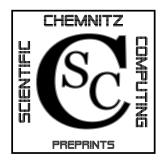
Uwe-Jens Görke Sonja Kaiser Anke Bucher Reiner Kreißig

Ein Beitrag zur gemischten Finite-Elemente-Formulierung der Theorie gesättigter poröser Medien bei großen Verzerrungen

CSC/09-02



Chemnitz Scientific Computing Preprints

Impressum:

Chemnitz Scientific Computing Preprints — ISSN 1864-0087

(1995-2005: Preprintreihe des Chemnitzer SFB393)

Herausgeber: Postanschrift:

Professuren für TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik

Numerische und Angewandte Mathematik 09107 Chemnitz

an der Fakultät für Mathematik Sitz:

der Technischen Universität Chemnitz Reichenhainer Str. 41, 09126 Chemnitz

http://www.tu-chemnitz.de/mathematik/csc/

Chemnitz Scientific Computing Preprints

Uwe-Jens Görke Sonja Kaiser Anke Bucher Reiner Kreißig

Ein Beitrag zur gemischten Finite-Elemente-Formulierung der Theorie gesättigter poröser Medien bei großen Verzerrungen

CSC/09-02

Zusammenfassung

This paper presents the theoretical background of a phenomenological biphasic material approach at large strains based on the theory of porous media as well as its numerical realization within the context of an adaptive mixed finite element formulation. The study is aimed at the simulation of coupled multiphysics problems with special focus on biomechanics. As the materials of interest can be considered as a mixture of two immiscible components (solid and fluid phases), they can be modeled as saturated porous media. For the numerical treatment of according problems within a finite element approach, weak formulations of the balance equations of momentum and volume of the mixture are developed. Within this context, a generalized Lagrangean approach is preferred assuming the initial configuration of the solid phase as reference configuration of the mixture. The transient problem results in weak formulations with respect to the displacement and pore pressure fields as well as their time derivatives. Therefore special linearization techniques are applied, and after spatial discretization a global system for the incremental solution of the initial boundary value problem within the framework of a stable mixed U/p-c finite element approach is defined. The global system is solved using an iterative solver with hierarchical preconditioning. Adaptive mesh evolution is controlled by a residual a posteriori error estimator. The accuracy and the efficiency of the numerical algorithms are demonstrated on a typical example.

CSC/09-02 ISSN 1864-0087 February 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung				1
2	Theo 2.1 2.2 2.3 2.4	Volumenbilanz des Kontinuums			4 7 13 14 19
3	 Randwertaufgabe der Theorie gesättigter poröser Medien bei großen Verzerrungen in verallgemeinerter Lagrangescher Darstellung 3.1 Schwache Formulierungen der Gleichgewichtsbedingungen und der Volumenbilanz des Kontinuums 3.2 Linearisierung der schwachen Formulierungen 3.3 Deformationsgesetz für den Effektivspannungstensor des Festkörperskeletts und konsistente Materialtangente 3.4 Stabile Elementformulierung und adaptive Netzanpassung im Kontext eines hierarchischen Lösers 				20 20 27 36 38
4 5	4.1 4.2 4.3	2 Berechnungen mit Viereckelementen vom Typ $\mathcal{Q}_2^{(8)} - \mathcal{Q}_1$			41 41 42 47 51
Author's addresses: Uwe-Jens Görke TU Chemnitz Fakultät f. Maschinenbau Professur Festkörpermech. now at: Helmholtz-Zentrum f. Umweltforschung – UFZ Deptmt. Umweltinformatik Permoserstr. 15 D-04318 Leipzig			Sonja Kaiser Reiner Kreißig TU Chemnitz Fakultät f. Maschinenbau Professur Festkörpermech. Str. d. Nationen 62 D-09111 Chemnitz	Anke Bucher HTWK Leipzig Fachbereich Maschinen und Energietechnik Professur Angewandte Mechanik Koburger Str. 16 D-04416 Markkleeberg	
ht	tp://	'www.tu-chemnitz.d 'www.htwk-leipzig. 'www.ufz.de	e/mb/FestKoerpMech/ de/fbme/		

1 Einführung

Reale ingenieurtechnische, geologische, geotechnologische und biologische Prozesse sind häufig durch das gleichzeitige Wirken unterschiedlicher Felder (mechanischer, thermischer, elektromagnetischer, chemischer u.a.) sowie die komplexe Interaktion verschiedener Materialkomponenten (z.B. feste, flüssige, gasförmige Phasen) gekennzeichnet. Die Modellierung und Simulation entsprechender Aufgabenstellungen führt auf die Lösung so genannter multiphysics-Probleme. Mit der verbesserten Effizienz und Zuverlässigkeit numerischer Methoden und der gestiegenen Leistungsfähigkeit der Rechentechnik wurde die zweckmäßig gekoppelte Behandlung damit verbundener Mehrfeldprobleme ermöglicht. Hierbei ist insbesondere von Vorteil, dass der strukturelle Aufbau der betrachteten Materialien oftmals die Anwendung gleichartiger Modelle gestattet. Deren numerische Behandlung spielt eine wachsende Rolle bei der hochgenauen analysierenden und prädiktiven Simulation realer physikalischer Vorgänge.

Ausgehend von umfangreichen theoretischen und numerischen Vorarbeiten auf dem Gebiet der effizienten numerischen Simulation von nichtlinearen Einfeldproblemen der Festkörpermechanik wurde an der TU Chemnitz vor etwa fünf Jahren in enger Kooperation zwischen Bereichen aus der Mechanik und der Mathematik mit der Behandlung direkter und inverser Aufgabenstellungen aus dem multiphysics-Bereich begonnen. Großes Potenzial bieten dabei insbesondere die Erfahrungen auf den Gebieten der Materialtheorie bei finiten Verzerrungen, der Identifikation von Materialparametern sowie der effizienten numerischen Verfahren zur Lösung des globalen Gleichungssystems im Rahmen der Finite-Elemente-Methode (FEM) und der hierarchischen adaptiven Netzsteuerung.

Mit dem Ziel einer sukzessiven Erweiterung der Komplexität der zu betrachtenden Mehrfeldprobleme wurde im Bereich großer Verzerrungen zunächst die Lösung des direkten und des inversen Problems für Werkstoffe mit nahezu inkompressiblem hyperelastischem Materialverhalten betrachtet (vgl. [18, 34]). Aufgrund vorhandener Modellanalogien dienen diese Ansätze als Vorarbeiten zur numerischen Behandlung von Zweiphasenmedien im Rahmen einer geeigneten U/p-c-Formulierung (mit stetigem Druckverlauf über die Elementgrenzen).

Zur Theorie der Mehrphasen-Mehrkomponenten-Medien existiert mittlerweile eine kaum zu überblickende Anzahl von Publikationen. Da die hier diskutierten Ansätze speziell auf Anwendungen in der Biomechanik weicher Gewebe fokussiert sind, soll im Wesentlichen die Entwicklung der so genannten Theorie poröser Medien (TPM) an ausgewählten Arbeiten exemplarisch skizziert werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem isothermen quasistatischen Modell eines gesättigten Zweiphasenmediums ohne Masseaustausch zwischen den Konstituierenden. Ein ausführlicher Überblick zu historischer Entwicklung und gegenwärtigem Stand der TPM wird von de Boer [5,6] gegeben. Ebenso sei auf die