_C = \delta\mathbf{z}^\top \mu c_p h \left\{ -(\mathbf{K}_R + \mathbf{N}) \mathbf{z} - \frac{h s_0}{\Omega} \mathbf{D}_{R1} \dot{\mathbf{z}} \right\} + \delta\mathbf{z}^\top \mu d_p h \left\{ -(\mathbf{G}_R + \mathbf{D}_{R2}) \dot{\mathbf{z}} \right\} \tag{4.91}$$

mit $\mathbf{K}_R = \mathbf{K}_R^\top$, $\mathbf{N} = -\mathbf{N}^\top \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{D}_{R1} = \mathbf{D}_{R1}^\top$ und $\mathbf{G}_R = -\mathbf{G}_R^\top$, $\mathbf{D}_{R2} = \mathbf{D}_{R2}^\top$.

Die um die Ruhelage $\mathbf{z} = 0$ linearisierten Bewegungsgleichungen lauten somit

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \left[\Omega \mathbf{G} + d_p \mathbf{D} + \frac{\mu c_p h^2 s_0}{\Omega} \mathbf{D}_{R1} + \mu d_p h (\mathbf{G}_R + \mathbf{D}_{R2}) \right] \dot{\mathbf{z}} \quad (4.92)$$

$$+ [\mathbf{K}(\Omega^2) + \mu c_p h \mathbf{K}_R + \mu c_p h \mathbf{N}] \mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (4.93)$$

Dabei stammen die Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{G} , \mathbf{D} und $\mathbf{K}(\Omega)$ aus der Diskretisierung des bewegten Kontinuums, während die Beiträge \mathbf{D}_{R1} , \mathbf{D}_{R2} , \mathbf{G}_R und \mathbf{K}_R , \mathbf{N} aus der (räumlichen) Linearisierung der Kontaktspannungen herrühren. Die letztgenannte Gruppe von Matrizen hängt überdies von der Ausdehnung der Kontaktzone ab.

Es fällt auf, dass für den allgemeinen, reibungsbehafteten Fall keine Prognose mehr über die Symmetrieeigenschaften der Matrizen gegeben werden kann. Insbesondere wird die zirkulatorische Matrix \mathbf{N} nicht verschwinden und die Beiträge aus den Kontakten werden sowohl symmetrische als auch schiefsymmetrische Matrizen zu den geschwindigkeitsproportionalen Termen beitragen.

Auffällig ist zudem, dass im Wesentlichen die Produkte $\mu c_p h$ und $\mu d_p h$ den Einfluss der von der Reibung herrührenden Terme kontrollieren. Darüber hinaus ist bemerkenswert, dass $\frac{1}{\Omega}$ im Vorfaktor einer Systemmatrix auftritt. Dies deutet bereits hier darauf hin, dass kleine Winkelgeschwindigkeiten Ω starke Effekte zeigen können. Bei der Untersuchung des Einflusses kleiner Winkelgeschwindigkeiten sind prinzipiell die der Herleitung zugrundeliegenden Annahmen (4.45) zu beachten.

4.2 Stabilität

Unter bestimmten Bedingungen entstehen bei Bremssystemen Schwingungen aus einem stationären Betriebspunkt heraus, der durch eine konstante Winkelgeschwindigkeit Ω und verschwindende Auslenkungsgeschwindigkeiten gekennzeichnet ist. Nach Linearisierung um diesen stationären Betriebspunkt entsteht eine Gleichung der Form (4.93). Die Eigenwerte des zugeordneten Eigenwertproblems können dann zur Untersuchung der Stabilität der stationären Lösung herangezogen werden.

Da ein reales Problem betrachtet wird, wird auf eine Entdimensionalisierung verzichtet. Im Folgenden wird daher zunächst auf die Bestimmung realistischer Systemparameter eingegangen. Anschließend wird das Eigenwertverhalten des reibungsfreien Systems diskutiert, um danach die Betrachtung schrittweise auf die vollständige Systembeschreibung (4.93) zu erweitern.

Parameter

Soweit nicht anders vermerkt, werden im weiteren folgende Systemparameter zugrundegelegt:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Brems Scheibe:} & E = 1.2 \cdot 10^{11} \text{ Pa} , & \nu = 0.24 , & \varrho = 7.2 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
 & h = 0.01 \text{ m} , & r_i = 0 \text{ m} , & r_a = 0.13 \text{ m} \\
 \text{Bremsbeläge:} & E_{p,0} = 1.1 \cdot 10^8 \text{ Pa} , & c_p = \frac{E_{p,0}}{h_p} = 7.33 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} , & \eta_p = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s} \\
 & h_p = 0.015 \text{ m} , & R_m = 0.12 \text{ m} , & \varphi_0 = 24^\circ \\
 & m_p = 0.32 \text{ kg} , & J_p = \frac{m_p}{12} (h_p^2 + (R_m \sin \varphi_0)^2) & \\
 \text{Kontaktbereich:} & r \in [0.08 \text{ m}, 0.125 \text{ m}] , & \varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0] . &
 \end{array}$$

Die Materialparameter der Brems Scheibe wurden dabei angelehnt an übliche Tabellenwerte für Stahlguss gewählt. Ähnliche Werte finden im Übrigen auch in einem Beispiel des FEM-Paketes ABAQUS zur Eigenwertanalyse eines Bremsenmodells Verwendung [37].

Die Materialparameter der Bremsbeläge wurden gemäß Messungen gewählt, die im Rahmen einer früheren Arbeit am Prüfstand des Instituts durchgeführt wurden ([79], siehe auch Abbildung 4.14). Typische Normalkräfte auf die Beläge, bei denen Bremsenquietschen beobachtet wird, liegen im Bereich $F_N \approx 100 \text{ N}$ bis ca. 5 kN. Für einen typischen Wert von $F_N = 1 \text{ kN}$ bspw. ergibt sich eine statische Zusammenpressung s_0 von ca. $30 \mu\text{m}$. Nach Linearisierung der in [79] angegebenen kubischen Näherung der Steifigkeitskennlinie lässt sich für $F_N = 1 \text{ kN}$ der oben angegebene E-Modul berechnen. Der mechanische Verlustfaktor η_p wurde ebenfalls in Anlehnung an die Messergebnisse aus [79] gewählt. Da die dortigen Ergebnisse nur für vergleichsweise tiefe Frequenzen ($f < 100 \text{ Hz}$) und hohe mittlere Normalkräfte ($F_{N,m} \approx 2.3 \text{ kN}$) angegeben sind, mussten die Werte entsprechend extrapoliert werden. Als Orientierungshilfe wurde dabei der in [29] angegebenen Wert verwendet.

Die übrigen Parameter wurden durch direkte Messungen ermittelt.

Zur Diskretisierung wurden $m = 5$ Paare von Ansatzfunktionen gemäß des Ansatzes (4.73) gewählt. Für die oben angegebenen Parameter ermöglicht dies die Untersuchung von Schwingungen der Brems Scheibe bis ca. 5 kHz, was zur Untersuchung der experimentell beobachteten Schwingungen ausreichend ist.

4.2.1 Eigenwerte des reibungsfreien Systems

4.2.1.1 Brems Scheibe

Zunächst wird die rotierende Brems Scheibe ohne Kontakte zu den Bremsbelägen betrachtet. Wird die Dynamik der rotierenden Kreisplatte in einem mitrotierenden (R, Φ) -System formuliert, liefert die Diskretisierung der partiellen Differentialgleichungen ein Gleichungs-

system der Form

$$\mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}. \quad (4.94)$$

Da im Rahmen dieser Arbeit lediglich die Strukturdämpfung der Beläge betrachtet werden soll, tritt in (4.94) keine Dissipationsmatrix auf. Ohne weiteres kann $\mathbf{K}_D > 0$ unterstellt werden, sodass ein schwingungsfähiges System vorliegt, dessen Ruhelage grenzstabil ist.

Eine Transformation der zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichung und Diskretisierung mittels Ansatzfunktionen in raumfesten Koordinaten (r, φ) ergibt eine Formulierung der Form

$$\mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{z}} + \Omega \mathbf{G}_D \dot{\mathbf{z}} + [\mathbf{K}_D + \Omega^2 \mathbf{K}_D^*] \mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (4.95)$$

Die Terme $\Omega \mathbf{G}_D \dot{\mathbf{z}}$ und $\Omega^2 \mathbf{K}_D^* \mathbf{z}$ rühren dabei von der Transformation vom mitrotierenden ins raumfeste Koordinatensystem her. Weitere Details hierzu sind bereits in Kapitel 2 beschrieben.

Typischerweise spalten sich bei der Beschreibung bewegter elastischer Körper in raumfesten Koordinaten die Eigenfrequenzen zueinander gehörender Eigenmoden paarweise auf und entfernen sich voneinander (siehe Abbildung 4.21). Dieser Effekt kommt lediglich durch

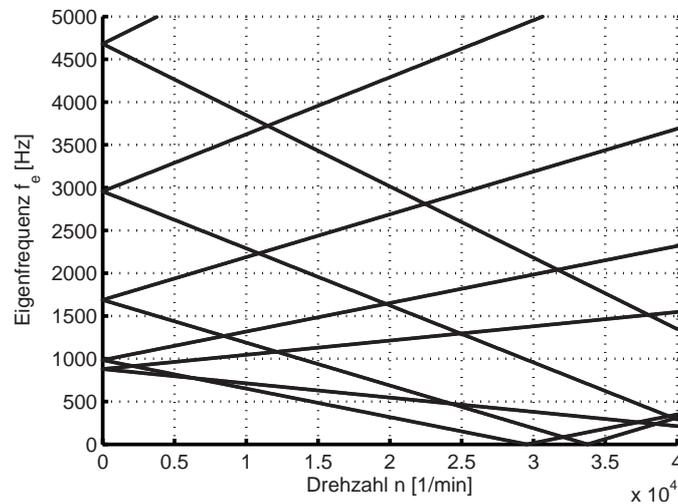


Abbildung 4.21: Eigenfrequenzen f_e der rotierenden Scheibe ohne Kontakt in Abhängigkeit von der Drehzahl.

die Transformation auf raumfeste Koordinaten zustande und berücksichtigt die durch die Führungsbewegung verursachten (scheinbaren) Frequenzänderungen bezüglich des ruhenden Beobachters. Interpretiert man Deformationen im mitbewegten System als Überlagerung gegenläufiger Wellen, so erhöht sich – von raumfesten System beobachtet – die Frequenz der in Bewegungsrichtung laufenden Wellen, während die der rücklaufenden Wellen absinkt.

Interessant ist dabei die kritische Drehzahl $n_c \approx 29520 \frac{U}{\text{min}}$, bei der die Führungsgeschwindigkeit der Scheibe gerade der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit (d.h. Schallgeschwindigkeit) der Bremsscheibe in Umfangsrichtung entspricht. Vom raumfesten Beobachter aus wird bei dieser Umdrehungszahl die rücklaufende Teilwelle als stehende Welle erscheinen. Wird die Winkelgeschwindigkeit weiter erhöht, so kehrt die "rücklaufende" Welle sogar ihren Richtungssinn um und läuft vom raumfesten Beobachter aus in die gleiche Richtung wie die in Drehrichtung laufende Welle.

Da das Stabilitätsverhalten prinzipiell unabhängig vom Beobachter sein muss, bleiben die Realteile hiervon beim betrachteten Beispiel unbeeinflusst. Anders verhält es sich jedoch, wenn das bewegte Kontinuum nichtmateriellen – also beispielsweise raumfesten – Randbedingungen zu genügen hat. Weitere Details zur Lösungstheorie von Wellen in überschallschnell bewegten Kontinua sind in [75] zu finden.

Während in Abbildung 4.21 das Spektrum in einem sehr weiten Drehzahlbereich dargestellt ist, spielen bei der Untersuchung des Bremsenquietschens erfahrungsgemäß vergleichsweise niedrige Drehzahlen eine Rolle. Abbildung 4.22 a) zeigt das Eigenfrequenzspektrum für kleine Drehzahlen im Bereich bis $n = 1200 \frac{U}{\text{min}}$, entsprechend $v_{Fzg} \approx 180 - 200 \text{ km/h}$. Dabei ist deutlich zu erkennen, dass der Einfluss der Führungsbewegung auf das Spektrum für praktisch relevante Drehzahlen kaum in Erscheinung tritt. Dies wird durch den in Abbildung

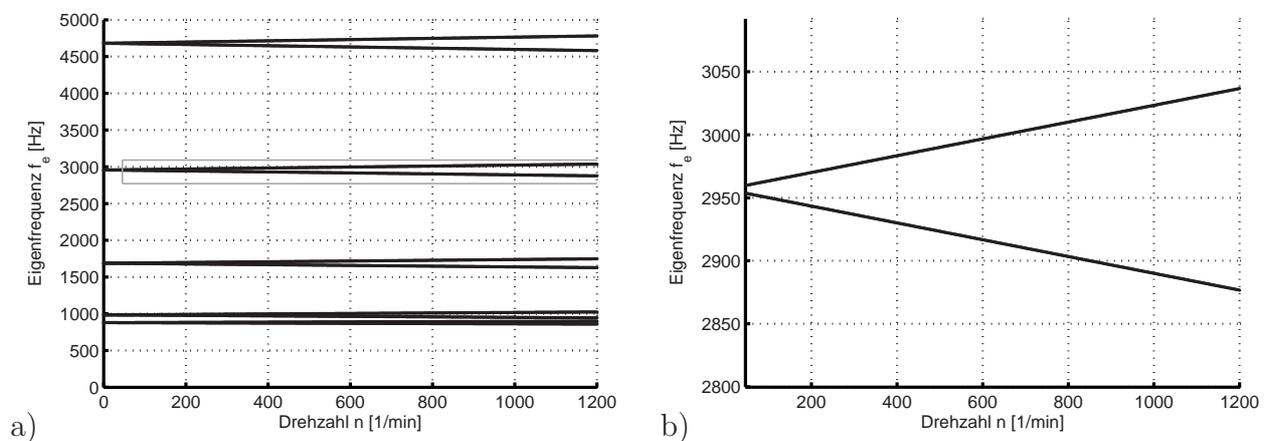


Abbildung 4.22: Eigenfrequenzen f_e der rotierenden Scheibe ohne Kontakt in Abhängigkeit von der Drehzahl: Darstellung im praktisch relevanten Drehzahlbereich.

a) Eigenfrequenzen von 0-5000 Hz. b) Detailausschnitt.

4.22 b) dargestellten Detailausschnitt noch unterstrichen. Es lässt sich also feststellen, dass die durch die Führungsbewegung verursachte Aufspaltung von Eigenformen bezüglich des raumfesten Systems im relevanten Betriebsbereich als marginal einzustufen ist. Insbesondere der Fall einer der Schallgeschwindigkeit entsprechenden Führungsgeschwindigkeit ist für praktische Untersuchungen von Bremssystemen ohne Bedeutung.

4.2.1.2 Bremsscheibe und Beläge im reibungsfreien Kontakt

Bringt man nun die Bremsscheibe und die Bremsbeläge reibungsfrei in Kontakt, so wird das System in raumfesten Koordinaten durch Gleichungen der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + [\Omega\mathbf{G} + d_p\mathbf{D}]\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}(\Omega^2)\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.96)$$

beschrieben. Da der Normalkontakt durch die Wahl der Ansatzfunktionen berücksichtigt ist (siehe Abschnitt 2.3.2.3), ändert sich an der prinzipiellen Struktur der Systemgleichungen abgesehen von der Dissipationsmatrix \mathbf{D} nur wenig. Abbildung (4.23) zeigt die Eigenwerte des zugehörigen Eigenwertproblems in Abhängigkeit der Masse m_p eines Bremsbelages. Es ist

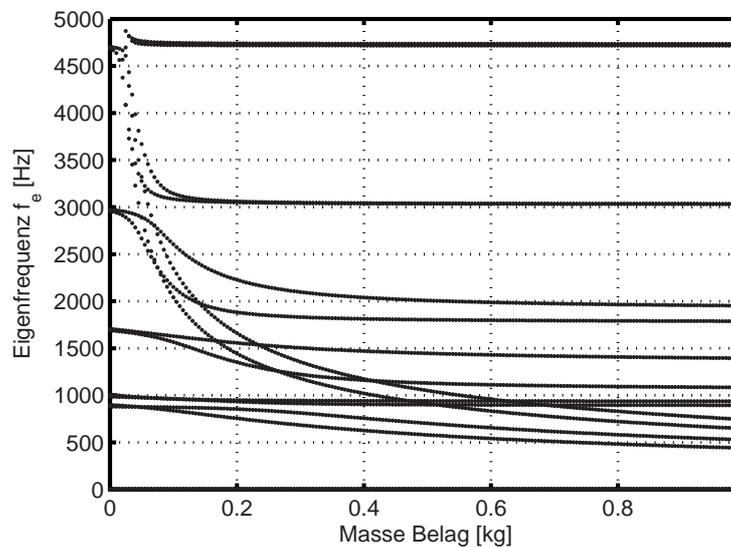


Abbildung 4.23: Eigenfrequenzen f_e der im Kontakt mit dem Bremsbelägen stehenden Scheibe in Abhängigkeit von der Masse m_p eines Bremsbelags (Drehzahl $n = 1 \frac{\text{U}}{\text{min}}$).

deutlich zu erkennen, dass mit zunehmender Masse die Bremsbeläge das Frequenzspektrum deutlich beeinflussen. Abbildung 4.24 stellt einen Vergleich der Eigenformen für $m_p = 0$ kg und $m_p = 1$ kg dar. Da im für das Bremsenquietschen relevanten Drehzahlbereich der Einfluss der Drehzahl auf das Frequenzspektrum nicht relevant ist, wurde willkürlich eine Drehzahl von $n = 1$ U/min gewählt.

Während für masselose Beläge $m_p = 0$ im dargestellten Frequenzbereich lediglich die Eigenfrequenzen der Bremsscheibe ohne Kontakte sichtbar sind, treten diese für größere Massen deutlich in Erscheinung.

Insbesondere führt der Einfluss der Bremsbeläge bei den tieferfrequenten Eigenmoden der Bremsscheibe zu Frequenzverschiebungen und Aufspaltung zueinander gehörender Eigenformen. Dieser Effekt hat jedoch nichts mit der zuvor erwähnten Frequenzaufspaltung infolge der Führungsbewegung zu tun, sondern lässt sich durch die unterschiedliche Wirkung der

Bremsbeläge auf die Eigenformen erklären. So ist für $m_p = 1$ kg die Eigenform bei $f = 440$ Hz primär von Trägheit der Beläge in Querrichtung (d.h. z -Richtung) beeinflusst, während die zugehörige Eigenform bei $f = 528$ Hz durch die Rotationsträgheit bezüglich der Koordinate α beeinflusst wird.

Für einen Vergleich mit der experimentellen Modalanalyse (Abbildungen 4.11, 4.12) ist eine Belagsmasse von $m_p \approx 0.32$ kg anzusetzen.

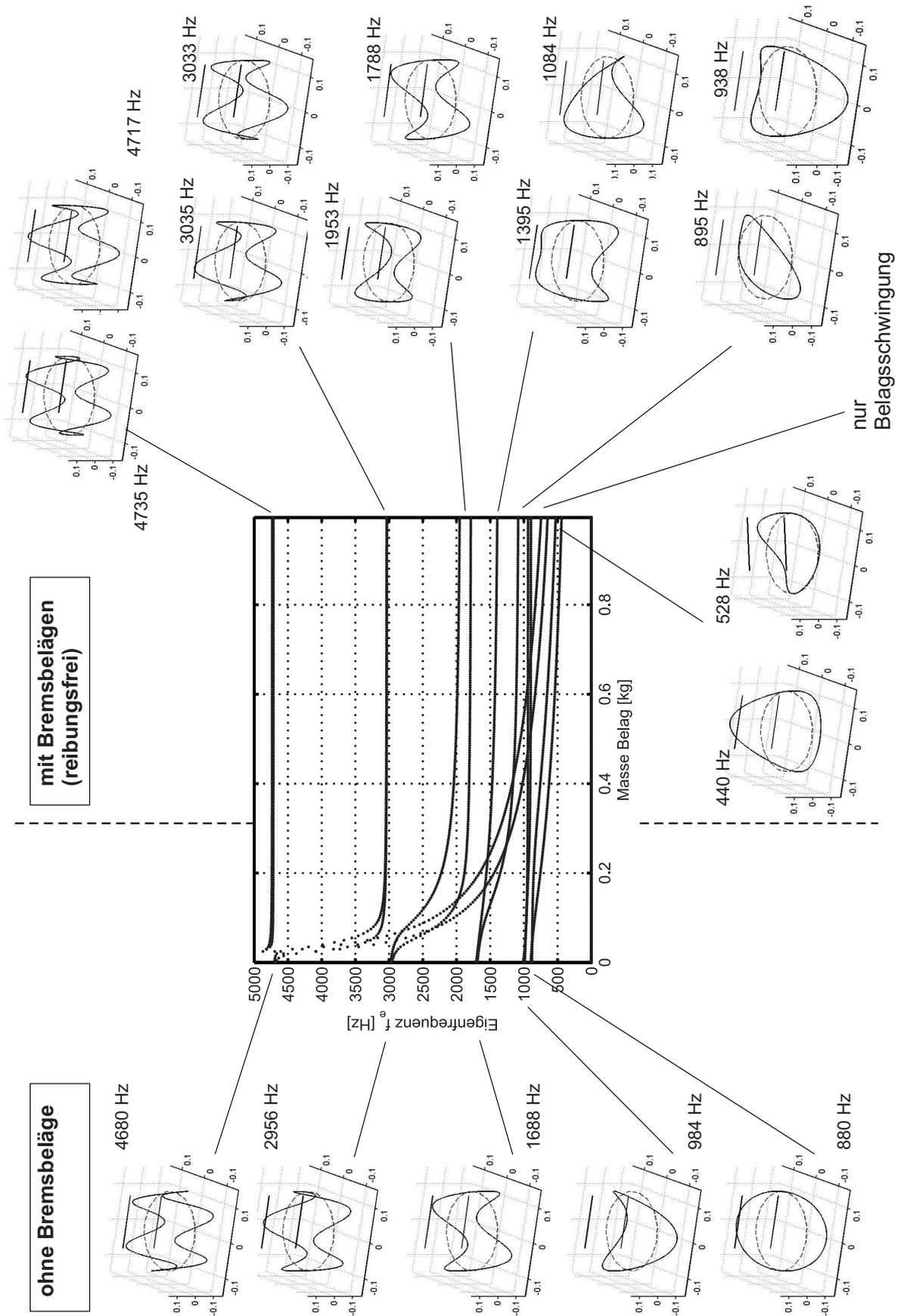


Abbildung 4.24: Vergleich der Eigenmoden der Bremscheibe im Kontakt mit den Bremsbelägen für verschwindende Masse ($m_p = 0$ kg) und für $m_p = 1$ kg.

4.2.2 Stabilität des reibungsbehafteten Systems

Das allgemeine reibungsbehaftete System wird durch die Gleichung (4.93) beschrieben und hat somit die Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (4.97)$$

Im Folgenden soll zunächst der Einfluss der zirkulatorischen Matrix \mathbf{N} auf das Stabilitätsverhalten untersucht werden.

Wie in Kapitel 3.4.2.2 festgestellt, ist eine vereinfachte Stabilitätsuntersuchung von (4.97) unter Vernachlässigung von Dissipation \mathbf{D} und gyroskopischen Einflüssen \mathbf{G} nicht durch den Satz von Thomson und Tait abgesichert. Deshalb wird im Weiteren schrittweise der Einfluss der einzelnen Beiträge zu \mathbf{D} und \mathbf{G} untersucht.

4.2.2.1 Stabilität ohne Dissipation und gyroskopische Einflüsse

Werden geschwindigkeitsproportionale Beiträge – seien sie durch Dissipation oder Führungsbewegung bedingt – vernachlässigt, reduziert sich Gleichung (4.93) auf

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + [\mathbf{K}(\Omega^2) + \mu c_p h \mathbf{K}_R + \mu c_p h \mathbf{N}] \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.98)$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + [\mathbf{K}_{eff}(\Omega^2, p_1) + p_1 \mathbf{N}] \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \text{mit } p_1 = \mu c_p h. \quad (4.99)$$

Es wird zudem vorausgesetzt, dass $\mathbf{K}_{eff} > 0$ gilt und somit Divergenz-Instabilität ausgeschlossen ist. Wie in Abschnitt 3.4.2.2 dargestellt, können solche Systeme oszillatorische Instabilität (sog. "Flattern") zeigen.

Wie bereits bei der Herleitung der linearisierten Störungsgleichungen festgestellt, wird der Einfluss der nichtkonservativen lageproportionalen Kräfte vom Produkt $p_1 = \mu c_p h = \mu \frac{h}{h_p} E_p$ kontrolliert. Als weiterer Systemparameter spielt die Winkelgeschwindigkeit Ω über ihren Einfluss auf $\mathbf{K}_{eff} = \mathbf{K}_{eff}(\Omega^2)$ eine Rolle.

Abbildung 4.25 zeigt den größten Realteil in Abhängigkeit von den Systemparametern p_1 und Ω . Die zugehörige Stabilitätskarte ist in 4.26 dargestellt. Hierbei symbolisieren die unterschiedlichen Graustufen die Eigenfrequenz des Eigenwerts mit dem größten Realteil. Auf einer zweiten Achse ist der entsprechende Gleitreibungswert μ aufgetragen, der sich für die zugrundegelegten Systemparameter c_p und h ergibt.

Im mittelgrau hinterlegten Bereich im rechten unteren Quadranten der Stabilitätskarte liegen aufklingende Lösungsanteile mit einer Eigenfrequenz von $f_e \approx 3$ kHz vor. Mit zunehmender Drehzahl Ω verlagert sich die Grenze dieses Gebietes hin zu höheren μ -Werten, was am Einfluss von Ω auf \mathbf{K}_{eff} liegt. So kann eine Vergrößerung der Drehzahl das System aus dem Gebiet der Flutterinstabilität führen und stabilisieren. Bei einer weiteren Drehzahlerhöhung

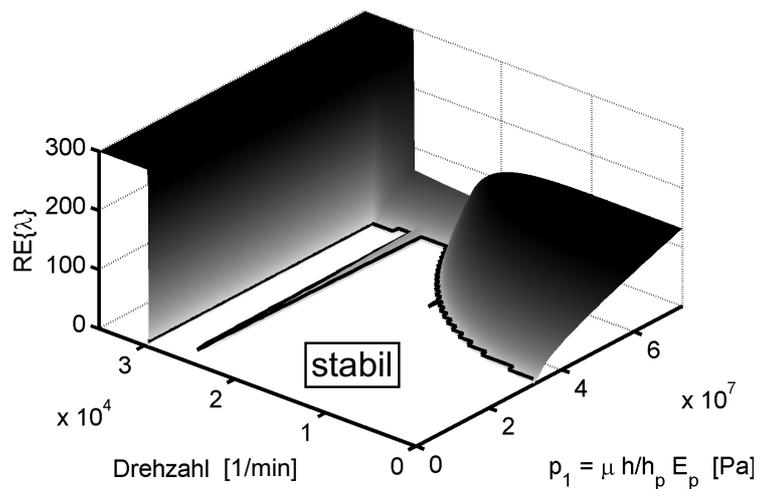


Abbildung 4.25: Stabilität der Ruhelage in Abhängigkeit des Lastparameters $p_1 = \mu \frac{h}{h_p} E_p$ und der Drehzahl n im Drehzahlbereich von $n = 0$ bis zur Wellenausbreitungsgeschwindigkeit der Umfangswellen. Dargestellt ist der größte Realteil $\text{Re}\{\lambda_{max}\}$.

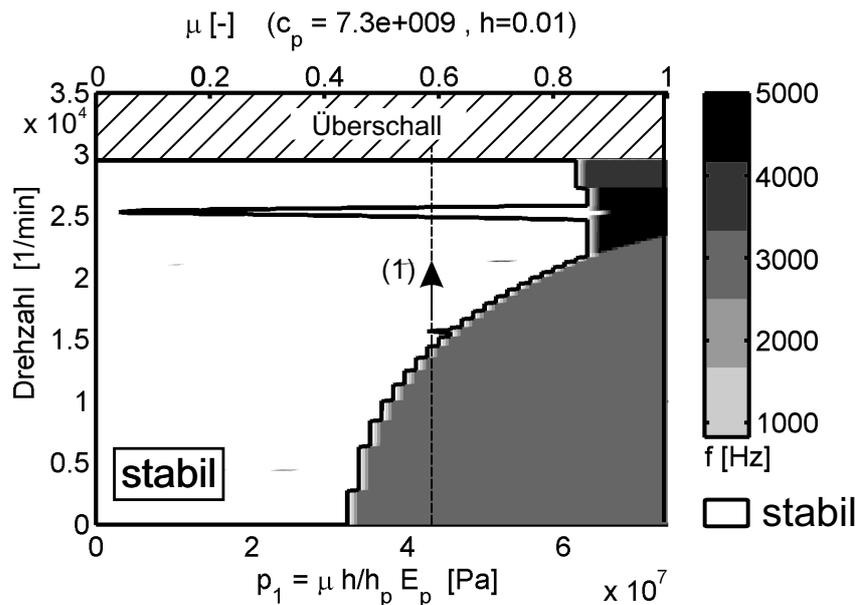


Abbildung 4.26: Stabilitätskarte in Abhängigkeit des Lastparameters $p_1 = \mu \frac{h}{h_p} E_p$ und der Drehzahl n im Drehzahlbereich von $n = 0$ bis zur Wellenausbreitungsgeschwindigkeit der Umfangswellen (Eigenfrequenz der instabilen Eigenform durch Graustufen dargestellt).

tritt bei ca. $n \approx 1.6 \cdot 10^4 \frac{U}{\text{min}}$ und $n \approx 2.5 \cdot 10^4 \frac{U}{\text{min}}$ erneut ein Gebiet der Instabilität auf, bei dem eine Schwingungsform mit tieferer Eigenfrequenz ($f_e < 1$ kHz) Flutterinstabilität zeigt. Bei einer Drehzahl von $n_c \approx 29520 \frac{U}{\text{min}} \approx 3 \cdot 10^4 \frac{U}{\text{min}}$ erreicht die Tangentialgeschwindigkeit die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit der Umfangswellen der betrachteten Radialformfunktion. Jenseits dieser Drehzahl ist eine Stabilitätsuntersuchung nur noch anhand eines modi-

fizierten Anfangsrandwertproblems zulässig, sodass die Gültigkeit der vorgenommenen Diskretisierung nicht mehr automatisch gegeben ist. Bezüglich des mitdrehenden, materiefesten Koordinatensystems stellen die raumfesten Kontaktkräfte periodisch umlaufende Kräfte dar. Für $n > n_c$ bewegen sich diese Kräfte schneller als die Wellen im Körper und überholen so quasi die von ihnen ausgehende Wirkung. Dies soll hier nicht weiter vertieft werden, da diese Grenzdrehzahl deutlich jenseits technisch bedeutsamer Drehzahlen liegt und für die Untersuchung von Bremsenquietschen keine Rolle spielt. Weitere Details zu dieser Problematik finden sich in [75].

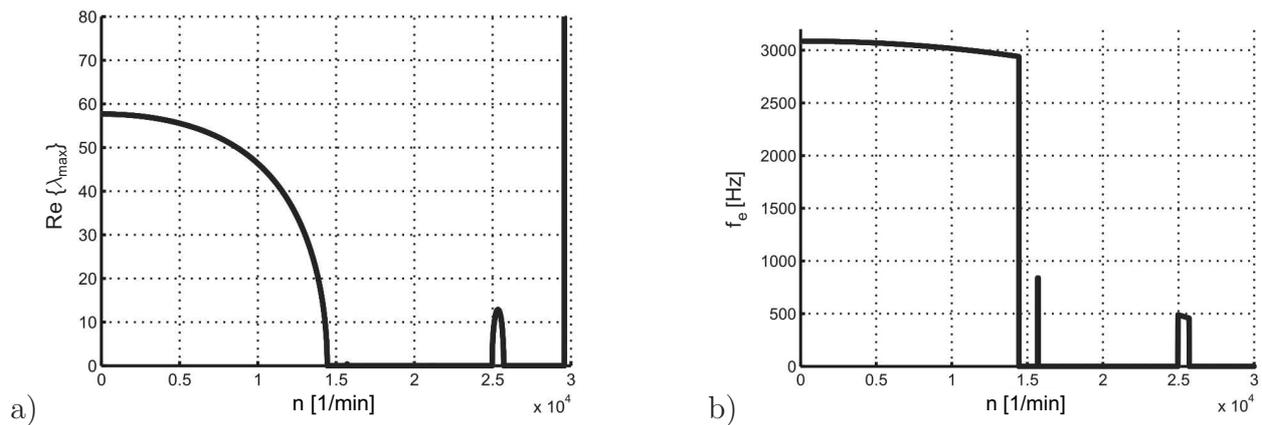


Abbildung 4.27: Schnitt durch das Stabilitätsdiagramm in Abbildung 4.26 entlang der mit (1) gekennzeichneten Linie. Dargestellt ist der maximale Realteil $\text{Re}\{\lambda\}$ sowie die zugehörige Eigenfrequenz f_e .

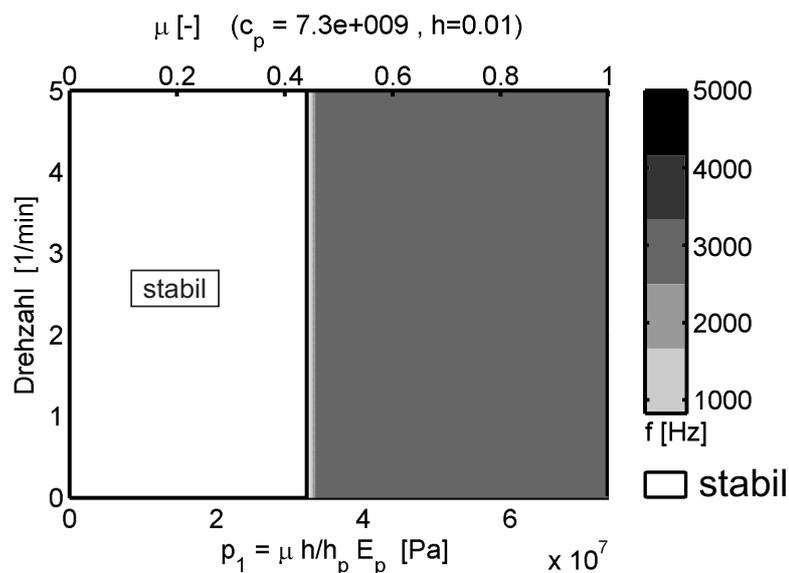


Abbildung 4.28: Stabilitätskarte in Abhängigkeit des Lastparameters $p_1 = \mu \frac{h}{h_p} E_p$ und der Drehzahl n in einem realistischen Drehzahlbereich $n = 0, \dots, 1200 \frac{\text{U}}{\text{min}}$ (Eigenfrequenz der instabilen Eigenform durch Graustufen dargestellt).

Abbildung 4.28 stellt die Stabilitätskarte der stationären Lösung von System (4.99) in einem für praktische Probleme bei Kraftfahrzeugen relevanten Drehzahlbereich dar. Dabei entspricht eine Drehzahl von $n = 1200 \frac{\text{U}}{\text{min}}$ bei einem Raddurchmesser von ca. 0.4 m in etwa einer Fahrgeschwindigkeit von 180 km/h. Selbst in diesem weitgesteckten Geschwindigkeitsbereich ist eine Abhängigkeit der Stabilitätsgrenze von der Drehzahl nicht erkennbar – offensichtlich spielt diese ohne die Berücksichtigung von Dämpfung und Effekten durch die Führungsbewegung keine besondere Rolle.

Vielmehr hängt die Stabilität der stationären Lösung vom Parameter $p_1 = \mu \frac{h}{h_p} E_p$ ab, der die Gleitreibungszahl μ sowie das Verhältnis zwischen den Dicken h der Bremsscheibe und h_p des Bremsbelages beinhaltet. So wird eine tendenziell geringe Quietschneigung durch einen kleinen Gleitreibungskoeffizienten in Verbindung mit bezüglich der Bremsscheibe vergleichsweise dicken Bremsbelägen erreicht, die zudem möglichst weich sein sollten.

Darüber hinaus wird das Stabilitätsverhalten auch von den Geometrieparametern des Kontaktbereichs beeinflusst: diese sind im hier untersuchten Modell die Breite b des Bremsbelags sowie der überdeckte Winkel $2\varphi_0$. Da die Antriebsgeschwindigkeit keinen nennenswerten Einfluss auf das Stabilitätsverhalten dieses Modells hat, wurde der Einfluss der Geometrieparameter lediglich in Abhängigkeit eines Lastparameters – hier μ – untersucht (siehe Abbildung 4.29). Man erkennt, dass das Parametergebiet bandartig von Instabilitätsgebieten durchzogen ist. Die Breite b spielt dabei eine eher untergeordnete Rolle, während der vom Belag abgedeckte Winkelbereich φ_0 sehr direkten Einfluss auf das Stabilitätsverhalten haben kann. So befindet sich die Parameterkombination der experimentell untersuchten Bremse ($b = 4.5$ cm, $\varphi_0 \approx 24^\circ$) für Gleitreibungswerte $\mu > 0.2$ in einem Gebiet, in dem eine Eigenform mit einer Eigenfrequenz von ca. 3 kHz instabil ist (mittelgrau). Für eher geringe Gleitreibungswerte ($\mu = 0.2$, $\mu = 0.4$) liegt der Rand dieses Gebietes in Richtung abnehmenden Winkels φ_0 nahe an der Parameterkombination des Experiments. Da zudem das nächstfolgende Gebiet instabilen Verhaltens durch ein Stabilitätsgebiet abgetrennt ist, lässt sich die stationäre Lösung durch Verringerung des Winkels φ_0 stabilisieren. Dies entspricht dem in der Praxis häufig vorgenommenen "Anfasen" von Bremsbelägen, durch das der effektiv überdeckte Winkel der Kontaktfläche verringert wird. Diese Maßnahme führt jedoch nicht immer zum Erfolg, da mit zunehmendem μ der Stabilitätsbereich, in den man durch das Anfasen gelangen kann, mehr und mehr zusammenschrumpft und bei ca. $\mu = 0.8$ verschwunden ist. Für hohe Reibwerte führt das Anfasen dann lediglich in einen Parameterbereich, in dem Eigenformen mit einer höheren Eigenfrequenz instabil sind.

Ebenso wie die Antriebsgeschwindigkeit hat für das untersuchte Modell auch die Normalkraft N_0 auf die Bremsbeläge praktisch keinen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten.

In Abbildung 4.30 ist der Verlauf der Real- und Imaginärteile in Abhängigkeit vom Parameter p_1 dargestellt. In den vergrößerten Ausschnitten des Frequenzspektrums ist deutlich zu erkennen, wie an zwei Stellen Paare von Eigenfrequenzen zusammenlaufen und zu je-

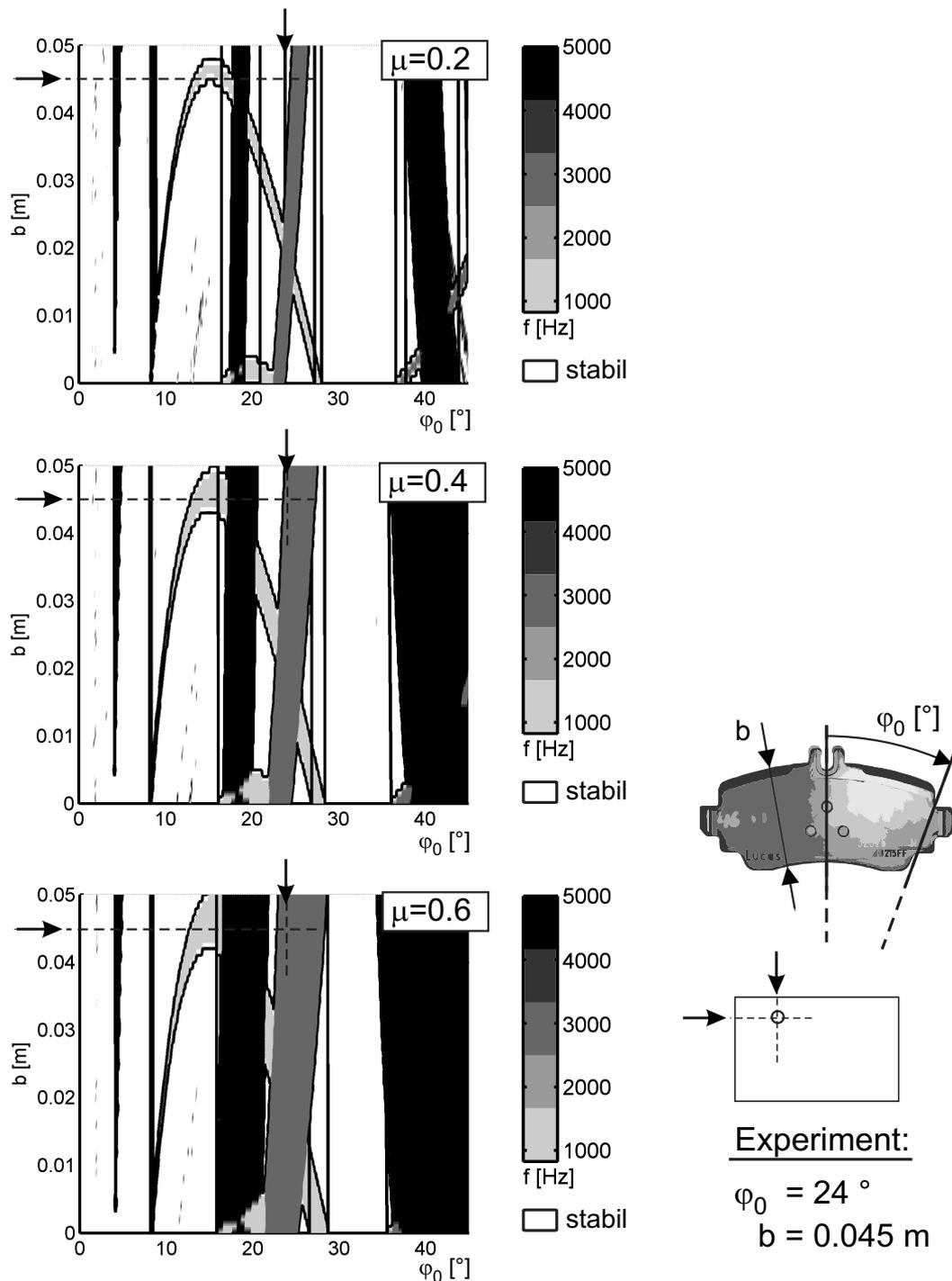


Abbildung 4.29: Zum Einfluss der radialen Belagsbreite b und des von den Belägen überdeckten Winkels $2\varphi_0$: durch Graustufen dargestellt die Eigenfrequenz f_e der instabilen Schwingungsform dargestellt, stabile Parametergebiete sind weiß hinterlegt.

weils einer gemeinsamen Frequenz verschmelzen. Gleichzeitig spalten sich die zugehörigen Realteile auf und bilden ein Paar betragsgleicher Werte entgegengesetzten Vorzeichens. Da einer von diesen Realteilen positiv ist, wächst eine Lösungskomponente exponentiell an – da der Imaginärteil und somit die zugehörige Frequenz nicht verschwindet, liegt oszillatorische

Instabilität (Flattern) vor (siehe auch Abschnitt 3.4.2.2)

Das Verschmelzen der Eigenwerte ist bei Systemen ohne geschwindigkeitsproportionale Anteile zwingend mit dem Zusammenfallen der zugehörigen Eigenvektoren verbunden. Abbildung 4.31 zeigt exemplarisch das erste kritische Paar $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ von Eigenformen, deren Frequenzen zu $f_{12} = 3086$ Hz verschmelzen, sowie die Skalarprodukte

$$c_R = \langle \operatorname{Re}(\mathbf{r}_1), \operatorname{Re}(\mathbf{r}_2) \rangle \quad \text{und} \quad c_I = \langle \operatorname{Im}(\mathbf{r}_1), \operatorname{Im}(\mathbf{r}_2) \rangle$$

der Real- und Imaginärteile der Eigenvektoren. Deutlich ist zu erkennen, dass mit dem Zusammenfallen der Eigenwerte und der damit einhergehenden Destabilisierung der Grundlösung die vormals rein reellen Eigenvektoren konjugiert komplex werden. Vom konservativen, symmetrischen System bei $p_1 = 0$ steigt mit zunehmendem p_1 das Skalarprodukt c_R immer mehr an, bis beim kritischen Wert $p_{1,crit}$ die Realteile der Eigenvektoren zusammenfallen. Für $p_1 > p_{1,crit}$ können nun keine reellen Eigenvektoren mehr gefunden werden, stattdessen liegen sie stets konjugiert komplex vor (siehe auch Abschnitt 3.3.2.2).

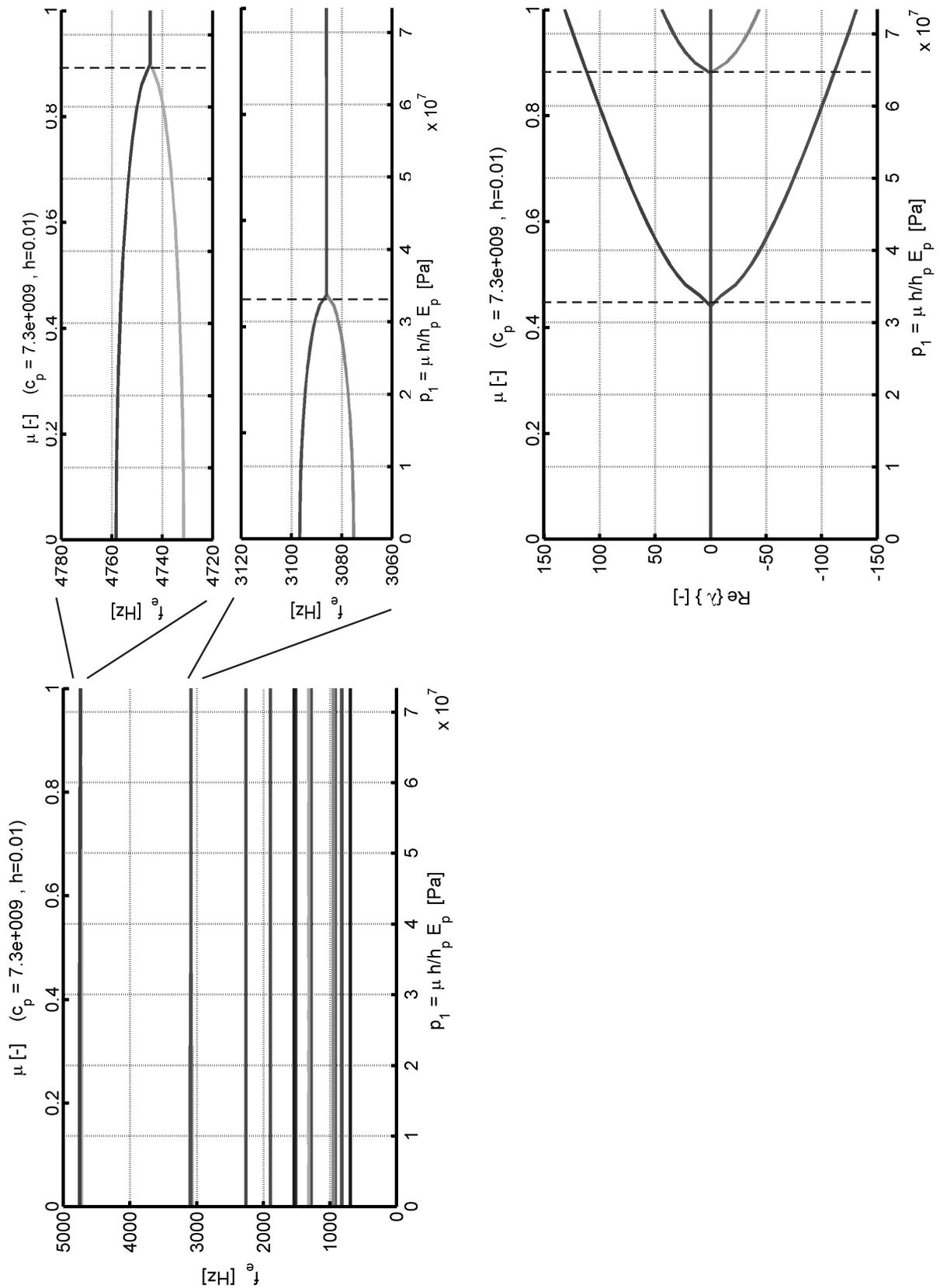


Abbildung 4.30: Eigenwerte (Real-/Imaginärteile) in Abhängigkeit vom Lastparameter p_1 und Gleitreibungskoeffizienten μ .

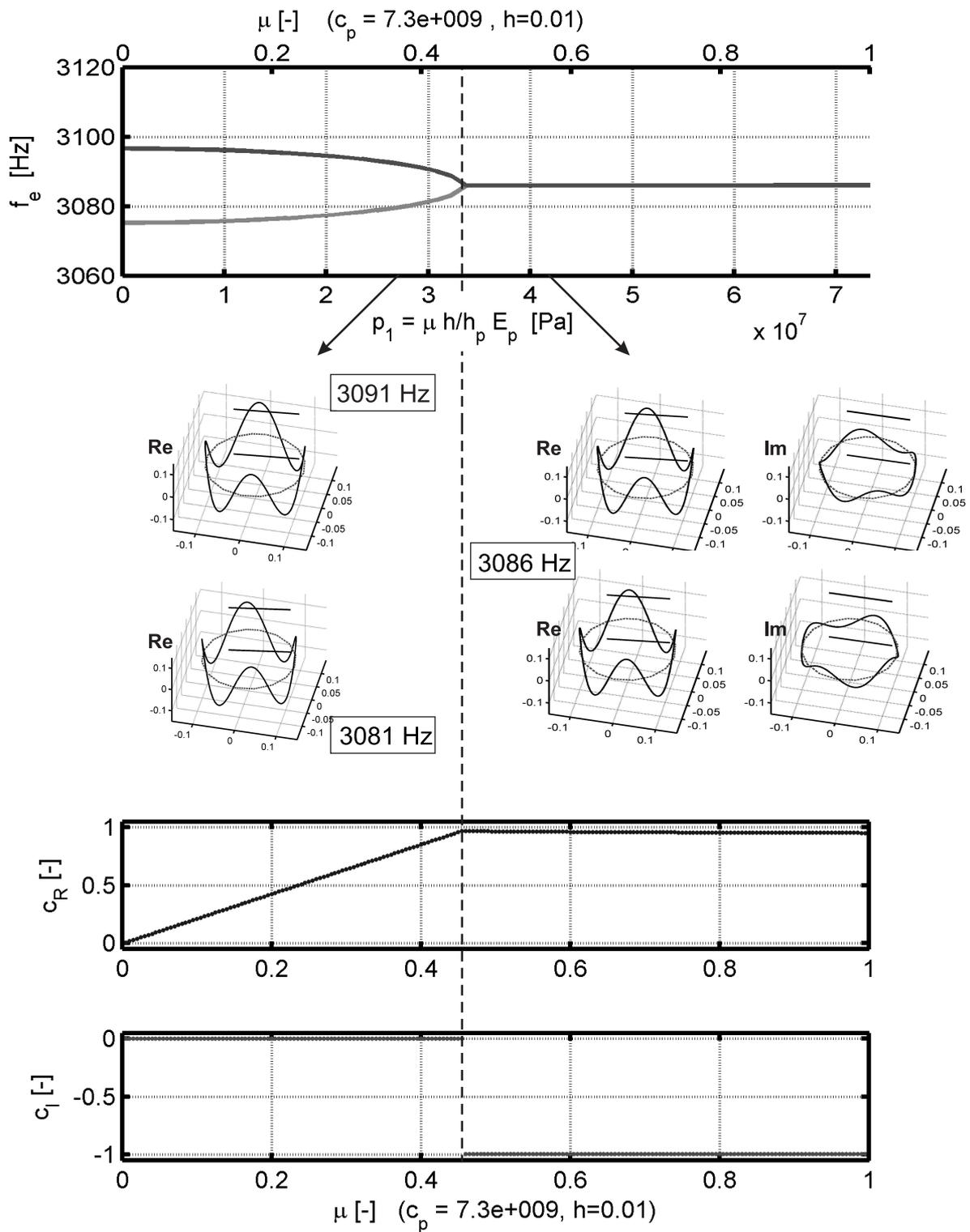


Abbildung 4.31: Typisches Instabilitätsszenario für Flutter-Instabilität: mit Erhöhung des Lastparameters p_1 (bzw. der Gleitreibungszahl μ) laufen zwei Eigenkreisfrequenzen zusammen und verschmelzen bei $p = p_{crit}$. Gleichzeitig nähern sich die Rechtseigenvektoren an (deutlich erkennbar am Skalarprodukt des Realteils c_R) und fallen im kritischen Punkt zusammen ($c_R = 1$). Für $p > p_{crit}$ gleichen sich die Realteile der Eigenvektoren und die Imaginärteile sind invers zueinander ($c_I = -1$).

4.2.2.2 Stabilität unter Berücksichtigung sämtlicher Einflüsse

4.2.2.2.1 Einfluss der Führungsbewegung ohne Dissipation Bei der raumfesten Beschreibung bewegter Kontinua treten in einer linearisierten Beschreibung stets gyroskopische Terme auf. Werden diese berücksichtigt, die dissipativen Beiträge aus der Dämpfung und der Reibungslinearisierung jedoch vernachlässigt, so ergibt sich eine Störungsgleichung der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (4.100)$$

Wie in Kapitel 3.4.2.2 gezeigt wurde, ist die Ruhelage dieser Störungsgleichung immer instabil. Ein derart vereinfachtes Ersatzmodell ist offensichtlich nicht für Stabilitätsuntersuchungen geeignet.

4.2.2.2.2 Einfluss von Führungsbewegung und Materialdämpfung, Reibung nur auf Lageebene linearisiert Erst wenn zusätzlich die Dämpfung des Materials berücksichtigt wird, liegt ein Modell vor, das nicht schon per se instabil ist. Wird im Rahmen der Modellierung zwar die Reibung nur auf Lageebene linearisiert, die Führungsbewegung sowie die Strukturdämpfung jedoch berücksichtigt, so folgt aus Gleichung (4.93) die Störungsgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + [\Omega\mathbf{G} + d_p\mathbf{D}]\dot{\mathbf{z}} + [\mathbf{K}(\Omega^2) + \mu c_p h \mathbf{K}_R + \mu c_p h \mathbf{N}]\mathbf{z} &= \mathbf{0} \\ \rightsquigarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + [\Omega\mathbf{G} + d_p\mathbf{D}]\dot{\mathbf{z}} + [\mathbf{K}_{eff}(\Omega^2, p_1) + p_1\mathbf{N}]\mathbf{z} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.101)$$

mit $p_1 = \mu c_p h = \mu \frac{h}{h_p} E_p$. Wie zuvor gesehen, ist der Einfluss der Parameter p_1 und Ω auf die Matrix \mathbf{K}_{eff} im interessierenden Parameterbereich eher von untergeordneter Bedeutung.

Offensichtlich hängt auch diese Modellierungsstufe neben den Geometrieparametern des Systems von Ω und p_1 ab. Hinzu kommt nun noch der Einfluss des Dämpfungsparameters $d_p = \eta_p \frac{E_p}{h_p}$.

Abbildung 4.32 zeigt exemplarisch für einen realistischen Dämpfungswert $\eta_p = 10^{-6}$ s die Stabilitätskarte, wobei wiederum die Graustufen die Frequenz der Eigenform mit dem größten Realteil dargestellt. Der dargestellte Drehzahlbereich reicht dabei bis $1200 \frac{\text{U}}{\text{min}}$, was einer Fahrzeuggeschwindigkeit von ca. 180 – 200 km/h entspricht. Ein Vergleich mit Abbildung 4.28 lässt den Einfluss der Führungsbewegung und der inneren Dämpfung insbesondere für höhere Geschwindigkeiten deutlich erkennen. Abbildung 4.33 zeigt den Einfluss verschiedener Dämpfungswerte auf die Stabilitätskarte des Systems. Dargestellt ist ein in der Praxis interessanter Drehzahlbereich bis $120 \frac{\text{U}}{\text{min}}$, was einer Fahrzeuggeschwindigkeit bis ca. 20 km/h entspricht. Wie zu erwarten war, dehnt sich für abnehmende Dämpfung das Instabilitätsgebiet immer weiter aus, während es für zunehmende Dämpfung schrumpft.

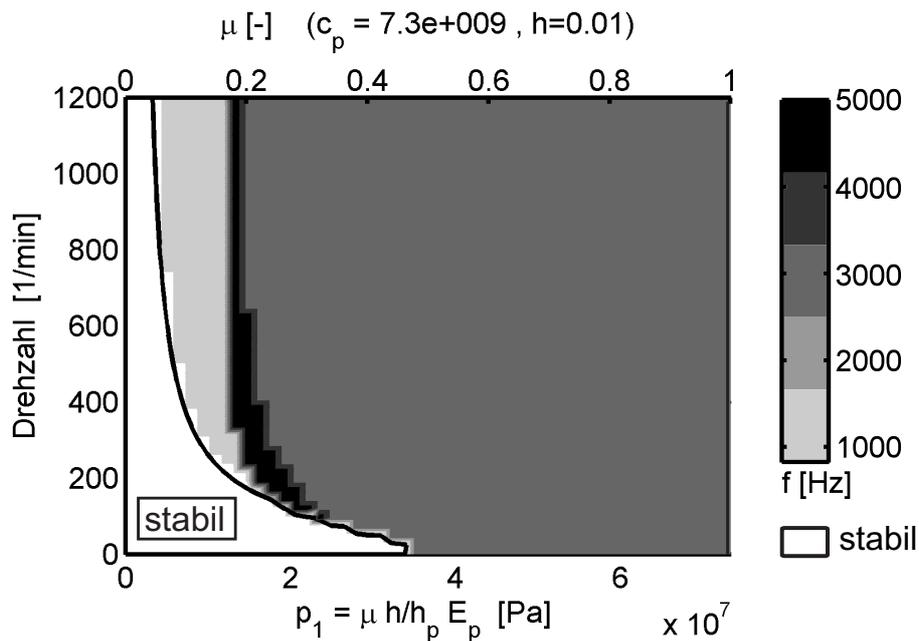


Abbildung 4.32: Stabilitätskarte unter Berücksichtigung der Einflüsse von Führungsbewegung und Strukturdämpfung ($\eta_p = 10^{-6}$ s), wobei die Reibung nur auf Lageebene linearisiert wurde. Die Eigenfrequenz der instabilen Schwingungsform ist über die Grauskala dargestellt.

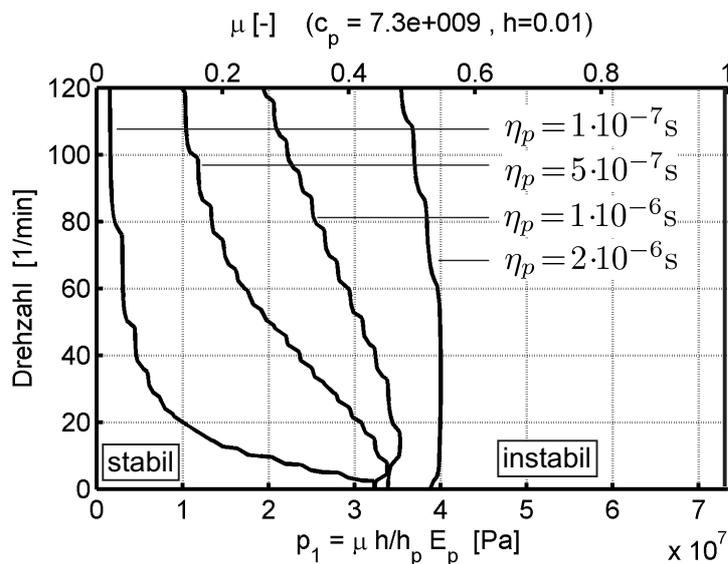


Abbildung 4.33: Stabilitätskarte unter Berücksichtigung der Einflüsse von Führungsbewegung und Strukturdämpfung, wobei die Reibung nur auf Lageebene linearisiert wurde.

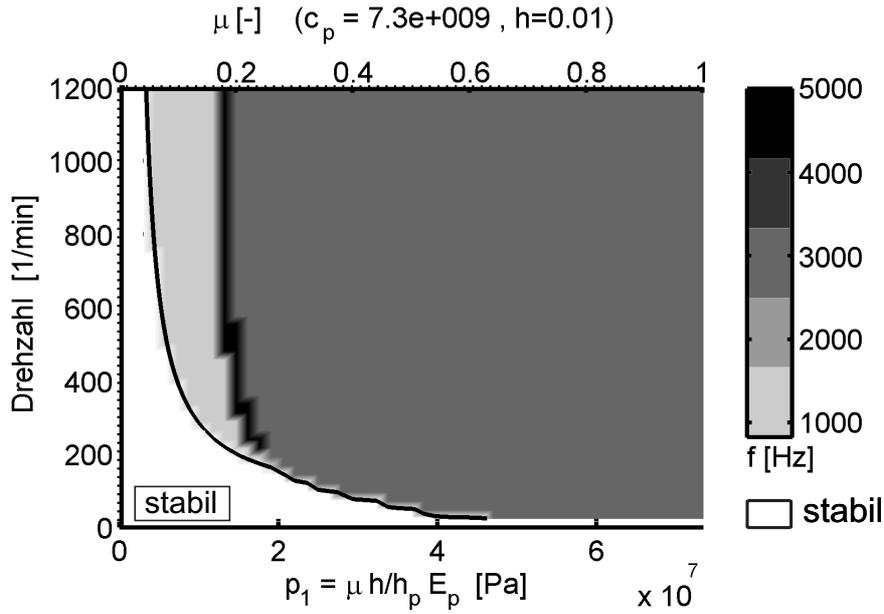


Abbildung 4.34: Stabilitätskarte unter Berücksichtigung aller Beiträge aus der inneren Dämpfung, der Führungsbewegung und der vollständigen Linearisierung der Gleitreibungsspannungen. Die Grauskala stellt die Eigenfrequenzen der instabilen Eigenform dar.

4.2.2.2.3 Führungsbewegung, Strukturdämpfung und vollständige Linearisierung der Reibung: Werden bei der Linearisierung der Gleitreibungskräfte die von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängigen Ausdrücke nicht vernachlässigt und zudem die Einflüsse aus innerer Dämpfung und der aufgeprägten Führungsbewegung berücksichtigt, so ergibt sich die allgemeine Störungsdifferentialgleichung (4.93)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \left[\Omega \mathbf{G} + d_p \mathbf{D} + \frac{\mu c_p h^2 s_0}{\Omega} \mathbf{D}_{R1} + \mu d_p h (\mathbf{G}_R + \mathbf{D}_R) \right] \dot{\mathbf{z}} + \left[\mathbf{K}(\Omega^2) + \mu c_p h \mathbf{K}_R + \mu c_p h \mathbf{N} \right] \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad (4.102)$$

die sich mit den zuvor bereits eingeführten Abkürzungen als

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \left[\Omega \mathbf{G} + d_p \left(\mathbf{D} + \frac{p_1}{c_p} (\mathbf{G}_R + \mathbf{D}_R) \right) + p_1 \frac{h s_0}{\Omega} \mathbf{D}_{R1} \right] \dot{\mathbf{z}} + \left[\mathbf{K}_{eff}(\Omega^2, p_1) + p_1 \mathbf{N} \right] \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.103)$$

schreiben lässt. Im Wesentlichen treten dabei die Parameter Ω , d_p , p_1 sowie $\frac{h s_0}{\Omega}$ in Erscheinung.

Abbildung 4.35 zeigt den Einfluss der gyroskopischen Anteile $\Omega \mathbf{G}$ in Gleichung (4.103) auf die Stabilität der Ruhelage. Es zeigt sich, dass insbesondere für kleine Anpresskräfte N_0 auf die Rückenplatte der Bremsbeläge die gyroskopischen Anteile bereits ab sehr kleinen Fahrgeschwindigkeiten eine Rolle spielen. Sie dürfen daher bei der Stabilitätsuntersuchung nicht vernachlässigt werden.

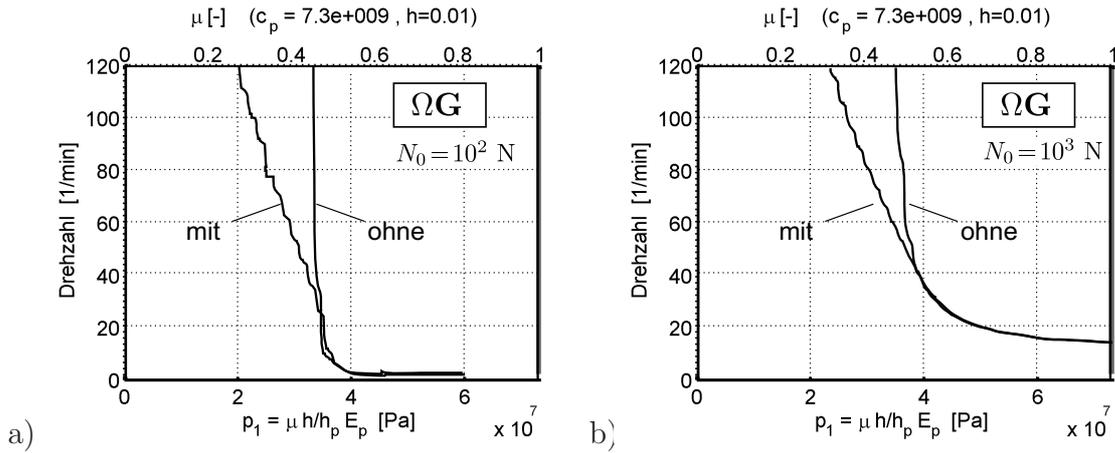


Abbildung 4.35: Einfluss der gyrokopischen Einflüsse $\Omega \mathbf{G}$ aus der Führungsbewegung für unterschiedliche Normalkräfte N_0 auf die Rückenplatte.

a) Für $N_0 = 10^2$ N tritt der Einfluss der Führungsbewegung ab ca. $20 \frac{U}{\text{min}}$ (≈ 3 km/h) deutlich in Erscheinung. b) Für $N_0 = 10^3$ N spielt Einfluss der Führungsbewegung ab ca. $40 \frac{U}{\text{min}}$ (≈ 6 km/h) eine Rolle.

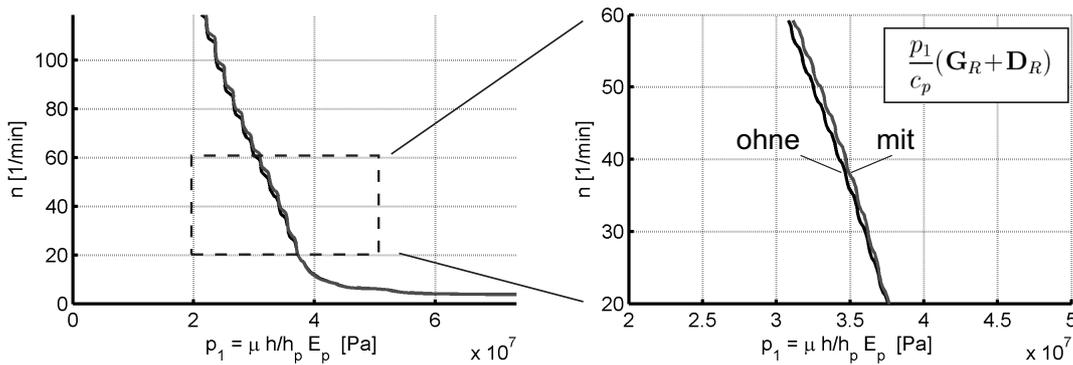


Abbildung 4.36: Zum Einfluss der Beiträge aus der Linearisierung der Reibung: im Vergleich dargestellt sind die Stabilitätsgrenzen von (4.103) mit und ohne Einfluss des Terms $\mu d_p h (\mathbf{D}_R + \mathbf{G}_R)$.

Ebenso wie die Abhängigkeit der Matrix \mathbf{K}_{eff} von p_1 stellt sich der Einfluss des Quotienten $\frac{p_1}{c_p}$ im betrachteten Betriebsbereich als praktisch nicht relevant heraus (siehe Vergleich in Abbildung 4.36). Die Matrix $(\mathbf{D}_R + \mathbf{G}_R)$ stammt dabei aus dem Anteil der Kontaktspannungen, der aus dem viskosen Materialverhalten des Bremsbelags herrührt. Der Einfluss der Matrix \mathbf{D}_{R1} hingegen ist deutlich erkennbar (siehe Abbildung 4.37) und stammt ausschließlich aus der Linearisierung der Gleitreibungskraft. Er tritt somit auch im Fall ungedämpfter Bremsbeläge auf. Bemerkenswert ist hierbei, dass die Winkelgeschwindigkeit Ω im Nenner des Vorfaktors auftritt und somit insbesondere bei kleinen Drehzahlen enormen Einfluss auf das Systemverhalten nehmen kann.

Abbildung 4.38 zeigt Stabilitätskarten des Systems für verschiedene Verlustfaktoren η_p bei einer Normalkraft $N_0 = 500$ N auf die Rückenplatte der Bremsbeläge.

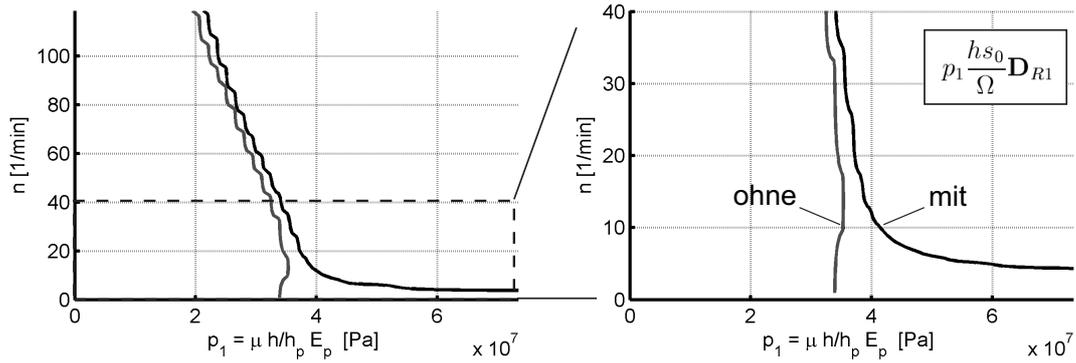


Abbildung 4.37: Zum Einfluss der Beiträge aus der Linearisierung der Reibung: im Vergleich dargestellt sind die Stabilitätsgrenzen von (4.103) mit und ohne den Einfluss des Terms $\frac{\mu c_p h^2 s_0}{\Omega} \mathbf{D}_{R1}$.

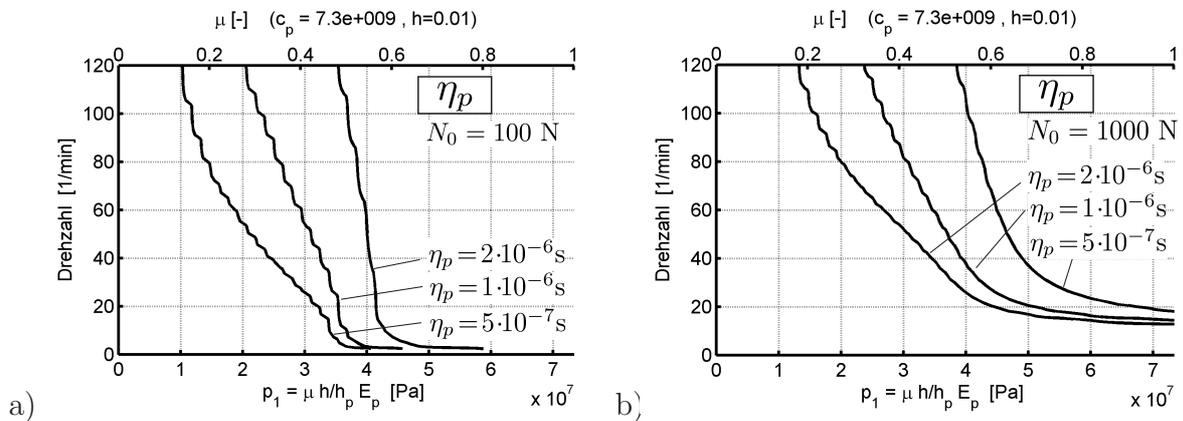


Abbildung 4.38: Stabilitätskarten unter Berücksichtigung aller Einflüsse für verschiedene Dämpfungswerte η_p und Normalkräfte: a) $N_0 = 100 \text{ N}$. b) $N_0 = 1000 \text{ N}$.

Im Vergleich zur Modellierung mit nur unvollständiger Linearisierung fällt auf, dass nunmehr die aus der Normalkraft N_0 im Linearisierungspunkt herrührende statische Kompression s_0 in einem der Systemparameter auftritt. Hierüber wirkt sich in dieser Modellierungsstufe nun auch die Bremskraft N_0 auf die Stabilität der stationären Lösung aus. Der Einfluss von N_0 ist in Abbildung 4.39 skizziert. Der Aufbau der Parameters $\frac{hs_0}{\Omega}$ legt nahe, dass der Einfluss des durch ihn mitbestimmten Ausdrucks $p_1 \frac{hs_0}{\Omega} \mathbf{D}_{R1}$ vom Zusammenspiel der statischen Kompression $s_0 = \frac{N_0}{A c c_p}$ und der Antriebsgeschwindigkeit Ω abhängt. Hierbei kann der letztgenannte Parameter für kleine Werte großen Einfluss entwickeln. Zudem wurde in den vorherigen Abschnitten festgestellt, dass der von der Kontaktzone abgedeckte Winkel $2\varphi_0$ großen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten haben kann. Die Abbildungen 4.40 und 4.41 zeigen die Stabilitätsgrenze des Systems in Abhängigkeit der drei Parameter $s_0 = \frac{N_0}{c_p}$, $n = \frac{r_{Rad}}{2\pi} \Omega$ und φ_0 für verschiedene Werte von μ . Dabei sind Parameterkombinationen unterhalb der dargestellten Oberfläche im Parameterraum instabil, während solche oberhalb stabil sind.

Da sich – ähnlich wie zuvor beim System ohne geschwindigkeitsproportionale Einflüsse – der

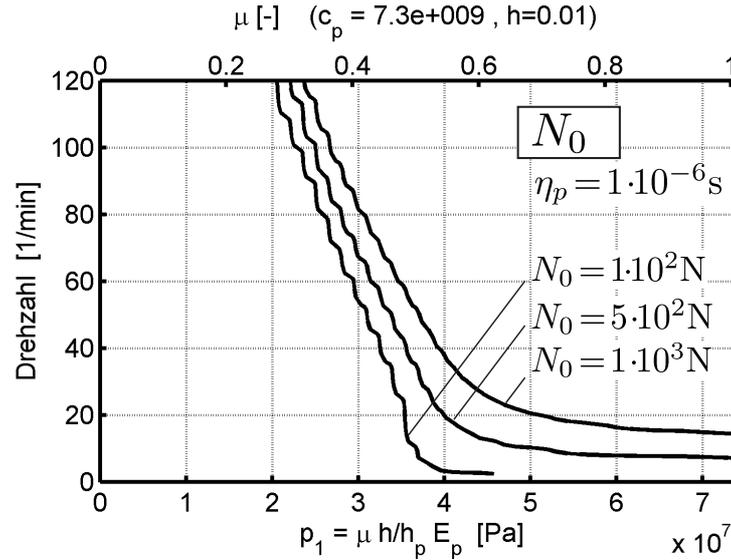


Abbildung 4.39: Stabilitätskarten unter Berücksichtigung aller Einflüsse für verschiedene Normalkräfte N_0 ($\eta_p = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$).

Einfluss der Breite der Beläge als eher gering herausstellt, ist die Abhängigkeit der Stabilität von b hier nicht weiter dargestellt.

Die Stabilitätskarten in den Abbildungen 4.40 bis 4.42 lassen sich im Hinblick auf die Beobachtungen im Experiment wie folgt deuten: auch mit Dämpfung liegt das experimentell untersuchte System ($\varphi_0 \approx 24^\circ$) in einem Instabilitätsgebiet, solange die Normalkraft N_0 unterhalb einer Maximalgrenze bleibt, die wiederum von der Drehzahl abhängt. Ist die stationäre Lösung stabil, so kann Instabilität auftreten, auch wenn die Normalkraft abgesenkt wird oder wenn die Drehzahl erhöht wird. Da die Flanke des Instabilitätsgebietes über φ_0 sehr steil ist, kann eine Verkleinerung von φ_0 (z.B. durch Anfasen) schlagartig eine deutliche Verbesserung bringen. Für moderate Normalkräfte $N_0 < 3 \text{ kN}$ beziehungsweise nicht besonders kleine Führungsgeschwindigkeiten kann dies jedoch direkt ins nächste Instabilitätsgebiet führen, das sich annähernd symmetrisch um $\varphi_0 \approx 20^\circ$ gruppiert. Um eine Größenordnung für die Auswirkungen von Fasen zu geben, sei hier angemerkt, dass bereits eine Fase von einem Zentimeter Breite eine Änderung $\Delta\varphi_0 \approx 2.2^\circ$ (bei einem mittleren Radius von 11 cm) bewirkt.

Für höhere Drehzahlen und niedrigere Drücke verliert das Anfasen seine Wirkung: so liegt beispielsweise bei Drehzahlen von $n > 60 \frac{\text{U}}{\text{min}}$ und Normalkräften $N_0 < 1 \text{ kN}$ ein zusammenhängendes Instabilitätsgebiet vor.

In Abbildung 4.43 ist beispielhaft für eine Drehzahl von $n = 40 \frac{\text{U}}{\text{min}}$ der Verlauf der Real- und Imaginärteile der Eigenwerte des Systems dargestellt. Da beim betrachteten System die Matrizen $\mathbf{M}^{-1} \left[\Omega \mathbf{G} + d_p \left(\mathbf{D} + \frac{p_1}{c_p} (\mathbf{G}_R + \mathbf{D}_R) \right) + p_1 \frac{h s_0}{\Omega} \mathbf{D}_{R1} \right]$ und $\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{K}_{\text{eff}}(\Omega^2, p_1) + p_1 \mathbf{N}]$ die Vertauschbarkeitsrelation (3.25) im Allgemeinen nicht mehr erfüllen, liegen praktisch immer

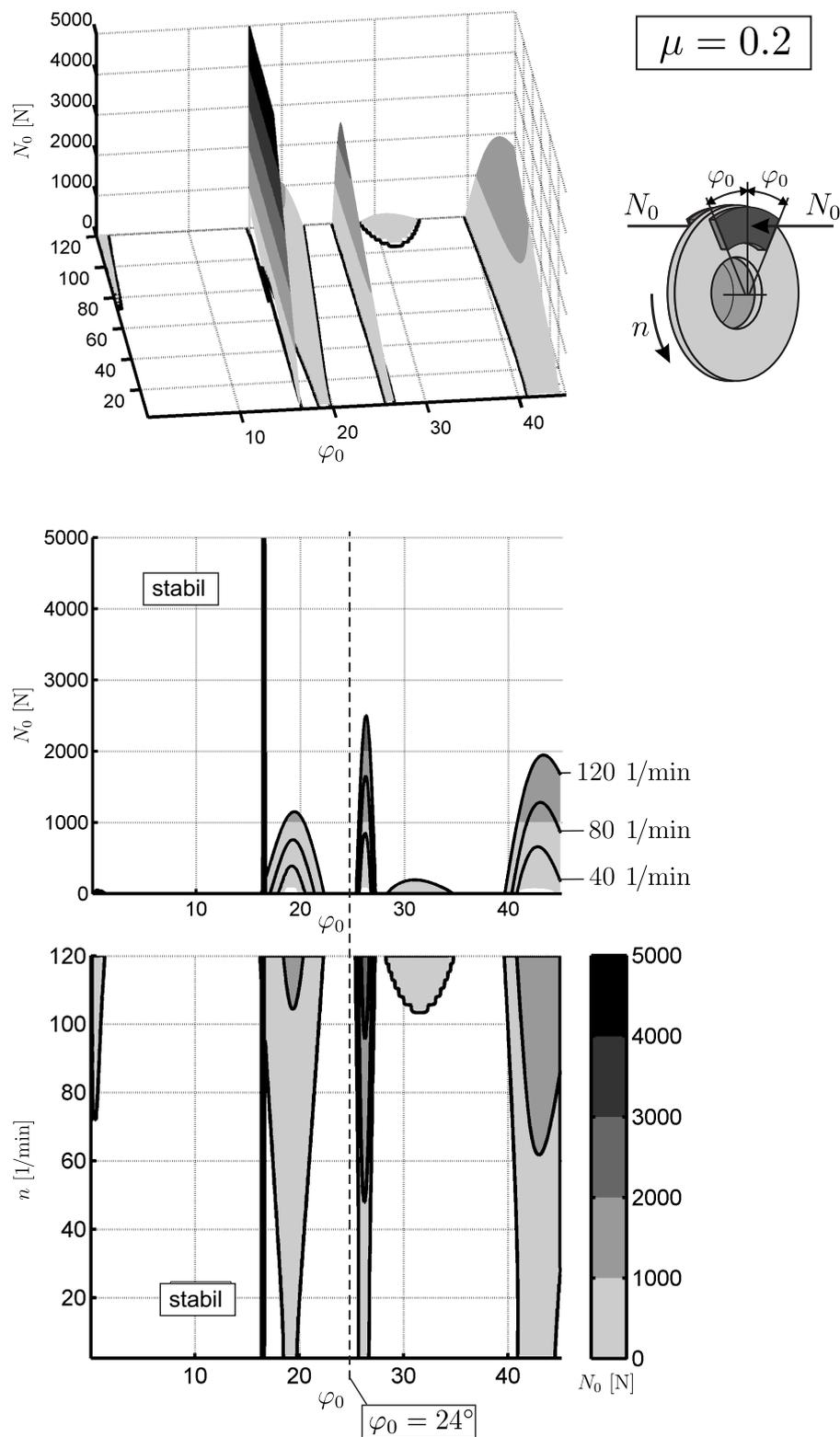


Abbildung 4.40: Stabilität der stationären Lösung für $\mu = 0.2$ und $\eta_p = 1 \cdot 10^{-6}$ s in Abhängigkeit der Parameter φ_0 , n und N_0 . Instabile Parameterkombinationen liegen unterhalb der 3d-Fläche.

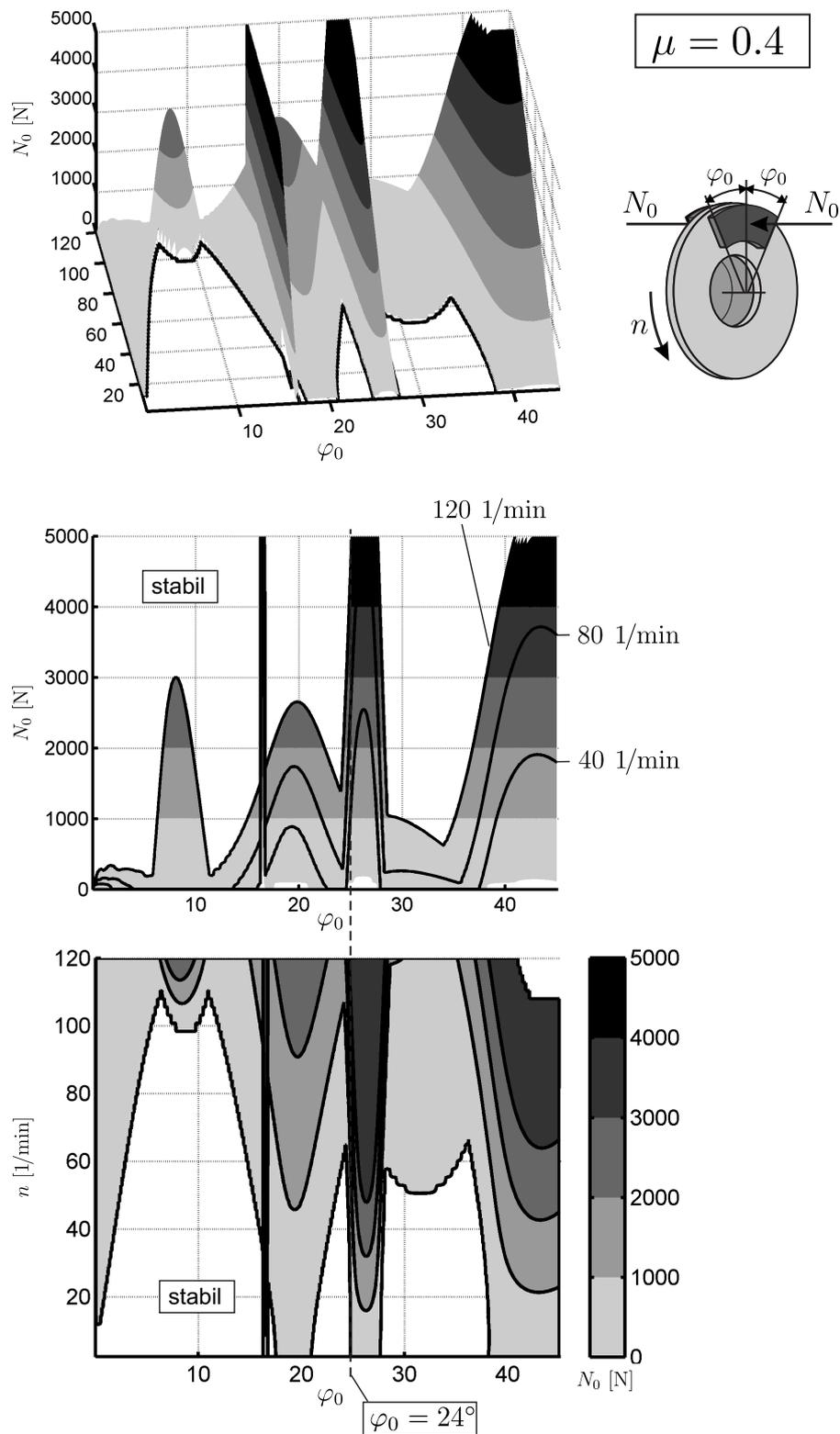


Abbildung 4.41: Stabilität der stationären Lösung für $\mu = 0.4$ und $\eta_p = 1 \cdot 10^{-6}$ s in Abhängigkeit der Parameter φ_0 , n und N_0 . Instabile Parameterkombinationen liegen unterhalb der 3d-Fläche.

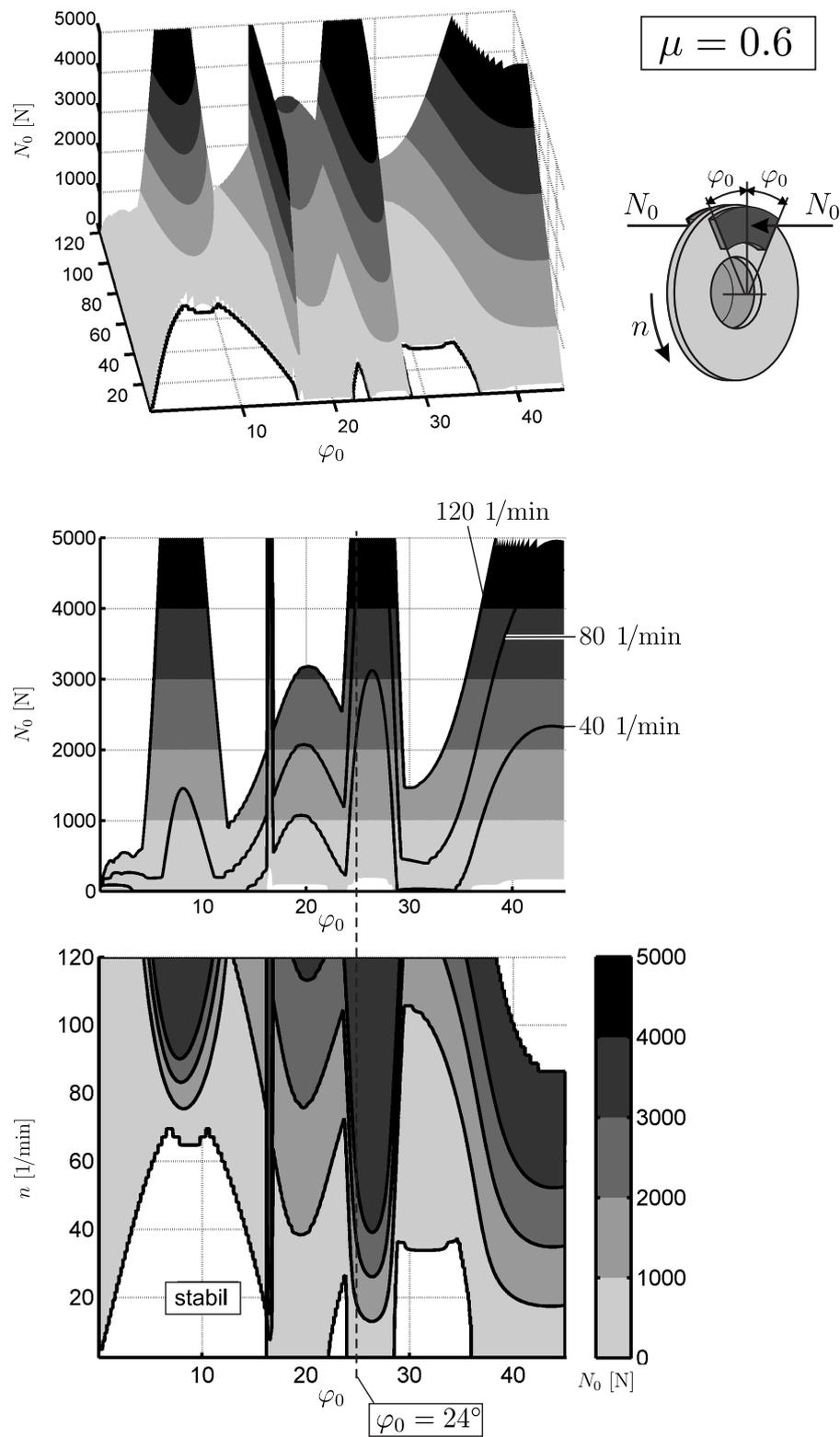


Abbildung 4.42: Stabilität der stationären Lösung für $\mu = 0.6$ und $\eta_p = 1 \cdot 10^{-6}$ s in Abhängigkeit der Parameter φ_0 , n und N_0 . Instabile Parameterkombinationen liegen unterhalb der 3d-Fläche.

komplexwertige Eigenvektoren vor. Wie in Abschnitt 3.4.2.2 gezeigt, haben die Eigenwertkurven daher nun keinen Kreuzungspunkt mehr. Anders als bei einfachen **M-K-N**-Systemen ist der Übergang von der stabilen zur flatter-instabilen Lösung hier also nicht mehr durch das Zusammenfallen von Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren gekennzeichnet (siehe hierzu auch Abbildung 4.31). Vielmehr nähern sich die Eigenkreisfrequenzen der interagierenden Eigenwerte einander nur an, ohne dass die Stabilitätsgrenze im Frequenzspektrum erkennbar ist. Sie ist somit nur anhand der Realteile der Eigenwerte zu ermitteln.

Abbildung 4.44 zeigt die Eigenvektoren, die zum Eigenwertpaar gehören, das um die mittlere Frequenz $f_m = 3085$ Hz gruppiert ist und bei $p_{1,stab} \approx 3.2 \cdot 10^7$ Pa ($\mu_{stab} \approx 0.48$) zur Instabilität des Systems führt. Dargestellt sind die Schwingungsformen kurz vor der Stabilitätsgrenze ($p_1 < p_{1,stab}$) und kurz danach ($p_1 > p_{1,stab}$). Dabei sind die komplexen Eigenformen – aufgetrennt nach Real- und Imaginärteil – sowie die Skalarprodukte c_R , c_I der Real- bzw. Imaginärteile der korrespondierenden Eigenvektoren dargestellt.

Beim Übergang von stabilem zu instabilem Verhalten lässt sich zunächst kein ausgezeichnetes Verhalten der Eigenschwingungsformen mehr erkennen. Es lässt sich lediglich feststellen, dass die Realteile der Eigenvektoren zur Stabilitätsgrenze bei $p_1 = p_{1,stab}$ hin immer ähnlicher werden und das zugehörige Skalarprodukt an der Stabilitätsgrenze annähernd den Wert $c_R \approx 1$ annimmt. Hinsichtlich c_R ähnelt das Verhalten für $p_1 < p_{stab}$ grob dem einfacher **M-K-N**-Systeme (vgl. Abbildung 4.31).

Jenseits der Stabilitätsgrenze (d.h. $p_1 > p_{1,stab}$) gleicht das Verhalten dem einfacher Systeme ohne geschwindigkeitsproportionale Einflüsse sowohl hinsichtlich des Real- als auch des Imaginärteils, d.h. es gilt $c_R \approx 1$ und $c_I \approx -1$.

Weitere Details zum Verhalten der Eigenpaare sind in Abschnitt 3.4.2.2 beschrieben.

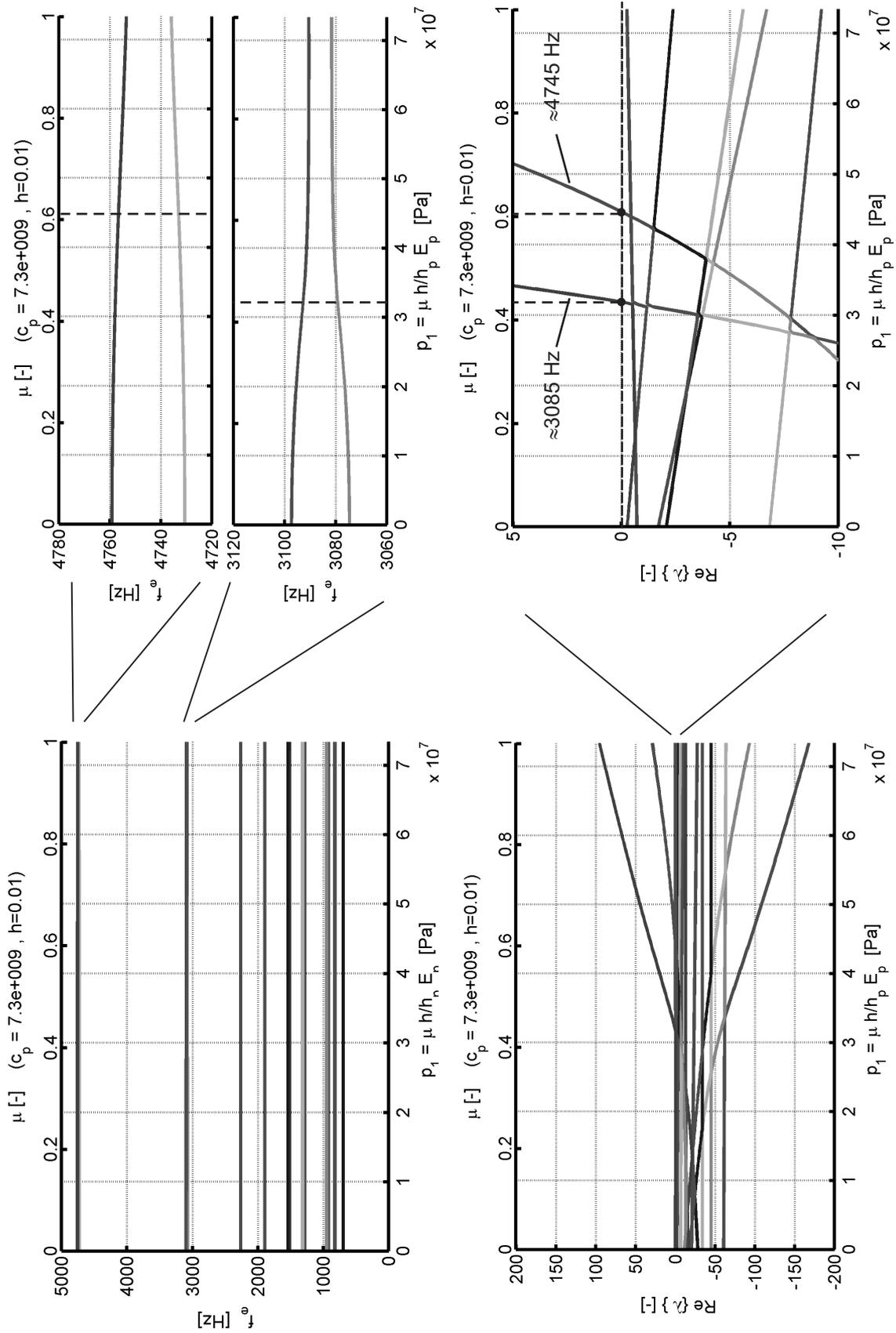


Abbildung 4.43: Verlauf der Eigenwerte (Real- und Imaginärteil) des vollständigen Systems (4.103) für $n = 60 \frac{U}{\min}$, $\eta_p = 10^{-6}$ s und $N_0 = 500$ N.

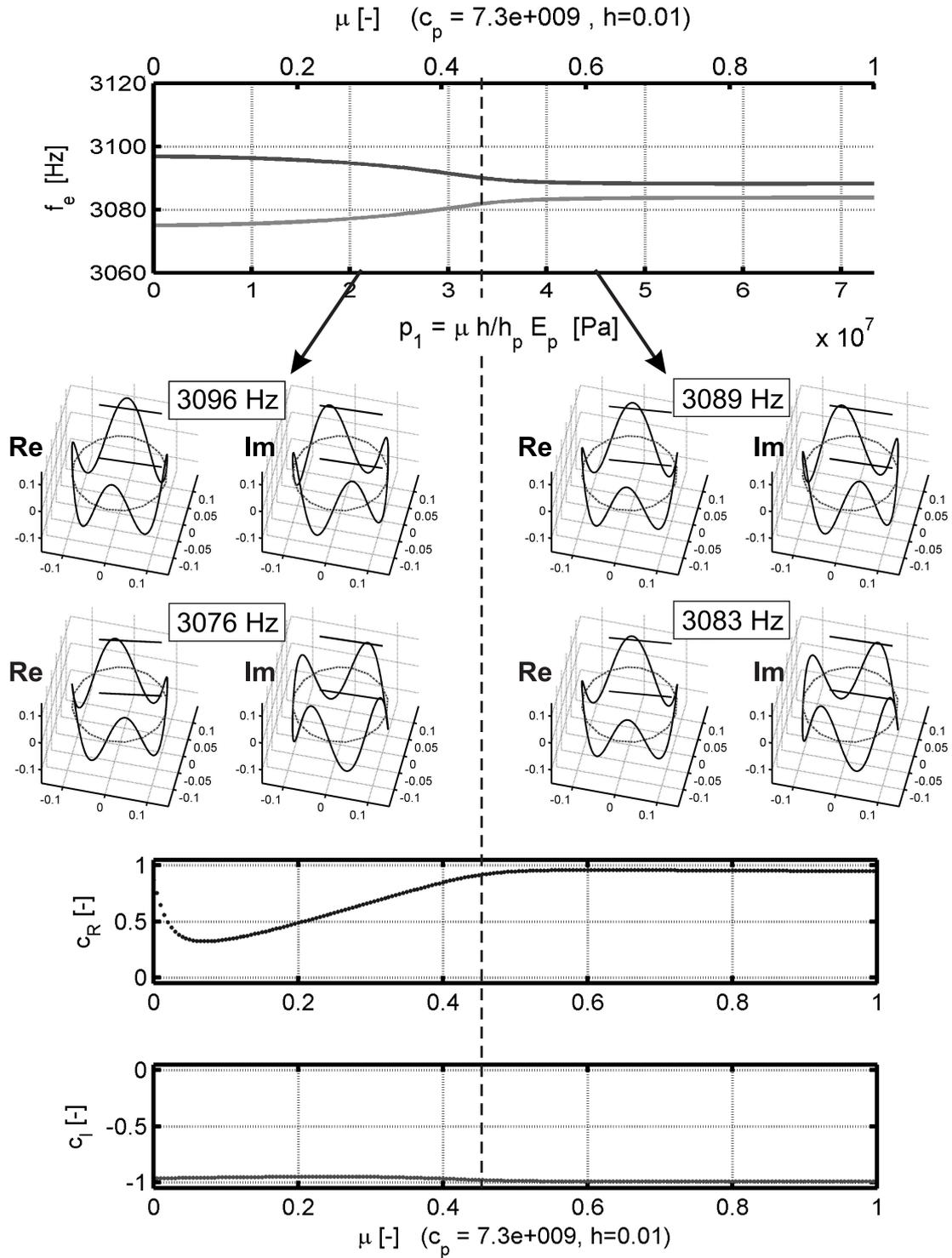


Abbildung 4.44: Typisches Instabilitätsszenario für Flutter-Instabilität unter Einfluss geschwindigkeitsproportionaler Kräfte: zu jedem Zeitpunkt lassen sich nur komplexe Eigenvektoren finden. Mit Erhöhung des Lastparameters p_1 nähern sich die Realteile des Eigenvektors einander an ($c_R \rightarrow 1$). Gleichzeitig verschwindet der Imaginärteil nicht und das zugehörige Skalarprodukt ist $-1 < c_I < 0$. Die Stabilitätsgrenze (gestrichelte Linie) ist durch keine erkennbare Besonderheit der Eigenfrequenzkurven gekennzeichnet. Insbesondere liegt kein kritischer Punkt im Sinne eines Kreuzungspunktes der Eigenfrequenzkurven mehr vor. Es ist jedoch festzustellen, dass bei der Stabilitätsgrenze die Skalarprodukte die Werte $c_R = 1$, $c_I = -1$ annehmen.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Inhalt

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Entstehung des Quietschens von Scheibenbremsen.

Da trotz des hohen Kenntnisstands zu diesem Thema Simulationen nach wie vor deutliche Defizite aufweisen, erschien es notwendig, die Thematik umfassend und von Grund auf anzugehen. In diesem Zusammenhang wurden folgende Themenkreise behandelt:

- Mechanische Modellbildung und Diskretisierung von Systemen elastischer Kontinua mit Reibkontakten und Führungsbewegung
- Stabilität der stationären Grundbewegung der Bewegungsgleichungen
- Formulierung und Analyse eines Bremsenmodells samt Vergleich mit experimentellen Ergebnissen.

Die Betrachtungen zur *Modellbildung*, sowie den sich ergebenden Bewegungsgleichungen und Störungsgleichungen hat gezeigt, dass sich bei der Modellierung von Scheibenbremsen stets **M-D-G-K-N**–Systeme als Störungsgleichungen ergeben. Dabei führt die Führungsbewegung der Brems Scheibe (d.h. die Rotation) unweigerlich zu gyroskopischen Anteilen **G** und zusätzlichen Anteilen in der Matrix **K** der lageproportionalen Terme.

Die Linearisierung der Reibung lässt im Allgemeinen Beiträge zu allen Systemmatrizen bis auf die Massenmatrix – also **D**, **G**, **K** und **N** – entstehen und bewirkt insbesondere den Verlust der Symmetrie der lageproportionalen Terme. Hinsichtlich der speziellen Ausprägung dieser Beiträge durch die Reibung können sich in Abhängigkeit der gewählten Normalkontaktformulierung unterschiedliche Matrizen ergeben.

Dabei zeigt sich insbesondere, dass bei der häufig verwendeten Formulierung mittels eines Penalty-Ansatzes auf Lageebene manche Anteile zur Matrix **D + G** fehlen. Weiterhin stellt

sich heraus, dass der bei diesen Formulierungen eingeführte Regularisierungsparameter (die sog. Kontaktsteifigkeit) als Vorfaktor zu den Beiträgen aus der Reibungslinearisierung in die Störungsgleichungen eingeht und diese somit direkt beeinflusst. Bei der Betrachtung reibungsinduzierter Instabilitäten ist somit zu erwarten, dass dieser Parameter einen sehr kritischen Punkt darstellt. Gelingt es nicht, durch Messung physikalisch sinnvolle Werte für die untersuchte Kontaktpaarung zu ermitteln, sind mitunter verfälschte Ergebnisse der Stabilitätsuntersuchung zu erwarten.

Interessant ist darüber hinaus die Ursache reibungsinduzierter Instabilitäten: die Reibungseinflüsse führen letztlich auf die zirkulatorische Matrix \mathbf{N} . Sie gehen somit zum Teil auf die Lageabhängigkeit der Reibungskräfte zurück und lassen sich damit der Klasse der Folgelastprobleme zuordnen. Hierbei kommt es jedoch nicht auf die Projektion der Kontaktspannungen auf die Richtung der entstehenden Schwingungen (d.h. vertikal zur Scheibenoberfläche) an. Vielmehr ist die Relativbewegung beider Körper im Kontakt sowie die Phasenlage der Normalkraftschwankungen von entscheidender Bedeutung. Hierdurch kommt der Formulierung der Kinematik der Relativbewegung und damit der Leistungsbilanz der Reibungsspannungen entscheidende Bedeutung zu.

Wie die allgemeine Modellbildung gezeigt hat, ist es im Rahmen einer *Stabilitätsanalyse* notwendig, allgemeine $\mathbf{M-D-G-K-N}$ -Systeme zu untersuchen. Zwar ist die Bedeutung zirkulatorischer Terme für die Stabilität reibungsbehafteter Systeme allgemein bekannt, doch wird bei Stabilitätsberechnungen der Einfluss der Matrizen \mathbf{D} und \mathbf{G} häufig vernachlässigt. Dies geschieht vermutlich im Sinne des Satzes von Thomson und Tait, der jedoch für Systeme mit zirkulatorischen Matrizen \mathbf{N} nicht angewandt werden darf. Es ist sogar festzustellen, dass dissipative und gyroskopische Einflüsse die Stabilität zirkulatorischer Systeme umfassend beeinflussen und vollständig verändern können.

Als besondere Ausprägungen dieses Verhaltens sind die destabilisierende Wirkung schwacher Dämpfung ("Ziegler-Paradoxon") oder die sichere Instabilität von $\mathbf{M-G-K-N}$ -Systemen zu nennen. Darüber hinaus ist bei zirkulatorischen Systemen mit dissipativen und gyroskopischen Einflüssen der Übergang von stabilem zu instabilem Verhalten nicht mehr durch das Zusammenfallen zweier Eigenfrequenzen gekennzeichnet.

Die Bedeutung dieser Besonderheiten für die Praxis erschließt sich mit der Erkenntnis der allgemeinen Modellbildung, dass geschwindigkeitsproportionale Anteile allein schon aus der Führungsbewegung und der Reibungslinearisierung unvermeidlich sind. Die unerlaubte Anwendung des Satzes von Thomson und Tait erscheint daher als eines der wesentlichen Defizite vieler Stabilitätsuntersuchungen in der Praxis.

Ausgehend von experimentellen Beobachtungen und unter Beachtung der voranstehenden Erkenntnisse wurde zudem ein analytisches *Bremsenmodell* formuliert und die Stabilität der

stationären Grundlösung untersucht. Dabei wurde besonderes Augenmerk auf die Formulierung der Kontaktkinematik gelegt. Die Bremsscheibe wurde als Kirchhoffplatte modelliert, während die Bremsbeläge als elastische Schicht zwischen der Oberfläche der Bremsscheibe und der starren Belagsrückenplatte angenommen wurden. Zur Diskretisierung der Kirchhoffplatte wurden Radial- und Umfangsrichtung separiert: motiviert durch die experimentellen Beobachtungen wurde die Radialrichtung mittels einer Ansatzfunktion diskretisiert, während die Schwingungen in Umfangsrichtung mit harmonischen Funktionen diskretisiert wurden. Die Ansatzfunktionen wurden dabei in raumfesten Koordinaten ausgedrückt.

Die Untersuchung des Modells ohne Reibung zeigt, dass der Einfluss der Führungsbewegung auf die Eigenfrequenzen der freien Bremsscheibe ohne Bremsbeläge in raumfesten Koordinaten für realistische Drehzahlen von Scheibenbremsen vernachlässigbar ist. Darüber hinaus wurde der Einfluss der Bremsbeläge auf das Frequenzspektrum und die Eigenformen analysiert. Hier zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zu den Ergebnissen einer experimentellen Modalanalyse.

Die Stabilitätsanalyse des reibungsbehafteten Systems bestätigt den zuvor allgemein formulierten Einfluss geschwindigkeitsproportionaler Anteile. Es zeigt sich sehr deutlich, dass die Einflüsse aus der Führungsbewegung und der Materialdämpfung die Stabilitätsgebiete drastisch beeinflussen. Dabei bedingt die Instabilität von **M-G-K-N**-Systemen, dass die Führungsbewegung nur dann sinnvoll in die Stabilitätsuntersuchung miteinbezogen werden kann, wenn gleichzeitig die Materialdämpfung berücksichtigt wird.

Es stellt sich zudem heraus, dass für kleine Drehzahlen das Stabilitätsverhalten von geschwindigkeitsproportionalen Termen aus der Reibungslinearisierung dominiert wird. Hier ist also im Rahmen der Modellbildung besonders auf eine vollständige Reibungslinearisierung zu achten.

Insgesamt lässt sich sagen, dass eine belastbare Stabilitätsanalyse eine vollständige Berücksichtigung aller Einflussfaktoren verlangt. Dabei muss der Kontaktkinematik besondere Beachtung geschenkt werden. Als kritischer Punkt ist darüber hinaus die Bestimmung realistischer Dämpfungswerte anzusehen.

Das analytische Modell gestattet die *Identifikation maßgeblicher Systemparameter*. Folgende Parameter treten dabei besonders in Erscheinung:

- Lastparameter $p_1 = \mu c_p h = \mu E_p \frac{h}{h_p}$ (mit der Gleitreibungszahl μ , dem Kompressionsmodul E_p des Belags und dem Dickenverhältnis h/h_p der Dicke der Bremsscheibe zur Höhe des Belags),
- Belagswinkel φ_0 (der vom Bremsbelag überdeckte Umfangswinkel ist $2\varphi_0$),
- Dämpfung d_p des Bremsbelags,

- Drehzahl n ,
- Bremskraft N_0 .

Der Lastparameter p_1 tritt dabei in den Bewegungsgleichungen als Vorfaktor der Reibungseinflüsse auf und stellt ein Produkt mehrerer Systemparameter dar. Dies sollte bei Untersuchungen in der Praxis beachtet werden, da der Einfluss jedes einzelnen dieser Parameter nur im Zusammenhang mit den anderen beurteilt werden kann. Im Sinne der Beeinflussung des Quietschverhaltens ist ein möglichst niedriger Wert für p_1 anzustreben, was beispielsweise durch einen geringen Gleitreibungsbeiwert, weiche Bremsbeläge und eine relativ zu den Belägen dicke Bremsscheibe realisiert werden kann.

Daneben lässt sich die Stabilität der Ruhelage durch den vom Belag überdeckten Umfangswinkel φ_0 stark beeinflussen. Hierdurch erklärt sich die Wirkung des in der Praxis häufig vorgenommenen Anfasens. Es zeigt sich jedoch auch, dass durch zu starke Verkleinerung von φ_0 neue Instabilitäten auftreten können.

Insgesamt ist auf eine ausreichend große Dämpfung zu achten.

Die restlichen Parameter n , N_0 stellen Betriebsparameter dar, die konstruktiv eher nicht beeinflusst werden können.

Einordnung

Ziel der Arbeit war es, den Bereich der reibungsinduzierten Schwingungen im Hinblick auf das Quietschen von Fahrzeugbremsen aufzuarbeiten und zu erweitern. Hinsichtlich der bearbeiteten Themenkomplexe lassen sich die neuen Ergebnisse dieser Arbeit wie folgt einordnen:

Ausgehend von einer allgemeinen Formulierung bewegter elastischer Kontinua mit Reibungskontakten wurde eine Übersicht der Störungsgleichungen erster Näherung für verschiedene, in der Praxis übliche Kontaktformulierungen gegeben. Diese Übersicht schließt eine Lücke in der bisherigen Literatur. Für die Praxis wird hierbei insbesondere die Feststellung wertvoll sein, dass bei Verwendung von Penalty-Formulierungen der Regularisierungsparameter das Ergebnis der Stabilitätsuntersuchung beeinflussen kann. Zudem wurde herausgearbeitet, in welcher Form die untersuchten Kontaktformulierungen Beiträge zu den Systemmatrizen erzeugen.

Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass die Instabilität durch Gleitreibung zwischen elastischen Körpern von der Leistungsbilanz der tangentialen Kontaktspannungen bestimmt wird, während die Normalkomponente keine Rolle spielt. Bisher hatte es in der Literatur immer wieder Versuche gegeben, durch besonderes Führen von Freischnitten Folgelasten zu

”konstruieren”. Dies ist nicht nur inkonsistent, sondern offenbar auch keineswegs notwendig. Die hier dargestellten Überlegungen geben grundsätzliche Hinweise für die Modellbildung reibungsinduzierter Schwingungen von Kontinua.

Im Hinblick auf die ermittelten Störungsgleichungen wurde die umfangreiche Literatur zur Stabilität mechanischer Systeme gesichtet. Die für die Untersuchung von reibungsinduzierten Instabilitäten notwendigen Grundlagen wurden zusammengestellt und kommentiert. Eine derartige Übersicht mit dem Fokus auf der Behandlung des Bremsenquietschens lag bislang ebenfalls nicht vor und mag als Orientierung in der komplexen Materie dienen.

Besondere Berücksichtigung fand bei den Betrachtungen der Einfluss von Termen, die proportional zu den generalisierten Koordinaten sind. Hier konnte auf Basis der Systemmatrizen ein Kriterium formuliert werden, mit dem entschieden werden kann, ob zusätzliche geschwindigkeitsproportionale Beiträge destabilisierend wirken können. Zudem wurden über die Beweisskizze in [29] hinaus zwei alternative Begründungen für die fast sichere Instabilität von **M-G-K-N**–Systemen angegeben.

Schließlich wurde ein analytisches Modell einer Scheibenbremse entwickelt. Dabei wurde ein Ansatz zur Formulierung der Kontaktkinematik [29], [30] aufgegriffen. In Erweiterung dieser Arbeiten wurde die Kinematik unter Verwendung von Polarkoordinaten neu aufgebaut.

Über das bisher in der Literatur vorherrschende Maß hinaus wurden in der weiteren Analyse des Modells die Systemmatrizen insbesondere unter Hinblick auf ihr Symmetrieverhalten umfassend angegeben. Zudem konnten trotz der Komplexität der Formulierung fünf für das Quietschverhalten relevante Systemparameter identifiziert werden. Von besonderem Nutzen für die Praxis mag hier die Erkenntnis sein, dass einer dieser wesentlichen Parameter ein Produkt weiterer Systemparameter ist, so dass diese in ihrer Wirkung auf das Systemverhalten nicht unabhängig sind und stets in ihrem Zusammenhang betrachtet werden müssen.

Der Einfluss verschiedener Anteile der Systemmatrizen auf die Stabilitätskarten wurde Schritt für Schritt dargestellt. Somit liegt nunmehr eine grundsätzliche Übersicht über verschiedene Modellierungsstufen und ihre Gültigkeitsbereiche für Stabilitätsanalysen vor.

Ausblick

Jedes einzelne der in den Teilkapiteln behandelten Themen bietet eine Vielzahl weiterführender Fragen.

So ist beispielsweise die numerische Umsetzung der im ersten Kapitel diskutierten Kontaktformulierungen nicht weiter vertieft worden. Diese beeinflusst letztlich nicht nur die Entscheidung über den praktischen Nutzen einer Methode, sondern kann unter Umständen auch die Systemmatrizen verändern. Daneben ist der Einfluss des Regularisierungsparameters bei Penaltymethoden auf die Stabilitätsanalyse nicht weiter untersucht worden. Vor dem Hintergrund der weiten Verbreitung dieser Kontaktformulierung ist dieser Aspekt sicherlich von großem Interesse für die Praxis.

Hinsichtlich der Stabilität wurde in dieser Arbeit lediglich die Stabilität der stationären Lösung anhand der linearisierten Gleichungen ermittelt. Aus vielen anderen technischen Anwendungen (so z.B. in der Rotordynamik) weiß man jedoch, dass nichtlineare Effekte über diese Betrachtung hinaus mit einbezogen werden müssen und neben der Ruhelage häufig stabile Grenzzyklen vorliegen können.

Die Modellbildung zur Untersuchung des Bremsenquietschens bietet ebenfalls noch eine Vielzahl von Entwicklungsmöglichkeiten. Aus experimentellen Beobachtungen weiß man beispielsweise, dass die Pressungsverteilung im Kontakt mitunter entscheidenden Einfluss auf die Entstehung von Schwingungen haben kann. Daneben ist in der vorliegenden Modellierung die Anbindung an die Umgebung noch sehr stark vereinfacht: interessant wären hier beispielsweise Reibungseffekte an den Stirnseiten der Beläge, mit denen sich diese auf dem Träger abstützen.

Aber auch über das Quietschen hinaus gibt es vielfältige Schwingungsphänomene: Versuche legen hierbei nahe, dass beispielsweise das Muhen ebenfalls auf eine Flutter-Instabilität zurückgeführt werden kann. Da hier große Bewegungen niederfrequenter Eigenformen der gesamten Bremse beobachtet werden, ist jedoch eine erweiterte Modellbildung notwendig.

Literaturverzeichnis

- [1] Neue Bremstechnik: Waggons mit leisen Sohlen. In: *bahntech - Das Technik-Magazin der Deutschen Bahn AG* 1 (2007)
- [2] BELYTSCHKO, T. ; LIU, W. ; MORAN, B. : *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley, New York, 2000
- [3] BHUSHAN, B. : *Introduction to Tribology*. John Wiley and Sons, 2002
- [4] BIERMANN, J. W.: *Kraftfahrzeugverkehrslärm - Ursachen sowie Minderungsmöglichkeiten im Fahrzeugbereich*. Habilitation, RWTH Aachen, 1988
- [5] BOLOTIN, V. : *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability (engl. transl.)*. Pergamon Press Inc., New York, 1963
- [6] BOWDEN, F. ; TABOR, D. : *The friction and lubrication of solids*. Clarendon Press, 1958
- [7] CAO, Q. ; OUYANG, H. ; FRISWELL, M. ; MOTTERSHEAD, J. : Linear eigenvalue analysis of the disc-brake squeal problem. In: *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 61 (2004), S. 1546–1563
- [8] CHEN, F. ; TAN, C. ; QUAGLIA, R. : *Disc Brake Squeal - Mechanisms, Analysis, Evaluation and Reduction/Prevention*. SAE-International, 2006
- [9] ELISHAKOFF, I. : Controversy Associated With the So-Called “Follower Forces”: Critical Overview. In: *Applied Mechanics Reviews* 58 (2005), S. 117
- [10] ENGEL, H. : *Systemansatz zur Untersuchung von Wahrnehmung, Übertragung und Anregung bremserrerger Lenkunruhe in Personenkraftwagen*. VDI-Verlag, 1998
- [11] ERIKSSON, M. : *Friction and Contact Phenomena of Disc Brakes related to Squeal*. Dissertation, Faculty for Science and Technology, Universität Uppsala, 2000
- [12] ERINGEN, A. : *Mechanics of Continua*. Robert E. Krieger Publishing Co, Huntington, NY, 1980

- [13] FIDLIN, A. : *Nonlinear Oscillations in Mechanical Engineering*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 2005
- [14] GASCH, R. ; NORDMANN, R. ; PFÜTZNER, H. : *Rotordynamik*. 2. Auflage, Springer, Berlin/ Heidelberg/ New York, 2002
- [15] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHNELL, W. ; WRIGGERS, P. : *Technische Mechanik*. Band 4, Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 2002
- [16] GROTH, C. ; MÜLLER, G. : *FEM für Praktiker*. Expert-Verlag, Renningen, 2002
- [17] GUCKENHEIMER, J. ; HOLMES, P. : *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New York, 1983
- [18] HAGEDORN, P. : *Non-linear Oscillations*. Clarendon Press, Oxford, 1988
- [19] HAGEDORN, P. : *Technische Schwingungslehre II: Lineare Schwingungen kontinuierlicher mechanischer Systeme*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 1989
- [20] HAGEDORN, P. ; OTTERBEIN, S. : *Technische Schwingungslehre I: Lineare Schwingungen diskreter mechanischer Systeme*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 1987
- [21] HAHN, W. : *Stability of Motion*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 1967
- [22] HASSLINGER, H. : A general perturbation theory for large discrete linear dynamical systems. In: *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)* 57 (1987), Nr. 1, S. 61–72
- [23] HEILIG, J. : *Instabilitäten in Scheibenbremsen durch dynamischen Reibkontakt*. VDI-Fortschrittberichte, VDI-Verlag, 2002
- [24] HERING, E. ; MARTIN, R. ; STOHRER, M. : *Physik für Ingenieure*. VDI-Verlag, 1989
- [25] HERRMANN, G. ; JONG, I. : On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems. In: *Journal of Applied Mechanics* 32 (1965), Nr. 3, S. 592–597
- [26] HETZLER, H. ; SCHWARZER, D. ; SEEMANN, W. : Steady-state stability and bifurcations of friction oscillators due to velocity-dependent friction characteristics. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics* 221 (2007), Nr. 3, S. 401–412
- [27] HETZLER, H. ; SEEMANN, W. : On low frequency disc-brake vibrations. In: *Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics* 5 (2005), Nr. 1, S. 95–96

- [28] HETZLER, H. ; SEEMANN, W. : Friction Induced Brake Vibrations at Low Speeds: Experiments, State-Space Reconstruction and Implications on Modeling. In: *Applied Mechanics Division Publications* 257 (2006), Nr. IMECE2006-14034, S. 283
- [29] HOCHLENERT, D. : *Selbsterregte Schwingungen in Scheibenbremsen: Mathematische Modellbildung und aktive Unterdrückung von Bremsenquietschen*. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Technische Universität Darmstadt, Shaker-Verlag, 2006
- [30] HOCHLENERT, D. ; SPELSBERG-KORSPETER, G. ; HAGEDORN, P. : Friction Induced Vibrations in Moving Continua and Their Application to Brake Squeal. In: *Journal of Applied Mechanics* 74 (2007), S. 542
- [31] HOFFMANN, N. ; FISCHER, M. ; ALLGAIER, R. ; GAUL, L. : A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations. In: *Mechanics Research Communications* 29 (2002), Nr. 4, S. 197–205
- [32] HOFFMANN, N. ; GAUL, L. : Nonconservative beating in sliding friction affected systems: transient amplification of vibrational energy and a technique to determine optimal initial conditions. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* (2004), Nr. 18, S. 611–123
- [33] HUSEYIN, K. : *Vibrations and Stability of multiple Parameter Systems*. Noordhoff International Publishing, Alphen aan den Rijn, 1978
- [34] HUSEYIN, K. : *Multiple Parameter Stability Theory and its Applications: Bifurcations, Catastrophes, Instabilities*. Oxford Engineering Science Series, 1986
- [35] IBRAHIM, R. ; RIVIN, E. : Friction-induced vibration, Pt. 1 & 2. In: *Applied Mechanics Reviews* 47, Nr. 7, S. 209–254
- [36] JACOBSSON, H. : Aspects of Disc Brake Judder. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering* 217 (2003), Nr. 6, S. 419–430
- [37] KARLSSON & SORENSON HIBBITT, I. : *ABAQUS/Explicit: Example Problems Manual (Version 6.1.): Brake squeal analysis*. Hibbitt, Karlsson & Sorenson, Inc, 2000
- [38] KAUDERER, H. : *Nichtlineare Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin/ Göttingen/ Heidelberg, 1958
- [39] KELKEL, K. : *Stabilität rotierender Wellen*. VDI-Berichte, Band 72, VDI-Verlag, 1985
- [40] KINKAID, N. ; O'REILLY, O. ; PAPADOPOULOS, P. : Automotive disc brake squeal. In: *Journal of Sound and Vibration* 267 (2003), Nr. 1, S. 105–166

- [41] KIRILLOV, O. : A theory of the destabilization paradox in non-conservative systems. In: *Acta Mechanica* 174 (2005), Nr. 3, S. 145–166
- [42] KNOTHE, K. ; WESSELS, H. : *Finite Elemente*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 1991
- [43] KOITER, W. : *On the stability of elastic equilibrium*. National Aeronautics and Space Administration, 1967
- [44] KRAUSE, H. ; POLL, G. : *Mechanik der Festkörperreibung*. VDI-Verlag, 1980
- [45] LANCZOS, C. : *The Variational Principles of Mechanics*. Dover Publications, 1986
- [46] LANGTHJEM, M. : On the influence of damping in a problem of dynamic stability optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 7 (1994), Nr. 4, S. 227–236
- [47] LAURSEN, T. : *Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 2002
- [48] LAZAN, B. : Damping of Materials and Members in Structural Mechanics. In: *Pergamon Press Ltd, Oxford (UK)* (1968)
- [49] LEIPHOLZ, H. : *Stabilitätstheorie: Eine Einführung in die Theorie der Stabilität dynamischer Systeme und fester Körper*. B.G. Teubner Verlag, 1968
- [50] LEUNG, A. : Perturbed general eigensolutions. In: *Communications in Applied Numerical Methods* 6 (1990), S. 401–9
- [51] LILES, G. : Analysis of Disc Brake Squeal Using Finite Element Methods. In: *SAE Technical Paper Series* 891150 (1989)
- [52] MAGNUS, K. : Der Einfluss verschiedener Kräftearten auf die Stabilität linearer Systeme. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 21 (1970), Nr. 4, S. 523–534
- [53] MAGNUS, K. ; POPP, K. : *Schwingungen*. B.G. Teubner Verlag, 2002
- [54] MAILYBAEV, A. ; SEYRANIAN, A. : On Singularities of a Boundary of the Stability Domain. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 21 (1999), Nr. 1, S. 106–128
- [55] MAJESKE, K. ; HERRIN, G. : Determining warranty benefits for automobile design changes. In: *Reliability and Maintainability Symposium*, 1998, S. 94–99
- [56] MEIROVITCH, L. : *Methods of Analytical Dynamics*. Dover Publications, 2004

- [57] MILLNER, N. : An Analysis of Disc Brake Squeal. In: *SAE Technical Paper Series* 780332 (1978)
- [58] MILLS, H. : Brake Squeak. In: *Technical Report 9000 B, Institution of Automobile Engineers* (1938)
- [59] MOTTERSHEAD, J. ; CHAN, S. : Brake squeal—an analysis of symmetry and flutter instability. In: *Friction-Induced Vibrations, Chatter, Squeal, and Chaos* Bd. 49, ASME, 1992, S. 87–97
- [60] MÜLLER, P. : *Stabilität und Matrizen*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 1977
- [61] NAYFEH, A. ; MOOK, D. : *Nonlinear Oscillations*. Wiley, 1979
- [62] NELSON, R. : Simplified calculation of eigenvector derivatives. In: *AIAA Journal* 14 (1976), Nr. 9, S. 1201–1205
- [63] NEMAT-NASSER, S. ; HERRMANN, G. : Some general considerations concerning the destabilizing effect in nonconservative systems. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* 17 (1966), Nr. 2, S. 305–313
- [64] NISHIWAKI, M. : Generalized theory of brake noise. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering* 207 (1993), S. 195–202
- [65] NORTH, M. : Disc brake squeal, a theoretical model. In: *MIRA Research Report* 5 (1972)
- [66] NORTH, M. : Disc brake squeal. In: *Braking of Road Vehicles* (1976), S. 169–176
- [67] OSTERMEYER, G. : Friction and wear of brake systems. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 66 (2001), Nr. 6, S. 267–272
- [68] OSTERMEYER, G. : *Dynamik der Reibung in Bremsen*. Bd. 1736. VDI-Verlag, 2002
- [69] OUYANG, H. ; MOTTERSHEAD, J. ; CARTMELL, M. ; FRISWELL, M. : Friction-Induced Parametric resonances in Discs: Effect of a negative Friction-Velocity Relationship. In: *Journal of Sound and Vibration* 209 (1998), Nr. 2, S. 251–264
- [70] POPP, K. ; RUDOLPH, M. ; KRÖGER, M. ; LINDNER, M. : Mechanisms to generate and to avoid friction induced vibrations. In: *VDI-Bericht* 1736 (2002), S. 1–15
- [71] POPP, K. : *Detection, utilization and avoidance of nonlinear dynamical effects in engineering applications*. Shaker-Verlag, 2001

- [72] REDDY, J. : *Applied functional analysis and variational methods in engineering*. McGraw-Hill, New York, 1986
- [73] REDDY, J. : *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. John Wiley and Sons, 2002
- [74] RIEMER, M. : *Technische Kontinuumsmechanik*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim/ Leipzig/ Wien/ Zurich, 1993
- [75] RIEMER, M. : *Zur Theorie elastischer Kontinua mit nichtmateriellen Übergangsbedingungen*. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Universität Karlsruhe (TH), 1995
- [76] RIEMER, M. ; WAUER, J. ; WEDIG, W. : *Mathematische Methoden der technischen Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 1993
- [77] RINSDORF, A. ; SCHIFFNER, K. : Practical Evaluation and FEM-Modelling of a Squealing Disc Brake. In: *SAE Technical Papers* (1993), Nr. 93307, S. 1–11
- [78] SATTEL, T. : *Dynamics of Ultrasonic Motors*. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Technische Universität Darmstadt, 2003
- [79] SCHMALFUSS, C. : *Theoretische und experimentelle Untersuchung von Scheibenbremsen*. VDI Fortschrittbericht, Band 12, VDI-Verlag, 2002 (494)
- [80] SCHUEMER, R. ; SCHRECKENBERG, D. ; FELSCHER-SUHR, U. : *Wirkungen von Schienen-und Straßenverkehrslärm*. ZEUS GmbH, Bochum, 2003
- [81] SCHWARZ, H. ; WALDVOGEL, J. : *Numerische Mathematik*. B.G. Teubner Verlag, 1986
- [82] SEYRANIAN, A. ; MAILYBAEV, A. : *Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications*. World Scientific, 2003
- [83] SPELSBERG-KORSPETER, G. : *Self-excited vibrations in gyroscopic systems*. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Technische Universität Darmstadt, Shaker-Verlag, 2007
- [84] SPURR, R. : A theory of brake squeal. In: *Proceedings of the Automobile Division 1* (1961), S. 33–52
- [85] STEPHANI, H. ; KLUGE, G. : *Theoretische Mechanik: Punkt-und Kontinuumsmechanik*. Spektrum Akademischer Verlag, 1995
- [86] STOLZ, U. ; HACH, K. ; KEMMER, H. : Untersuchungen am Tribosystem Bremsbelag/Bremsscheibe mit einem Modell-Bremsenprüfstand. In: *VDI-Berichte 1736* (2002), S. 117–134

- [87] STROGATZ, S. : *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books Group, Cambridge (MA, USA), 1994
- [88] VISHIK, M. ; LYUSTERNIK, L. : The Solution of some Perturbation Problems for Matrices and Selfadjoint or Non-Selfadjoint Differential Equations I. In: *Russian Mathematical Surveys* 15 (1960), Nr. 3, S. 1–73
- [89] WAGNER, U. von ; HOCHLENERT, D. ; HAGEDORN, P. : Minimal models for disk brake squeal. In: *Journal of Sound and Vibration* 302 (2007), Nr. 3, S. 527–539
- [90] WAGNER, U. von ; JEARSIRIPONGKUL, T. ; VOMSTEIN, T. ; CHAKRABORTY, G. ; HAGEDORN, P. : Brake Squeal: Modeling and Experiments. In: *VDI-Bericht* 1749 (2003), S. 173–186
- [91] WALLASCHEK, J. : Contact mechanics of piezoelectric ultrasonic motors. In: *Smart Materials and Structures* 7 (1998), Nr. 3, S. 369–381
- [92] WALLASCHEK, J. ; HACH, K. ; STOLZ, U. ; MODY, P. : A survey of the present state of friction modelling in the analytical and numerical investigation of brake noise generation. In: *Proceedings of the ASME Vibration Conference, Las Vegas* ASME, 1999, S. 12–15
- [93] WALTERSBERGER, B. : *Strukturdynamik mit ein- und zweiseitigen Bindungen aufgrund reibungsbehafteter Kontakte*. Universitätsverlag Karlsruhe, 2007
- [94] WAUER, J. : *Querschwingungen bewegter eindimensionaler Kontinua veränderlicher Länge*. VDI-Verlag, 1976
- [95] WICKRAMARACHI, P. ; SINGH, R. : Analysis of Friction-induced Vibration Leading to Eek Noise in a dry Friction Clutch. In: *International Congress and Exposition on Noise Control Engineering*, August 19-21, 2002
- [96] WILLNER, K. : *Kontinuums-und Kontaktmechanik.: Synthetische und analytische Darstellung*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 2003
- [97] WRIGGERS, P. : *Computational Contact Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York, 2006
- [98] ZIEGLER, H. : Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik. In: *Ingenieur Archiv* (1952), Nr. 20, S. 49–56
- [99] ZURMÜHL, R. ; FALK, S. : *Matrizen und ihre Anwendungen fuer angewandte Mathematiker, Physiker und Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York

Schriftenreihe des Instituts für
Technische Mechanik



ISSN: 1614-3914

ISBN: 978-3-86644-229-0

www.uvka.de